

บทที่ 4 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการตัดโฟมพีวีซี

จากการศึกษาสภาพทั่วไปของบริษัทที่ร่วมทำการวิจัย ในบทที่ 3 ทำให้ทราบถึงสภาพปัญหาที่บริษัทกำลังเผชิญอยู่ในปัจจุบันเพื่อให้การแก้ปัญหาอย่างมีระบบตรงตามวัตถุประสงค์ ในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการประยุกต์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และผลลัพธ์ที่ได้จากการประยุกต์แบบจำลองนี้สำหรับการออกแบบการตัดโฟมมีหัวข้อดังนี้

- ปัญหาการออกแบบการตัดโฟม
- แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการตัดโฟม
- แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับรูปแบบการตัดโฟมพีวีซีโดยใช้เทคนิคการ
สร้างสมการ
- การทดสอบปัญหาโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

4.1 ปัญหาการออกแบบการตัดโฟม

ปัญหาที่ศึกษาในงานวิจัยนี้ เป็นผลสืบเนื่องจากการที่บริษัทฯ มีการทำงานที่ไม่ถูกต้องตามหลักวิชาการ และไม่มีเครื่องมือช่วยในการตัดสินใจในการวางแผนตัดโฟมพีวีซี ส่งผลให้ต้นทุนในการตัดโฟมมีต้นทุนที่สูง อีกทั้งการตัดโฟมมีปริมาณโฟมไม่เท่ากัน รวมถึงมีขนาดที่มีความหลากหลายทำให้การทำงานค่อนข้างเป็นไปด้วยความลำบาก งานวิจัยนี้จึงมีจุดประสงค์ในการช่วยออกแบบการตัดโฟมพีวีซีเพื่อให้ต้นทุน คือจำนวน Blocks ที่ใช้ให้มีจำนวนต่ำที่สุดและครบตามความต้องการของลูกค้า โดยมีการวางแผนการตัดโฟมของบริษัท ดังนี้

- การวางแผนการตัดโฟมพีวีซีเป็นการวางแผนแบบรายเดือน
- ขนาดของวัตถุดิบที่ใช้คือแผ่น Blocks ที่มีขนาดความกว้าง 12,200 มิลลิเมตรขนาดความยาว 24,400 และขนาดความหนาที่ 760 มิลลิเมตร
- ขนาดของสินค้าที่ต้องการคือแผ่น Sheets มีจำนวน 4 ขนาด คือ 97 มิลลิเมตร 85 มิลลิเมตร 74 มิลลิเมตรและ 50 มิลลิเมตร (เหตุผลที่เรียงจากมากไปหาน้อยเนื่องจากการตัดจากแผ่นที่ใหญ่ก่อนหากแผ่น Sheets มีปัญหาสามารถนำไปตัดหรือจัดให้เป็นขนาดที่เล็กกว่าได้จึงต้องเรียงการตัดจากความหนามากกว่าไปหาความหนาน้อยกว่า
- ขนาดของใบมีดที่ใช้ในการตัดอยู่ที่ 1.3 มิลลิเมตรไม่มีผลต่อเพราะต่อแผ่น Sheets ที่ตัดเนื่องจากอยู่ในมาตรฐานของลูกค้า ที่ ± 0.5 mm และเศษที่โดนใบมีดตัดบริษัทฯ เป็นผู้รับผิดชอบ

