

บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาวิจัยเรื่องผลสัมฤทธิ์ของการประยุกต์การสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารหลักการ ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง มีรายละเอียดดังนี้

2.1 หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6)

2.1.1 แนวการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

2.1.2 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-6)

2.2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2.1 ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์

2.2.2 ลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์

2.2.3 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2.4 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2.5 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2.6 แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2.7 ทักษะและความสามารถที่จำเป็นในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.3 การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.3.1 ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.3.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.3.3 ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ

2.3.4 กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.3.5 กลวิธีแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.4 การสอนแก้ปัญหาโดยใช้กลวิธี STAR

2.4.1 ความเป็นมาของการสอนแก้ปัญหาโดยใช้กลวิธี STAR

2.4.2 แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการสอนแก้ปัญหาโดยใช้กลวิธี STAR

2.4.3 ขั้นตอนการสอนแก้ปัญหาโดยใช้กลวิธี STAR ในการเรียนการสอน

2.5 การประเมินผลความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.6 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

2.6.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

2.6.2 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

2.6.3 องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

2.7 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.7.1 งานวิจัยในประเทศ

2.7.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

2.1 หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6)

2.1.1 แนวการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ [5]

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้กล่าวไว้ว่า คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์วางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคนดังนี้

1. จำนวนและการดำเนินการ: ความคิดรวบยอดและความรู้สึกเชิงจำนวน ระบบจำนวนจริงสมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริง การดำเนินการของจำนวน อัตราส่วน ร้อยละ การแก้ปัญหเกี่ยวกับจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง
2. การวัด: ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุเงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติการแก้ปัญหเกี่ยวกับกรวัด และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ
3. เรขาคณิต: รูปเรขาคณิตและสมบัติของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติสองมิติและสามมิติการนี้กภาพแบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิต (Geometric Transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation)
4. พีชคณิต: แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ฟังก์ชัน เซตและการดำเนินการของเซต การให้เหตุผลนิพจน์สมการ ระบบสมการ อสมการ กราฟ ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต อนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น: การกำหนดประเด็น การเขียนข้อคำถาม การกำหนดวิธีการศึกษา การเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดระบบข้อมูล การนำเสนอข้อมูล ค่ากลางและการกระจายของข้อมูล การวิเคราะห์และการแปลความข้อมูล การสำรวจความคิดเห็น ความน่าจะเป็นการใช้ความรู้

เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่าง ๆ และช่วยในการตัดสินใจในการดำเนินชีวิตประจำวัน

6. ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และสามารถใช้อการดำเนินการในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำเสนอเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 2 การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric model) ในการแก้ปัญหา

สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical model) อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล

มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

หมายเหตุ

1. การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีคุณภาพนั้นจะต้องให้มีความสมดุลระหว่างสาระด้านความรู้ ทักษะและกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่พึงประสงค์ ได้แก่ การทำงานอย่างมีระบบมีระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความเชื่อมั่นในตนเอง พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์
2. ในการวัดและประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการ สามารถประเมินในระหว่างการเรียนการสอน หรือประเมินไปพร้อมกับการประเมินด้านความรู้

คุณภาพผู้เรียน

จบชั้นประถมศึกษาปีที่ 3

1. มีความรู้ความเข้าใจและความรู้ลึกซึ้งจำนวนเกี่ยวกับจำนวนนับไม่เกินหนึ่งแสนและศูนย์และการดำเนินการของจำนวน สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหาร พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้
2. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความยาว ระยะทาง น้ำหนัก ปริมาตร ความจุ เวลาและเงินสามารถวัดได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
3. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปวงกลม รูปวงรี ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากทรงกลม ทรงกระบอก รวมทั้ง จุด ส่วนของเส้นตรง รังสี เส้นตรง และมุม
4. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูป และอธิบายความสัมพันธ์ได้
5. รวบรวมข้อมูล และจำแนกข้อมูลเกี่ยวกับตนเองและสิ่งแวดล้อมใกล้ตัวที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน และอภิปรายประเด็นต่าง ๆ จากแผนภูมิรูปภาพและแผนภูมิแท่งได้
6. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้อง เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์



จบชั้นประถมศึกษาปีที่ 6

1. มีความรู้ความเข้าใจและความรู้ลึกเชิงจำนวนเกี่ยวกับจำนวนนับและศูนย์ เศษส่วนทศนิยมไม่เกินสามตำแหน่ง ร้อยละ การดำเนินการของจำนวน สมบัติเกี่ยวกับจำนวน สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนนับ เศษส่วน ทศนิยมไม่เกินสามตำแหน่ง และร้อยละ พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ สามารถหาค่าประมาณของจำนวนนับและทศนิยมไม่เกินสามตำแหน่งได้
2. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตร ความจุ เวลา เงิน ทิศ แขนง และขนาดของมุม สามารถวัดได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
3. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะและสมบัติของรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปวงกลม ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทรงกระบอก กรวย ปริซึม พีระมิด มุม และเส้นขนาน
4. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูปและอธิบายความสัมพันธ์ได้ แก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป สามารถวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหาพร้อมทั้งเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นที่มีตัวไม่ทราบค่าหนึ่งตัวและแก้สมการนั้นได้
5. รวบรวมข้อมูล อภิปรายประเด็นต่าง ๆ จากแผนภูมิรูปภาพ แผนภูมิแท่ง แผนภูมิแท่งเปรียบเทียบ แผนภูมิรูปวงกลม กราฟเส้น และตาราง และนำเสนอข้อมูลในรูปของแผนภูมิรูปภาพแผนภูมิแท่ง แผนภูมิแท่งเปรียบเทียบ และกราฟเส้น ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นเบื้องต้นในการคาดคะเนการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้
6. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริง มีความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ เลขยกกำลัง ที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง สามารถดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม เลขยกกำลัง รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง ใช้การประมาณค่าในการดำเนินการและแก้ปัญหา และนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนไปใช้ในชีวิตจริงได้
2. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของปริซึม ทรงกระบอก และปริมาตรของปริซึมทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลม เลือกใช้หน่วยการวัดในระบบต่าง ๆ เกี่ยวกับความยาว พื้นที่และปริมาตร ได้อย่างเหมาะสม พร้อมทั้งสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในชีวิตจริงได้

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
ห้องสมุดงานวิจัย
วันที่ 25 ก.ค. 2555
เลขทะเบียน 217166
เลขเรียกหนังสือ