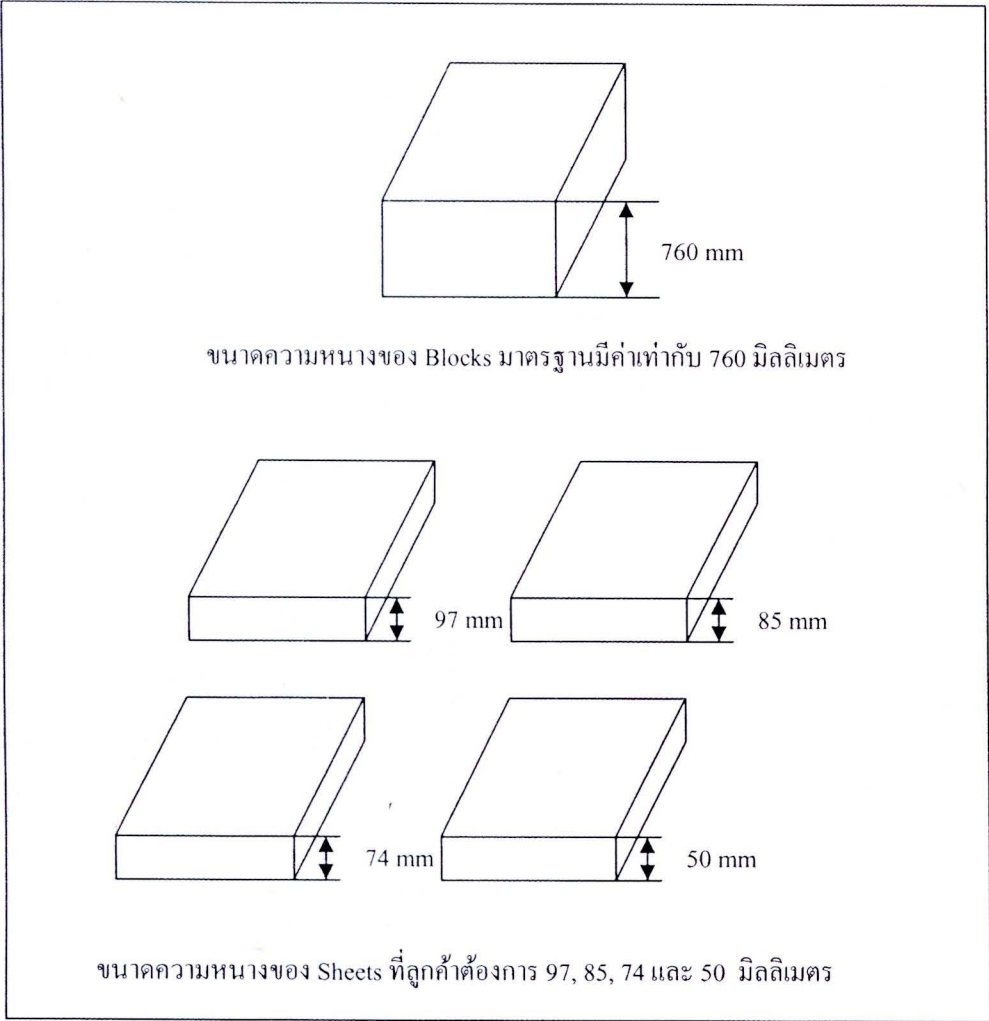
ดังนั้นปัญหาการออกแบบการตัดโฟมพีวีซีเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ชนิดหนึ่งเนื่องจากมีวัสดุประสงค์เพื่อทำให้เกิดต้นทุนในการตัดโฟมที่ต่ำที่สุด

4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการตัดโฟม

4.2.1 การกำหนดตัวแปรตัดสินใจ

ในการออกแบบการตัดโฟมพีวีซีของบริษัทในปัจจุบันมีตัวแปรตัดสินใจที่มีผลต่อการตัด คือปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ตัด (Blocks) ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 3 ว่าขนาดของตัววัตถุดิบที่ใช้นั้นมีขนาดคงที่และมีสินค้าที่ต้องการมีขนาด 4 ขนาดคือ 97, 85, 74 และ 50 มิลลิเมตร ดังนั้นจึงสามารถกำหนดตัวแปรที่ใช้ตัดสินใจได้เป็น x_j เป็น $j=1, 2, 3, \dots, n$ โดยที่

x_j คือปริมาณจำนวนวัตถุดิบที่ใช้หรือ Block ที่ใช้ตัดรูปแบบที่ j เมื่อ $j = 1, 2, 3, \dots, n$



รูปที่ 4.1 ลักษณะการตัดโฟมจาก Blocks มาเป็นแผ่น Sheets

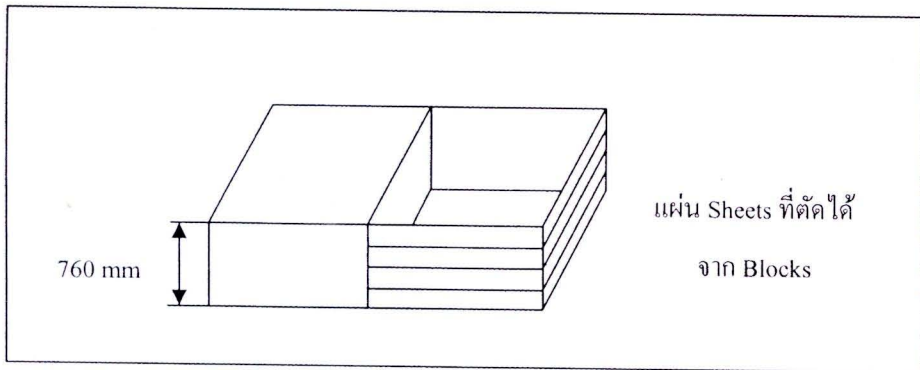
4.2.2 การสร้างรูปแบบการตัดเบื้องต้น

ในการแก้ไขปัญหาการตัดโฟมมีการสร้างรูปแบบการตัดเบื้องต้น ดังนี้

$$a_{ij} = \frac{L}{l_i}; i = j$$

โดยที่

- a_{ij} คือ จำนวนแผ่น Sheets ที่ได้ขนาด i จากรูปแบบการตัด j
 l_i คือ ขนาดความหนาของแผ่น Sheets ขนาดที่ i
 L คือ ขนาดความหนาของแผ่น Blocks ขนาดมาตรฐาน



รูปที่ 4.2 รูปแบบการตัดโฟมที่สร้างขึ้น

ตารางที่ 4.1 รูปแบบการตัดโฟมที่สร้างที่สร้างขึ้น

ลำดับ	ขนาดความหนา ของสินค้า (mm)	รูปแบบที่ 1 (แผ่น)	รูปแบบที่ 2 (แผ่น)	รูปแบบที่ 3 (แผ่น)	รูปแบบที่ 4 (แผ่น)
1.	97	7			
2.	85		8		
3.	74			10	
4.	50	1	1		15
	เศษที่เหลือ	3	3	2	1

จากตารางที่ 4.1 อธิบายได้ดังนี้

- รูปแบบที่ 1 สามารถตัด Sheets ขนาด 97 มิลลิเมตร ได้ 7 แผ่น ขนาด 50 มิลลิเมตร ได้ 1 แผ่นและเหลือเศษ 3 มิลลิเมตร
- รูปแบบที่ 2 สามารถตัด Sheets ขนาด 85 มิลลิเมตร ได้ 8 แผ่น ขนาด 50 มิลลิเมตร ได้ 1 แผ่นและเหลือเศษ 3 มิลลิเมตร
- รูปแบบที่ 3 สามารถตัด Sheets ขนาด 74 มิลลิเมตร ได้ 10 แผ่น เหลือเศษ 2 มิลลิเมตร
- รูปแบบที่ 4 สามารถตัด Sheets ขนาด 50 มิลลิเมตร ได้ 15 แผ่น เหลือเศษ 3 มิลลิเมตร