3. สามารถสร้างและอธิบายขั้นตอนการสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติโดยใช้วงเวียนและสันตรง อธิบายลักษณะและสมบัติของรูปเรขาคณิตสามมิติซึ่งได้แก่ ปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้
4. มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้มีความเข้าใจเกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิต (Geometric Transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) การหมุน (Rotation) และการนำไปใช้ได้
5. สามารถนิยามและอธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ
6. สามารถวิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูป สถานการณ์หรือปัญหา และสามารถใช้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและกราฟในการแก้ปัญหาได้
7. สามารถกำหนดประเด็น เขียนข้อคำถามเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ กำหนดวิธีการศึกษา เก็บรวบรวมข้อมูลและนำเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิรูปวงกลม หรือรูปแบบอื่นที่เหมาะสมได้
8. เข้าใจค่ากลางของข้อมูลในเรื่องค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัชฐาน และฐานนิยมของข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ และเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม รวมทั้งใช้ความรู้ในการพิจารณาข้อมูลข่าวสารทางสถิติ
9. เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์และประกอบการตัดสินใจในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
10. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระบบจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง จำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ หาค่าประมาณของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังโดยใช้วิธีการคำนวณที่เหมาะสม และสามารถนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ได้
2. นำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้คาดคะเนระยะทาง ความสูง และแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด ได้มีความคิดรวบยอดในเรื่องเซต การดำเนินการของเซต และใช้ความรู้เกี่ยวกับแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์แสดงเซตไปใช้แก้ปัญหา และตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล

3. เข้าใจและสามารถใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้
4. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สามารถใช้ความสัมพันธ์และฟังก์ชันแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
5. เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต และสามารถหาพจน์ทั่วไปได้เข้าใจความหมายของผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต และหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตรและนำไปใช้ได้
6. รู้และเข้าใจการแก้สมการ และอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสอง รวมทั้งใช้กราฟของสมการ อสมการ หรือฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
7. เข้าใจวิธีการสำรวจความคิดเห็นอย่างง่าย เลือกใช้ค่ากลางได้เหมาะสมกับข้อมูลและวัตถุประสงค์ สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ของข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และนำผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลไปช่วยในการตัดสินใจ
8. เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ ประกอบการตัดสินใจ และแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
9. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผล ได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2.1.2 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-6)

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

1. จำนวนจริง ตัวชี้วัด คือ แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ในระบบจำนวนจริง
2. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง ตัวชี้วัด คือ มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง
3. จำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ตัวชี้วัด คือ มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหา

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนจริง และ การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ตัวชี้วัด คือ เข้าใจความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนจริง จำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

ค่าประมาณของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง ตัวชี้วัด คือ หา ค่าประมาณของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง โดยใช้วิธีการคำนวณที่เหมาะสม

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำเสนอบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

สมบัติของจำนวนจริง และการนำไปใช้ ตัวชี้วัด คือ เข้าใจสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก การคูณ การเท่ากัน การไม่เท่ากันและนำไปใช้ได้

สาระที่ 2 การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้ ตัวชี้วัด คือ ใช้ความรู้เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม ในการคาดคะเนระยะทางและความสูง

มาตรฐาน ค 2.2 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง และความสูง ตัวชี้วัด คือ แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูง โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

สาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial Reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric Model) ในการแก้ปัญหา

สาระที่ 4 พิชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

1. เขตและการดำเนินการของเซต ตัวชี้วัด คือ มีความคิดรวบยอดในเรื่องเซตและการดำเนินการของเซต
2. การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย ตัวชี้วัด คือ เข้าใจและสามารถใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย
3. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และ กราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ตัวชี้วัด คือ มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแสดงความสัมพันธ์และ ฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ เช่น ตาราง กราฟ และสมการ
4. ลำดับและการหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด ตัวชี้วัด คือ เข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด
5. ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต ตัวชี้วัด คือ เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับ เรขาคณิต และนำไปใช้

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)

อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

1. แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ตัวชี้วัด คือ เขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์แสดงเซตและนำไปใช้แก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล ตัวชี้วัด คือ ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผลโดยใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์
3. สมการและอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสอง ตัวชี้วัด คือ แก้สมการและอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสอง
4. ความสัมพันธ์หรือฟังก์ชัน ตัวชี้วัด คือ สร้างความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันจากสถานการณ์ หรือปัญหา และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
5. กราฟของสมการ อสมการ ฟังก์ชันและการนำไปใช้ ตัวชี้วัด คือ ใช้กราฟของสมการ อสมการ ฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
6. อนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต ตัวชี้วัด คือ เข้าใจความหมายของผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตรและนำไปใช้

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

1. การสำรวจความคิดเห็น ตัวชี้วัด คือ เข้าใจวิธีการสำรวจความคิดเห็นอย่างง่าย
2. ค่ากลางของข้อมูล การวัดการกระจายของข้อมูล และการหาตำแหน่งที่ของข้อมูล ตัวชี้วัด คือ หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยมส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ของข้อมูล และเลือกใช้ค่ากลางที่เหมาะสมกับข้อมูลและวัตถุประสงค์

มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

1. การสำรวจความคิดเห็น ตัวชี้วัด คือ นำผลที่ได้จากการสำรวจความคิดเห็นไปใช้คาดการณ์ในสถานการณ์ที่กำหนดให้
2. กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ การทดลองสุ่ม แซมเปิลสเปซ เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ตัวชี้วัด คืออธิบายการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ และนำผลที่ได้ไปใช้คาดการณ์ในสถานการณ์ที่กำหนดให้

มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

1. สถิติและข้อมูล ตัวชี้วัด คือ ใช้ข้อมูลข่าวสารและค่าสถิติช่วยในการตัดสินใจ
2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ตัวชี้วัด คือ ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

1. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา
2. ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม
3. ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

4. ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน
5. เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ
7. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จากสาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4-6) ดังกล่าวข้างต้น จะเห็นว่าทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถที่จะนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งความรู้ และประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในที่นี้ เน้นที่ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและต้องการพัฒนาให้เกิดขึ้นกับผู้เรียน ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการให้เหตุผล ความสามารถในการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ และการมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ผู้สอนต้องสอดแทรกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้ากับการเรียนการสอนด้านเนื้อหา ด้วยการให้นักเรียนทำกิจกรรม หรือตั้งคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิด อธิบาย และให้เหตุผล เช่น ให้นักเรียนแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้ที่เรียนมาแล้วหรือให้นักเรียนเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหา ให้นักเรียนใช้ความรู้ทางพีชคณิตในการแก้ปัญหาหรืออธิบายเหตุผลทางเรขาคณิต ให้นักเรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการอธิบายเกี่ยวกับสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน หรือกระตุ้นให้นักเรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการสร้างสรรค์ผลงานที่หลากหลายและแตกต่างจากคนอื่น รวมทั้งการแก้ปัญหาที่แตกต่างจากคนอื่นด้วยการประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์สามารถประเมินได้จากกิจกรรมที่นักเรียนทำ จากแบบฝึกหัด จากการเขียนอนุทิน หรือข้อสอบที่เป็นคำถามปลายเปิดที่ให้โอกาสนักเรียนแสดงความสามารถ

ผู้วิจัยจึงเห็นความสำคัญการจัดการเรียนการสอนเรื่องความน่าจะเป็น โดยให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ตามสาระดังนี้ สาระที่ 5: การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น มาตรฐานที่ ค 5.2 และสาระที่ 6: ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ มาตรฐานที่ ค 6.1 กล่าวโดยสรุปคือ กลยุทธ์การเรียนการสอนนี้จะต้องทำให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ และสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้ อีกทั้งกิจกรรมการเรียนการสอนต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาสามารถให้เหตุผล และสื่อความหมายให้ผู้อื่นเข้าใจได้อย่างสร้างสรรค์

2.2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2.1 ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

Cruickshank และ Sheffield [14] กล่าวว่า ปัญหาเป็นคำถามหรือจากการศึกษาค้นคว้าปัญหาควรจะเป็นคำถามหรือสถานการณ์ที่ไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที หรือวิธีหาคำตอบโดยทันที ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ไม่ได้หมายความว่าเกี่ยวข้องกับจำนวนเท่านั้นแต่ปัญหาคณิตศาสตร์บางปัญหาอาจเกี่ยวกับสมบัติทางกายภาพหรือการไหลเหตุผลทางตรรกศาสตร์ โดยไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนก็ได้

ปรีชา เนาวเย็นผล [15] ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าเป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณหรือจำนวนหรือคำอธิบายเหตุผล ผู้แก้ปัญหาไม่คุ้นเคยมาก่อน ไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใดต้องใช้เวลา ความรู้ และประสบการณ์หลาย ๆ อย่างประมวลเข้าด้วยกันจึงหาคำตอบได้ และ สถานการณ์ใดจะเป็นปัญหาหรือไม่ขึ้นอยู่กับบุคคล ผู้แก้ปัญหาและเวลา สถานการณ์หนึ่งอาจเป็นปัญหาสำหรับบุคคลหนึ่งแต่อาจไม่ใช่ปัญหาสำหรับอีกบุคคลหนึ่งก็ได้ และสถานการณ์ที่เคยเป็นปัญหาสำหรับบุคคลหนึ่งในอดีตอาจไม่เป็นปัญหาสำหรับบุคคลนั้นแล้วในปัจจุบัน

สมเดช บุญประจักษ์ [16] ได้กล่าวว่า ปัญหา หมายถึงสถานการณ์ที่บุคคล หรือกลุ่มบุคคลเผชิญและต้องการคำตอบ ซึ่งยังไม่รู้วิธีการที่จะได้คำตอบของปัญหาในทันที ต้องใช้ความรู้และวิธีการต่าง ๆ ที่มีอยู่มาผสมผสานเป็นแนวทางหรือวิธีใหม่เพื่อใช้ในการหาคำตอบของปัญหาและได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ สถานการณ์ปัญหาที่ต้องใช้ความรู้ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ

สำหรับงานวิจัยนี้ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง คำถามหรือสถานการณ์ที่ต้องการคำตอบ โดยที่ผู้ตอบไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที แต่ต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ และทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มาประมวลเข้าด้วยกัน เพื่อกำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบนั้น ๆ ซึ่งเป็นสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

2.2.2 ลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์

นักคณิตศาสตร์ได้กล่าวถึงลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ดังต่อไปนี้

1. พิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหา สามารถแบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้เป็น 2 ประเภท

- ปัญหาให้ค้นคว้า เป็นปัญหาให้ค้นคว้าหาคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณ หรือให้หาวิธีการ และคำอธิบายในการหาเหตุผล

- ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาที่ต้องการให้แสดงการให้เหตุผลว่า ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง หรือข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ

2. พิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหา และความซับซ้อนของปัญหา สามารถแบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ เป็น 2 ประเภท คือ

- ปัญหาธรรมดา (Routine Problems) เป็นปัญหาที่ต้องการให้ประยุกต์ใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ มักเป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนนัก ผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีแก้ปัญหา เมื่อพบปัญหาสามารถแก้ปัญหาได้ในทันที

- ปัญหาแปลกใหม่ (Nonroutine Problems) เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน และผู้แก้ปัญหามิคุ้นเคยกับปัญหานั้น ผู้แก้ปัญหามust ประมวลความรู้ ความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน จึงจะแก้ปัญหาได้

3. พิจารณาตามลักษณะของปัญหา Bitter และคณะ [17] ได้แบ่งปัญหาประเภทนี้ออกเป็น 3 ลักษณะ คือ

- ปัญหาปลายเปิด (Open - Ended) เป็นปัญหาที่มีคำตอบที่เป็นไปได้หลายคำตอบ ขึ้นอยู่กับสถานะแวดล้อม และวิธีการแก้ปัญหา ปัญหาลักษณะนี้จะให้ความสำคัญของกระบวนการแก้ปัญหา เป็นสิ่งสำคัญมากกว่าคำตอบ

- ปัญหาให้ค้นพบ (Discovery) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหามust ดำเนินการตามสถานการณ์ที่กำหนด สืบค้นไปจนกระทั่งได้คำตอบ ในขั้นตอนสุดท้ายของการแก้ปัญหา มักเป็นปัญหาที่มีวิธีแก้ได้หลากหลายวิธี

- ปัญหาที่กำหนดแนวทางในการค้นพบ (Guided Discovery) เป็นปัญหาที่มีรายละเอียดของปัญหา เช่น มีคำชี้แนะ (Clues) และคำชี้แจงในการแก้ปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหามust ดำเนินการแก้ปัญหาตามคำชี้แนะได้เลยโดยไม่ต้องกังวลในการหาคำตอบ