4.2.3 การกำหนดสมการวัตถุประสงค์

สมการวัตถุประสงค์สำหรับการออกแบบการตัดโฟมพีวีซีในปัจจุบัน คือการใช้วัตถุดิบ (Blocks) ที่ต่ำที่สุด สามารถกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ได้ดังนี้

$$\text{Min } Z = \left[\sum_{j=1}^n x_j \right]$$

โดยที่

x_j คือ จำนวน Blocks ที่ถูกใช้ตัดรูปแบบที่ j
 n คือ จำนวนการตัดที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ในกรณีที่ต้องการลดต้นทุน สามารถหาได้โดยกำหนดสมการใหม่โดยเพิ่มตัวแปรราคาต่อหน่วยเข้าไปได้

$$\text{Min } Z' = c \left[\sum_{j=1}^n x_j \right]$$

โดยที่

C คือ ต้นทุนของ Blocks มีหน่วยเป็นบาทต่อ Blocks

4.2.4 การกำหนดข้อจำกัดที่เกี่ยวข้อง

ข้อจำกัดต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบการตัดโฟมพีวีซีของบริษัทในปัจจุบันสามารถแบ่งออกเป็น 4 กลุ่มหลักๆ ได้แก่

- การคำนวณจำนวนแผ่น Sheets ที่ตัดได้จาก Blocks
- จำนวนแผ่น Sheets ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ ที่ลูกค้าต้องการ (Demand)

- ขนาดของตัวโพนที่ตัดได้ต้องมีขนาดไม่เกินความหนาของตัววัตถุดิบ (L)
- ตัวแปรตัดสินใจคือจำนวนวัตถุดิบที่ใช้ตัด ต้องไม่มีค่าเป็นลบและเป็นจำนวนเต็ม

โดยข้อจำกัดทั้ง 2 แบบสามารถอธิบายได้ในรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ดังนี้

(1) การคำนวณจำนวนแผ่น Sheets ที่ตัดได้จาก Blocks

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

a_{ij} คือ จำนวนแผ่น Sheets ที่ได้ขนาด i จากรูปแบบการตัด j

(2) จำนวนแผ่น Sheets ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ ที่ลูกค้าต้องการ (Demand: D)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq D_i \quad \forall i$$

D_i คือ จำนวนสินค้าที่ลูกค้าต้องการ (Demand) ที่แบบ i

(3) ขนาดของตัวโพนที่ตัดได้ต้องมีขนาดไม่เกินความหนาของตัววัตถุดิบ (L)

$$\sum_{j=1}^m l_i a_{ij} \leq L$$

l_i คือ ขนาดความหนาของแผ่น Sheets ขนาด i

L คือ ขนาดความหนาของแผ่น Blocks ขนาดมาตรฐาน

m คือ จำนวนความหนาของแผ่น Sheets ที่ได้ทั้งหมด

(4) ตัวแปรตัดสินใจคือจำนวนวัตถุดิบที่ใช้ตัด ต้องไม่มีค่าเป็นลบและเป็นจำนวนเต็ม

$$x_j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

4.2.5 รูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับรูปแบบการตัดโฟมพีวีซี

จากขั้นตอนดังกล่าวข้างต้นสามารถสรุปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการออกแบบการตัดโฟมพีวีซีได้ดังนี้

$$Min Z = [\sum_{j=1}^n x_j]$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq D_i \qquad \forall i$$

$$\sum_{j=1}^m l_ix_j \leq L$$

และ

$$x_j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

โดยที่

a_{ij}	คือ	จำนวนแผ่น Sheets ที่ได้ขนาด i จากรูปแบบการตัด j
l_i	คือ	ขนาดความหนาของแผ่น Sheets ขนาดที่ i โดยกำหนดให้
x_j	คือ	จำนวน Blocks ที่ถูกใช้ตัดรูปแบบที่ j
D_i	คือ	จำนวนสินค้าที่ถูกสั่งซื้อ (Demand) ที่แบบ i
n	คือ	จำนวนการตัดที่เป็นไปได้ทั้งหมด
m	คือ	จำนวนความหนาของแผ่น Sheets ที่ได้ทั้งหมด
L	คือ	ขนาดความหนาของแผ่น Blocks ขนาดที่ i

4.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับรูปแบบการตัดโฟมพีวีซีโดยใช้เทคนิคการ
สร้างสดมภ์