4. พิจารณาตามเป้าหมายของการฝึก Charles และ Lester [18] ได้พิจารณาจำแนกประเภทของปัญหาตามเป้าหมายของการฝึกแก้ปัญหา ดังนี้

- ปัญหาที่ใช้ฝึก (Drill Exercise) เป็นปัญหาที่ใช้ฝึกขั้นตอนวิธีและการคำนวณเบื้องต้น

- ปัญหาข้อความอย่างง่าย (Simple Translation Problem) เป็นปัญหาข้อความที่เคยพบมาก่อน เช่น ปัญหาในหนังสือเรียน ต้องการฝึกให้คุ้นเคยกับการเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์

ทางคณิตศาสตร์ มักเป็นปัญหาขั้นตอนเดียวที่มุ่งให้เกิดความเข้าใจ โนคติทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาความสามารถในการคิดคำนวณ

- ปัญหาข้อความที่ซับซ้อน (Complex Translation Problem) คล้ายกับปัญหาอย่างง่าย แต่เพิ่มเป็นปัญหาที่มี 2 ขั้นตอน หรือมากกว่า 2 การดำเนินการ

- ปัญหาที่เป็นกระบวนการ (Process Problem) เป็นปัญหาที่ไม่เคยพบมาก่อน ไม่สามารถเปลี่ยนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ได้ทันที จะต้องจัดปัญหาให้ง่ายขึ้น หรือแบ่งเป็นขั้นตอนย่อย ๆ แล้วหารูปแบบทั่วไปของปัญหา ซึ่งนำไปสู่การคิดและการแก้ปัญหา เน้นการพัฒนายุทธวิธีต่าง ๆ เพื่อให้เกิดความเข้าใจ มีการวางแผนแก้ปัญหาและประเมินผลคำตอบ

- ปัญหาการประยุกต์ (Applied Problem) เป็นปัญหาที่ต้องใช้ทักษะความรู้ มโนคติ และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ การได้มาซึ่งคำตอบต้องอาศัยวิธีทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญ เช่น การรวบรวม การแทนข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ จักรระบบ ประมวลผล และแปลผลเพื่อตัดสินใจเกี่ยวกับข้อมูลนั้น ๆ ปัญหาการประยุกต์เป็นปัญหาที่เปิดโอกาสให้ผู้แก้ปัญหาได้ใช้ทักษะกระบวนการ มโนคติ และข้อเท็จจริงในการแก้ปัญหา โดยเฉพาะปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งจะทำให้ผู้แก้ปัญหาเห็นประโยชน์และเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์

- ปัญหาปริศนา (Puzzle Problem) เป็นปัญหาที่บางครั้งได้คำตอบจากการเดาสุ่ม ไม่จำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา บางครั้งต้องใช้เทคนิคเฉพาะ เป็นปัญหาที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ความคิดสร้างสรรค์ มีความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหา และเป็นปัญหาที่มองได้หลายแง่มุม ปัญหาปริศนามักเป็นปัญหาลับสมอง ปัญหาท้าทาย ผู้ที่มีทักษะในการแก้ปัญหาก็จะแก้ปัญหาลักษณะนี้ได้ดี

สำหรับการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ผู้วิจัยได้เลือกใช้ปัญหาทั้งสองลักษณะ โดยเลือกใช้ปัญหาธรรมดาเพื่อสอนกระบวนการแก้ปัญหาในเบื้องต้น และใช้ปัญหาไม่ธรรมดาให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ และเลือกยุทธวิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม และได้คำตอบที่สมเหตุสมผล

2.2.3 ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

Good [19] กล่าวว่า การแก้ปัญหาคือวิธีการทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหาที่มีระเบียบแบบแผน กล่าวคือ มีการรวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหา มีการตั้งสมมติฐาน มีการตรวจสอบสมมติฐาน

Adam และคณะ [20] กล่าวถึงการแก้ปัญหาว่าเป็นกระบวนการที่ซับซ้อนทางสมองซึ่งนำไปสู่การจินตนาการ การคิดเป็นนามธรรม และการเชื่อมโยงความคิดต่าง ๆ ที่สำคัญคือต้องมีการพัฒนารูปแบบ เพราะรูปแบบของการแก้ปัญหาที่เคยใช้กับปัญหาหนึ่งสำเร็จ อาจใช้ไม่ได้กับปัญหาอื่น ดังนั้นการพัฒนารูปแบบการคิดไปสู่อารมณ์แบบการคิดที่ยากขึ้นจึงมีความจำเป็น

ปรีชา เนาว์เย็นผล [15] กล่าวว่า ทักษะการแก้ปัญหาเป็นองค์ประกอบหนึ่งของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งทักษะเกิดจากการฝึกฝนทำบ่อย ๆ จนเกิดความชำนาญ เมื่อนักเรียนได้ฝึกคิดแก้ปัญหาอยู่เสมอ นักเรียนจะมีโอกาสได้พบปัญหาต่าง ๆ หลายรูปแบบซึ่งอาจจะมีโครงสร้างของปัญหาที่คล้ายคลึงกันหรือแตกต่างกัน นักเรียนได้มีประสบการณ์ในการเลือกใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ เพื่อนำไปใช้ได้อย่างเหมาะสมกับปัญหา เมื่อเผชิญกับปัญหาใหม่ก็จะสามารถนำประสบการณ์เดิมมาเทียบเคียง พิจารณาว่าปัญหาใหม่ให้โครงสร้างคล้ายกับปัญหาที่คุ้นเคยหรือไม่ สามารถแยกปัญหาใหม่ออกเป็นปัญหาย่อย ๆ ที่มีโครงสร้างคล้ายคลึงกับปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว สามารถใช้ยุทธวิธีใดในการแก้ปัญหาใหม่นี้ได้บ้าง นักเรียนที่มีทักษะในการแก้ปัญหาก็จะสามารถวางแผนเพื่อกำหนดยุทธวิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็ว และเหมาะสม

ยุพิน พิพิธกุล [1] กล่าวว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการหาวิธีเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้แก้ปัญหาก็ต้องใช้ความรู้ ความคิด ประสบการณ์เดิมประมวลเข้ากับสถานการณ์ใหม่ที่กำหนดในปัญหา การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่ประยุกต์ความรู้ที่ได้รับมาตอนแรก หรือความรู้เดิมกับสถานการณ์ใหม่ที่ยังไม่คุ้นเคย จะต้องเป็นเรื่องยาก ต้องใช้หลาย ๆ มโนคติ (Concepts) หรือหลายทฤษฎี หลายสูตรมาผสมผสาน จึงจะแก้ปัญหาก็ได้ เรื่องใดทำได้โดยวิธีง่าย ๆ ไม่เรียกว่าเป็นการแก้ปัญหา

สมวงษ์ แปลงประสพโชค และคณะ [21] ได้กล่าวถึงทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่าเหตุผลหลักของการศึกษาคณิตศาสตร์ก็เพื่อนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่พบ นักเรียนต้องสามารถประยุกต์รูปแบบการคิดอย่างสมเหตุสมผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สามารถอธิบายข้อมูลและสรุปผลจากข้อมูลที่ปรากฏ ในชีวิตจริงนักเรียนต้องพบกับปัญหาหลากหลายรูปแบบ ปัญหาข้อความหรือปัญหาเรื่องราวเป็นเพียงรูปแบบหนึ่งของการแก้ปัญหา

จิราพร กุลฉันทวิทย์ [8] ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึงความสามารถในการหาคำตอบของปัญหา ซึ่งต้องอาศัยกระบวนการแก้ปัญหา กลยุทธ์หรือยุทธวิธีในการแก้ปัญหา และความสามารถในการแก้ปัญหา โดยยึดกระบวนการแก้ปัญหามาของ Polya [22] ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้น ได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

และขั้นตรวจสอบ และใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาอย่างเหมาะสมและรวดเร็ว แล้วทดสอบวิธีการแก้ปัญหาเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป กฎเกณฑ์ต่าง ๆ

จากความหมายและความสำคัญการแก้ปัญหาที่นักการศึกษาหลายท่าน ได้กล่าวไวข้างต้นสรุปได้ว่าการแก้ปัญหา เป็นกระบวนการที่จะได้มาซึ่งคำตอบ โดยที่ผู้แก้ปัญหามองจะต้องประยุกต์ใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีอยู่ พร้อมทั้งใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหามาช่วยในการหาคำตอบหรือแก้ปัญหานั้น ๆ ซึ่งความสามารถในการหาคำตอบของปัญหาคืออาศัยกระบวนการแก้ปัญหา กลยุทธ์ หรือยุทธวิธีในการแก้ปัญหาดัง ๆ มาผสมผสานกันในการแก้ปัญหานั้น ๆ

2.2.4 กระบวนการแก้ปัญหา (Problem Solving Process)

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้ให้ความสำคัญของการแก้ปัญหา โดยกำหนดให้การแก้ปัญหาเป็นทักษะที่สำคัญ และจำเป็นอันดับแรก ของทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้ เพราะการแก้ปัญหามathematicsช่วยให้นักเรียนพัฒนาศักยภาพในการวิเคราะห์ ช่วยกระตุ้นการเรียนรู้และการสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์แก่ผู้เรียน นอกจากนี้การแก้ปัญหายังช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ข้อเท็จจริง ทักษะ มโนคติ หลักการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ความสำเร็จในการแก้ปัญหามักก่อให้เกิดการพัฒนาคุณลักษณะที่ต้องการแก่ผู้เรียน เช่น ความใฝ่รู้ ความอยากรู้อยากเห็น [5]

กระบวนการแก้ปัญหาคือเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป คือ กระบวนการแก้ปัญหาของ โพลยา (Polya) [22] ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

เป็นการสำรวจว่าในปัญหามีคำหรือวลี หรือประโยคย่อย ๆ อะไรบ้าง มีความหมายอย่างไร แล้วจำแนกเป็นส่วน ๆ ว่า โจทย์กำหนดอะไรให้ อะไรคือสิ่งที่ต้องการหา อะไรคือข้อมูลที่กำหนด มีเงื่อนไขอย่างไรบ้าง

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

เป็นขั้นการวิเคราะห์รายละเอียดและหาความเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลที่กำหนดกับสิ่งที่ไม่รู้ โดยใช้บทนิยาม สมบัติและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้ศึกษาจากก่อนหน้านี การพิจารณาอาจใช้วิธีการต่าง ๆ เพื่อช่วยให้ได้ข้อสรุปที่สามารถดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบได้ เช่น การวาดรูปประกอบ การสร้างตารางวิเคราะห์ การแยกสถานการณ์หรือเงื่อนไขเป็นส่วนย่อย ๆ หรืออื่น ๆ

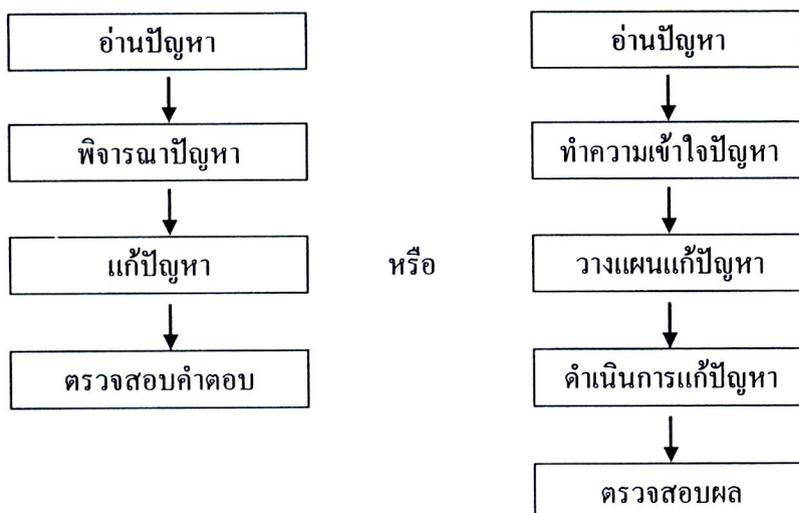
ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

เป็นขั้นของการปฏิบัติการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้ และมีการตรวจสอบแต่ละขั้นตอนที่ปฏิบัติว่า ถูกต้องหรือไม่

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบผล

เป็นการตรวจสอบผลที่ได้ในแต่ละขั้นตอนว่าถูกต้องหรือไม่ หรืออาจตรวจสอบโดยวิธีการแก้ปัญหาวิธีอื่น ๆ แล้วตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้ว่าตรงกันหรือไม่ หรืออาจใช้การประมาณคำตอบอย่างคร่าว ๆ ในขั้นตอนตรวจสอบ นอกจากจะเป็นการตรวจสอบผลที่ได้ว่าถูกต้อง เหมาะสมแล้ว อาจปรับเปลี่ยนเงื่อนไขบางประการแล้วหาข้อสรุปและสรุปผลการแก้ปัญหาในรูปทั่วไป