จากการศึกษาพบว่ารูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถทำงานได้ผลค่อนข้างพอใจ แต่ยังคงพบว่ามี
ต้นทุนในการใช้ตัววัตถุดิบแผ่น Blocks มีปริมาณสูงอยู่ ดังนั้นทางการศึกษาวิจัยนี้ได้นำเอาเทคนิค
วิธีการสร้างสดมภ์ (Column Generation) เข้ามาช่วยในการค้นหารูปแบบการตัดแผ่น Sheets ใหม่
อาศัยผลคูณจากปัญหาควบคู่ (Dual Multipliers) หรือ Reduced Cost ของปัญหาควบคู่เข้ามาช่วย

ในการหาคำตอบ จากการแก้ไขปัญหасмการเป้าหมาย กับสมการข้อจำกัดทั้งหมดและทำการผ่อนคลายสมการของ $x_j \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็มโดยกำหนดในตัวแปร $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots, \pi_m$ ขึ้นมาถ้าสามารถค้นหารูปแบบการตัดใหม่ที่ผ่านเงื่อนไขใหม่ได้ แสดงว่ารูปแบบการตัดใหม่สามารถช่วยปรับปรุงสมการเป้าหมายให้มีค่าต่ำลงได้ (Minimum)

การคำนวณโดยใช้เทคนิคการสร้างสมการ (ปัญหาย่อย) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\text{Max } W = \sum_{i=1}^m \pi_i a_{n+1}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^m l_i a_{n+1} \leq L$$

และ

$$a_{n+1} \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

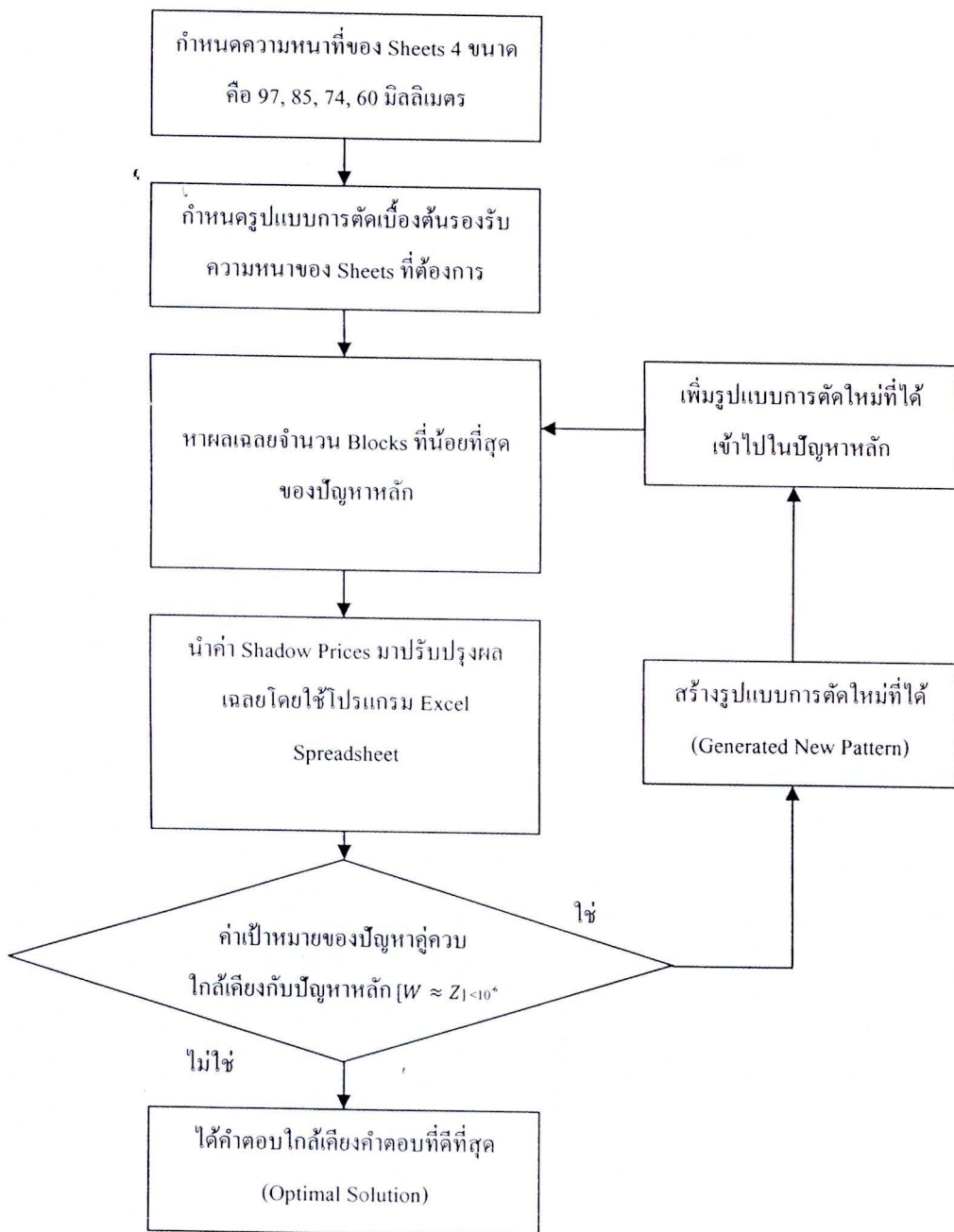
โดยกำหนดให้

π_i	คือ	ค่า Dual Prices
a_{n+1}	คือ	จำนวนแผ่น Sheets ที่ได้จากการตัดตามขนาด Size ของลูกค้า
l_i	คือ	ขนาดความหนาของลูกค้าที่ต้องการ
L	คือ	ความหนาของตัว Blocks คือ 760 มิลลิเมตร

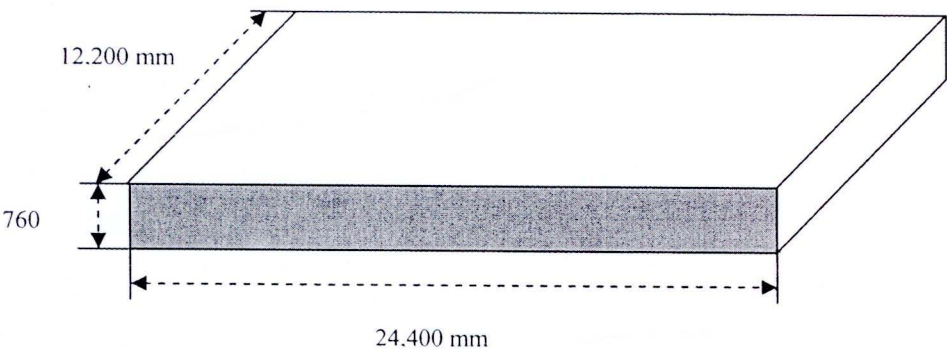
โดยที่ปัญหานี้เป็นปัญหาการหารูปแบบการตัดใหม่ ซึ่งเทียบได้กับการสร้างรูปแบบการตัด j ใหม่ในปัญหาดังค้น ถ้าค่าสูงสุดของ W ในกรณีนี้ที่ $W \neq Z$ จะสามารถกำหนดหารูปแบบการตัดใหม่ได้อีกโดยทำเช่นนี้จนค่า $W \approx Z$ แสดงว่าได้คำตอบที่ใกล้เคียงคำตอบที่ดีที่สุดแล้ว (Optimal Solution)