ขั้นตอนการแก้ปัญหของโพลยาทั้ง 4 ขั้นตอนคือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา และขั้นตรวจสอบผลคนส่วนใหญ่มักจะมองว่าเป็นขั้นตอนที่เรียงลำดับเป็นแนวเส้นตรง ดังแผนภาพที่ 2.1

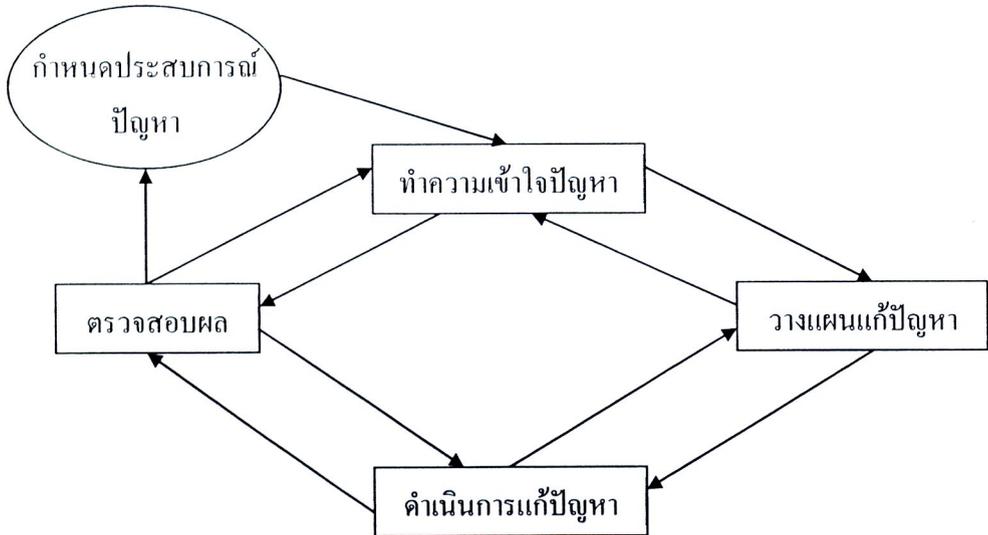


รูปที่ 2.1 ขั้นตอนการแก้ปัญหของโพลยา

รูปแบบดังกล่าวมักเข้าใจกันว่ากระบวนการแก้ปัญหของโพลยาเป็นชุดของขั้นตอนการแก้ปัญหา ซึ่งต้องดำเนินการไปที่ละขั้นตอนตามลำดับ เพื่อให้ได้คำตอบ ซึ่งแนวทางเช่นนี้จะทำให้เข้าใจว่า

- 1) การแก้ปัญหเป็นกระบวนการในแนวตรงเสมอ
- 2) การแก้ปัญหเป็นชุดของขั้นตอนที่ต้องทำทีละขั้น ห้ามข้ามขั้น
- 3) การแก้ปัญหเป็นกระบวนการที่ต้องจำ ต้องฝึก และทำซ้ำ ๆ
- 4) เป็นกระบวนการที่เน้นการได้คำตอบ

Wilson [45] อ้างใน สมเดช บุญประจักษ์ [23] ได้ปรับปรุงกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา โดยเสนอเป็นกรอบแนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่แสดงความเป็นพลวัต (Dynamic) ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 การแก้ปัญหาที่แสดงความเป็นพลวัต (Dynamic)

ลูกศรเป็นการแสดงการพิจารณาตัดสินใจที่เป็นการเคลื่อนการกระทำจากขั้นตอนหนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่ง หรืออาจจะพิจารณาย้อนกลับไปขั้นตอนเดิมหากมีปัญหาหรือข้อสงสัย เช่น เมื่อนักเรียนทำการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรก คือ ทำความเข้าใจปัญหา แล้วเคลื่อนไปสู่ขั้นการวางแผน ระหว่างการดำเนินการนั้น นักเรียนอาจค้นพบสิ่งที่ทำให้เข้าใจปัญหาได้ดียิ่งขึ้น หรือในขณะที่นักเรียนดำเนินการตามแผนที่วางไว้แต่ไม่สามารถดำเนินการต่อไปได้ นักเรียนอาจย้อนกลับไปเริ่มวางแผนใหม่ หรือทำความเข้าใจปัญหาใหม่ ซึ่งการดำเนินการดังกล่าวเป็นการดำเนินการที่เป็นไปได้ในการแก้ปัญหา โดยไม่ต้องเริ่มต้นใหม่ในขั้นทำความเข้าใจปัญหาเสมอไป

Krulik และ Rudnick [24] กล่าวถึงลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่ามีลำดับขั้นตอนแบ่งเป็น 5 ขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นการอ่านและคิด (Read and Think) เป็นขั้นที่นักเรียนได้อ่านข้อปัญหาตีความจากภาษาสร้างความสัมพันธ์ และระลึกถึงสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกัน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วปัญหาจะประกอบด้วยข้อเท็จจริงและคำถามอยู่รวมกันอาจทำให้เกิดการไขว่เขวในขั้นนี้ นักเรียนจะต้องแยกแยะข้อเท็จจริงและคำถาม มองเห็นภาพของเหตุการณ์ บอกสิ่งที่กำหนดและสิ่งที่ต้องการ และกล่าวถึงปัญหาในภาษาของตนเองได้

ขั้นที่ 2 ขั้นสำรวจและวางแผน (Explore and Plan) ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาก็จะวิเคราะห์และข้อมูลที่มีอยู่ในปัญหา รวบรวมข้อมูล พิจารณาว่าข้อมูลที่มีอยู่เพียงพอหรือไม่ เชื่อมโยงข้อมูลเข้ากับความรู้เดิม เพื่อหาคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ แล้ววางแผนเพื่อแก้ปัญหา โดยนำเอาข้อมูลที่มีอยู่มาสร้างเป็นแผนภาพ หรือรูปแบบต่าง ๆ เช่น แผนผัง ตาราง กราฟ หรือวาดภาพประกอบ

ขั้นที่ 3 ขั้นการเลือกวิธีการแก้ปัญหา (Select a Strategy) ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาก็ต้องเลือกที่เหมาะสมที่สุด แต่ละบุคคลจะเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันไป และในการแก้ปัญหานี้ปัญหาอาจจะมีการนำเอาหลาย ๆ วิธีการแก้ปัญหามาประยุกต์เพื่อแก้ปัญหานั้นก็ได้ ซึ่งวิธีการแก้ปัญหานั้น ได้แก่ การค้นหาแบบรูป (Pattern Recognition) การทำย้อนกลับ (Backwards) การคาดเดาและตรวจสอบ (Guess and Test) การแสดงบทบาทสมมติหรือการทดลอง (Simulation or Experimentation) การสรุป รวบรวม หรือการขยายความการแจกแจงรายการกรณีอย่างเป็นระบบ (Organized Listing / Exhaustive Listing) ตรรกศาสตร์ (Logical Deduction)