4.4 การทดสอบปัญหาโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากที่สามารถกำหนดถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ตามขั้นต้นแล้ว ดังนั้นจะทำการแทนข้อมูลลงในสมการดังมีรายละเอียดดังนี้ ขั้นตอนการตัดแผ่นโฟมนั้นมีขนาดความหนามาตรฐานเดียว คือ 760 มิลลิเมตรแต่มีความต้องการความหนาหลายขนาดด้วยกันดังนั้นต้นทุนต่อหน่วยของแผ่น Blocks จึงคิดเป็น 1 ($Z/W = 1$) การหาวิธีการสร้างรูปแบบการตัดที่เหมาะสมมีขั้นตอนตามรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.3 วิธีการสร้างรูปแบบการตัดโฟมที่เหมาะสม



รูปที่ 4.4 มิติขนาด (Dimension) ของแผ่น Block

ตารางที่ 4.2 รายละเอียดสินค้าที่ถูกค้าต้องการ

ลำดับ	ขนาดความหนา ของสินค้า (mm)	จำนวนสินค้าที่ต้องการ (sheets)
1.	97	10,000
2.	85	8,000
3.	74	2,500
4.	50	750

ตารางที่ 4.3 รายละเอียดรูปแบบการตัดที่มีอยู่เดิม

ลำดับ	ขนาดความหนา ของสินค้า (mm)	รูปแบบที่ 1 <i>j</i> =1	รูปแบบที่ 2 <i>j</i> =2	รูปแบบที่ 3 <i>j</i> =3	รูปแบบที่ 4 <i>j</i> =4
1.	97 (<i>i</i> =1)	7			
2.	85 (<i>i</i> =2)		8		
3.	74 (<i>i</i> =3)			10	
4.	50 (<i>i</i> =4)	1	1		15
	เศษที่เหลือ	31	30	20	10

กำหนดค่าตัวแปรต่างๆ คือ

- x_1 = จำนวน Blocks ที่ใช้ตัดรูปแบบที่ 1
- x_2 = จำนวน Blocks ที่ใช้ตัดรูปแบบที่ 2

x_3	=	จำนวน Blocks ที่ใช้ตัดรูปแบบที่ 3
x_4	=	จำนวน Blocks ที่ใช้ตัดรูปแบบที่ 4
a_{11}	=	แผ่น Sheets ขนาด 97 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 1
a_{12}	=	แผ่น Sheets ขนาด 97 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 2
a_{13}	=	แผ่น Sheets ขนาด 97 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 3
a_{14}	=	แผ่น Sheets ขนาด 97 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 4
a_{21}	=	แผ่น Sheets ขนาด 85 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 1
a_{22}	=	แผ่น Sheets ขนาด 85 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 2
a_{23}	=	แผ่น Sheets ขนาด 85 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 3
a_{24}	=	แผ่น Sheets ขนาด 85 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 4
a_{31}	=	แผ่น Sheets ขนาด 74 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 1
a_{32}	=	แผ่น Sheets ขนาด 74 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 2
a_{33}	=	แผ่น Sheets ขนาด 74 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 3
a_{34}	=	แผ่น Sheets ขนาด 74 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 4
a_{41}	=	แผ่น Sheets ขนาด 50 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 1
a_{42}	=	แผ่น Sheets ขนาด 50 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 2
a_{43}	=	แผ่น Sheets ขนาด 50 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 3
a_{44}	=	แผ่น Sheets ขนาด 50 มิลลิเมตร จากรูปแบบการตัดที่ 4
D_1	=	ความต้องการแผ่น Sheets ที่ความหนา 97 มิลลิเมตร
D_2	=	ความต้องการแผ่น Sheets ที่ความหนา 85 มิลลิเมตร
D_3	=	ความต้องการแผ่น Sheets ที่ความหนา 74 มิลลิเมตร
D_4	=	ความต้องการแผ่น Sheets ที่ความหนา 65 มิลลิเมตร

จากข้อมูลข้างต้นสามารถเขียนลงรูปแบบการโปรแกรมเชิงเส้นรูปแบบเดิมที่ใช้อยู่เดือน ก.ค. 2553 ได้ดังนี้