ขั้นที่ 4 การค้นหาคำตอบ (Find an Answer) เมื่อเขาใจปัญหาและเลือกวิธีการในการแก้ปัญหาได้แล้ว นักเรียนควรประมาณคำตอบที่เป็นไปได้ ในขั้นนี้นักเรียนควรลงมือปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ให้โดมาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง ซึ่งจะต้ออาศัย การประมาณค่า การใช้ทักษะการคิดคำนวณ การใช้ทักษะทางพีชคณิต และการใช้ทักษะทางเรขาคณิต

ขั้นที่ 5 การมอ้ยอนและขยายผล (Reflect and Extend) ถ้าคำตอบที่ได้ไม่ใช่ผลที่ต้องการก็ต้อย้อนกลับไปยังกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหาเพื่อหาวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบที่ถูกต้องใหม่และนำเอาวิธีการที่โดมาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์อื่นต่อไปในขั้นตอนนี้ประกอบด้วย การตรวจสอบคำตอบ การค้นพบทางเลือกที่นำไปสู่ผลลัพธ์ การมอ้ย

จากขั้นตอนที่ใช้กระบวนการแก้ปัญหาที่โดกล่าวไว้ข้างต้น ผู้วิจัยได้สอนการแก้ปัญหาโดยดำเนินการตามกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา และแนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตของวิลสันเฟอร์นันเดซ และฮาดาเวย

2.2.5 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Problem Solving Strategies of Mathematic)

ยุทธวิธีเป็นแนวทางหรือกระบวนการที่จะนำมาใช้ในการหาคำตอบของปัญหา ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาไม่ใช่แนวทางเฉพาะสำหรับปัญหาใดปัญหาหนึ่ง แต่จะเป็นการผสมผสานระหว่างขั้นตอน

วิธีกับวิธีการต่าง ๆ ซึ่งจะได้จากการอ่าน การสำรวจ คาถาและการวิเคราะห์จากขั้นตอนในการวางแผนแก้ปัญหา สิ่งที่ยากในการแก้ปัญหาก็คือ จะเลือกยุทธวิธีที่เหมาะสมในการแก้ปัญหานั้น ๆ ได้อย่างไร ประสบการณ์ในการแก้ปัญหาก็เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับนักแก้ปัญหา กล่าวคือ นักแก้ปัญหาคที่ดีจะมียุทธวิธีในการแก้ปัญหาพร้อมที่จะเลือกออกมาใช้ได้ทันที เมื่อพบปัญหาสามารถปรับเปลี่ยนยุทธวิธีที่เหมาะสมได้อย่างคล่องแคล่ว ยุทธวิธีที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ดี เช่น

1. การหารูปแบบ
2. การเขียนแผนผังหรือภาพประกอบ
3. การสร้างรูปแบบ
4. สร้างตารางหรือกราฟ
5. การเดาและตรวจสอบ
6. แจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด
7. เขียนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์
8. การดำเนินการแบบย้อนหลัง
9. ระบุข้อมูลที่ต้องการและข้อมูลที่กำหนดให้แบ่งเป็นปัญหาย่อยๆ หรือเปลี่ยนมุมมองปัญหา

Kennedy และ Tipps [25] ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาไว้ 10 วิธี ได้แก่

1. การค้นหาแบบรูป (Look for Pattern) เป็นวิธีที่ใช้กันอย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาเด็กเล็กสามารถค้นหาและอธิบายแบบรูปของสิ่งต่าง ๆ ได้ เช่น แบบรูปของจำนวนดังต่อไปนี้ 0, 2, 4, 6... หรือ 15, 20, 25,... เป็นต้น ส่วนเด็กโตจะคิดพร้อมกับแบบรูปที่เป็นนามธรรมและใช้เหตุผลประกอบมากขึ้น
2. การใช้แบบจำลอง (Use a Model) ใช้สำหรับแก้ปัญหาที่ธรรมดาและไม่ธรรมดา นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมให้ใช้วิธีนี้ อุปกรณ์ที่เหมือนจริงจะดีสำหรับเด็กเล็กที่ตัวอย่างด้านนามธรรมสามารถใช้กับเด็กได้ดี การใช้แบบจำลองจะดีกว่าการวาดภาพสำหรับปัญหาบางปัญหา เนื่องจากสามารถเคลื่อนย้ายได้
3. การใช้ภาพหรือแผนภาพ (Use a Drawing or Diagram) เป็นประโยชน์มากสำหรับเด็ก โดยที่เด็กจะเรียนรู้ที่จะใช้ภาษาภาพเพื่อบันทึกข้อมูลเกี่ยวกับปัญหา ในขณะที่เขามีความพร้อมการนำเสนอรูปและแผนภาพก็จะเปลี่ยนมาเป็นการแสดงจำนวนและสิ่งอื่น ๆ ทางคณิตศาสตร์ รูปภาพและแผนภาพมักจะใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ ของปัญหา ตลอดจนกระบวนการสำหรับแก้ปัญหาด้วย
4. การลงมือแก้ปัญหาทันที (Act it Out) วิธีนี้เป็นการแก้ปัญหาโดยทันทีและไม่ค่อยประณีตเป็นการทำคร่าว ๆ เพื่อให้เห็นภาพรวมและขั้นตอนในการแก้ปัญหานั้นได้ง่ายขึ้น