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{array}{rcl}
 7x_1 & & \geq 10,000 \\
 & 8x_2 & \geq 8,000 \\
 & & 10x_3 \geq 2,500 \\
 x_1 + x_2 + & 15x_4 & \geq 750
 \end{array}$$

โดย

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

อธิบายได้ดังนี้ ผลรวมของความหนาที่ตัดได้ทั้งหมดมีรูปแบบการตัดตั้งต้น (Initial Pattern) 4 แบบ โดยกำหนดให้ x_i เป็นความหนาที่ตัดได้ในรูปแบบ j แต่ความเป็นจริงเราสามารถหา รูปแบบการตัดใหม่ (New Pattern) ได้อีกมากมาย โดยรูปแบบที่หาใหม่ได้จะเป็น $x_5, x_6, \dots, x_n$

แต่ต้องใช้เวลาในการค่อนข้างนานและมีความยุ่งยาก ดังนั้นเราจึงใช้เทคนิคการหารูปแบบการตัดใหม่ โดยใช้ปัญหาคู่ควบ หรือเรียกว่า Dual Prices จากสมการข้อจำกัด สามารถทำการผ่อนปรนเงื่อนไข และใช้ประโยชน์ความสัมพันธ์ของ สัมประสิทธิ์ต้นทุนที่ถูกลด (Reduced Cost Coefficients)

เมื่อกำหนดค่าจากสมการหลักแล้วจะได้ค่า Shadow Prices (Dual Prices) ที่เกิดขึ้นจากปัญหาหลัก นำค่า Shadow Prices นี้มาคำนวณด้วยวิธีการสร้างสมการ โดยใช้โปรแกรม Excel Spreadsheet เพื่อหาค่า a_i ในรูปแบบการตัดใหม่ในสมการ

$$Max \quad W = \sum_{i=1}^m \pi_i a_{n+1}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^m l_i a_{ij} \leq L$$

และ

$$a_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ โดยที่ } L \leq 760 \text{ มิลลิเมตร}$$

เมื่อได้ค่า a_{n+1} ในรูปแบบการตัดใหม่แล้วจะถูกเพิ่มเข้าไปในปัญหาหลักตามตารางที่ 4.4 ตารางที่ 4.4 รายละเอียดรูปแบบการตัดใหม่ที่เพิ่มขึ้นมา

ลำดับ	ขนาดความหนา ของสินค้า (mm)	รูปแบบที่ 1 $j=1$	รูปแบบที่ 2 $j=2$	รูปแบบที่ 3 $j=3$	รูปแบบที่ 4 $j=4$	รูปแบบที่ 5 $j=5$
1.	97 ($i=1$)	7				6
2.	85 ($i=2$)		8			2
3.	74 ($i=3$)			10		
4.	50 ($i=4$)	1	1		15	
	เศษที่เหลือ	31	30	20	10	8

จากนั้นทำการคำนวณใหม่และทำซ้ำจนกระทั่งได้เพิ่มรูปแบบการตัดใหม่ได้เรื่อยๆ จนไม่สามารถลดค่าของสมการเป้าหมายหรือจนกระทั่งค่า $Z \approx W$ จึงหยุดการคำนวณซึ่งหมายความว่าได้รูปแบบการตัดที่ใกล้เคียงคำตอบที่ดีที่สุดแล้วนั่นเอง

ตารางที่ 4.5 ผลลัพธ์การทดสอบสมการทางคณิตศาสตร์ตัวอย่างเดือน ก.ค. 2553

ลำดับ	ขนาด (มิลลิเมตร)	ปริมาณการใช้วัตถุดิบ	
		แบบเดิม	แบบใหม่
1	90	1,429	1,667
2	85	1,000	584
3	74	278	192
4	50	54	50
รวมจำนวน (Blocks)		2,761	2,492
ราคาวัตถุดิบ (บาท)		4,000	4,000
รวมจำนวนเงิน		11,044,000	9,968,000
เปรียบเทียบแบบเดิมลบด้วยแบบใหม่			1,076,000