5. การสร้างตารางและ/หรือสร้างกราฟ (Construct a Table /or Graph) วิธีช่วยให้นักเรียนสามารถรวบรวมข้อมูลที่อยู่ข้างกรจัดกระจายมาเป็นรูปแบบที่มีความซับซ้อนน้อยลง สามารถใช้ประโยชน์ได้ดีกว่า
6. การเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) วิธีนี้ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาได้ใช้เหตุผลในการตัดสินใจที่จะทำการเดา ไม่เดาโดยขาดการไตร่ตรองหรือเดาแบบยุ่งเหยิงจนไม่สามารถยอมรับได้ เมื่อเดาครั้งแรกควรจะตรวจสอบว่าถูกต้องหรือไม่ เป็นไปตามตรรกความจริงหรือไม่ ถ้ายังเป็นไปไม่ได้ต้องเดาซ้ำอีกจนกว่าจะได้คำตอบที่ใกล้เคียงที่สุด
7. การแจงกรณีที่เป็นไปได้ (Account for Possibilities) วิธีนี้ใช้แสดงความเป็นไปได้ของคำตอบก่อนที่จะทราบคำตอบ โดยอาจเขียนเป็นรายการหรือสร้างตารางเพื่อให้ง่ายต่อการแก้ปัญหา เหมาะสำหรับความเป็นไปได้ที่มีไม่มากนัก
8. การทำปัญหาให้ง่ายหรือแยกปัญหาเป็นส่วน ๆ (Simplify or Break into Parts) ใช้กับปัญหาที่ยากหรือปัญหาที่มีตัวเลขหรือจำนวนที่มีความซับซ้อนมาก ๆ ทำให้ปัญหานั้นมีความซับซ้อนน้อยลงเพื่อแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น
9. การทำย้อนกลับ (Work Backward) วิธีนี้มีความพิเศษที่สุดในบรรดาวิธีที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นวิธีที่ช่วยให้เด็กพัฒนาทักษะความมีเหตุผลและเป็นสิ่งที่ท้าทายที่จะหาคำตอบ
10. การเปลี่ยนมุมมองของปัญหา (Change Your Point of View) ปัญหาบางปัญหามีความยุ่งยากซับซ้อน ไม่สามารถลงมือแก้ปัญหานั้นได้โดยตรง บางครั้งจึงต้องเปลี่ยนมุมมองจากจุดมุ่งหมายของปัญหาโดยตรงเป็นสถานการณ์อื่นที่มีอยู่ในปัญหา เพื่อวิเคราะห์แล้งลงมือแก้ปัญหานั้นเพื่อโยงไปยังจุดมุ่งหมายของปัญหาจริง ๆ

นอกจากนี้ Hatfield และคณะ [26] ได้เสนอยุทธวิธีที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้เพิ่มยุทธวิธีอื่น ๆ เช่น การตัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องออก การพัฒนาสูตรและการเขียนสมการ การเทียบเคียงกับปัญหาอื่น และการเขียนแผนผังขั้นตอนการดำเนินงาน การที่จะแก้ปัญหานั้น ยุทธวิธีนั้นับว่ามีความสำคัญ ยุทธวิธีนั้นมีหลากหลาย การรู้จักเลือกใช้ยุทธวิธีให้เหมาะสมกับปัญหา นอกจากจะส่งผลให้แก้ปัญหได้แล้ว ยังอาจมีผลต่อวิธีการแก้ปัญหาก็ง่ายและสั้นอีกด้วย

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า ยุทธวิธีการแก้ปัญหานั้นเป็นประโยชน์ในการช่วยให้ผู้แก้ปัญหาประสบความสำเร็จและได้คำตอบของปัญหา นอกจากนั้นกลยุทธ์หรือยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหายังช่วยให้นักเรียนได้ใช้สติปัญญาความคิดในการวางแผนแก้โจทย์ปัญหาอีกด้วย จากกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ ดังนั้นผู้เรียนจึงควรได้รับการฝึกและพัฒนาในเรื่องแบบรูปและความสัมพันธ์ให้มากขึ้น

2.2.6 แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษา Baroody [27] อ้างใน สมเดช บุญประจักษ์ [23] ได้กล่าวถึงการสอนการแก้ปัญหามี 3 แนวทาง ดังนี้

1. การสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญห (Teaching about Problem Solving) เป็นการสอนที่เน้นยุทธวิธีการแก้ปัญหาล้วนๆ โดยปกติแล้วมักใช้รูปแบบการแก้ปัญหของโพลยา ซึ่งมี 4 ขั้นตอน โดยเน้นแนวทางเฉพาะในการนำ 4 ขั้นตอนไปใช้
2. การสอนการแก้ปัญห (Teaching about Problem Solving) เป็นการสอนที่เน้นการประยุกต์ใช้ มักใช้กับปัญหาในชีวิตจริงและสถานการณ์ที่กำหนด นักเรียนสามารถประยุกต์และฝึกใช้สมโนคติและทักษะที่เรียนรู้มาแล้ว เป็นการสอนเนื้อหาสาระหรือทักษะต่าง ๆ ก่อน และจึงเสนอตัวอย่างปัญหา นักเรียนได้รับการฝึกขั้นตอนย่อย ๆ ก่อนที่จะแก้ปัญห แนวทางนี้ไม่ได้มุ่งเพียงการเรียนรู้ขั้นตอนที่หลากหลาย แต่ยังเรียนรู้การประยุกต์ใช้ความเข้าใจในบริบทที่ต่าง ๆ
3. การสอนโดยใช้การแก้ปัญห (Teaching about Problem Solving) เป็นการสอนที่เน้นการประยุกต์ใช้เช่นกัน แนวทางนี้จะใช้ปัญหาเป็นสื่อในการเรียนรู้แนวคิดใหม่ เชื่อมโยงแนวคิดที่จะพัฒนาทักษะและสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือ ใช้ปัญหาในการศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์ โดยการแสดงความสัมพันธ์ของเนื้อหากับโลกที่เป็นจริง (Real World) ใช้ในการแก้ปัญหในการแนะนำและทำความเข้าใจเนื้อหา บางครั้งใช้ปัญหาในการกระตุ้นให้เกิดการอภิปราย การใช้ความรู้ในการแก้ปัญห

การแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถที่ต้องอาศัยพื้นฐานความรู้ ทักษะและความสามารถหลายด้าน Bell [28] กล่าวว่า การแก้ปัญหเป็นกิจกรรมที่ดีและเป็นกิจกรรมที่น่าสนใจสำหรับนักเรียน แต่ถ้การแก้ปัญหามุ่งเน้นที่ความเร็ว ความถูกต้อง รูปแบบ ความเป็นระเบียบและคำตอบที่ถูกต้อง อาจทำให้นักเรียนท้อถอย มีความรู้สึว่าการแก้ปัญหเป็นเรื่องยาก เมื่อครูนำเสนอสถานการณ์ปัญหา แล้วควรจัดสภาพแวดล้อมที่ให้ออกาสนักเรียนได้คิดอย่างอิสระจะทำให้นักเรียนเกิดความคิดสร้างสรรค์ และเรียนรู้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะช่วยให้เกิดการพัฒนาศักยภาพในการวิเคราะห์ได้ดีขึ้น และใช้เป็นเครื่องมือในการประยุกต์ศักยภาพเหล่านั้นสู่สถานการณ์ที่กว้างขึ้น

จากการที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับทักษะการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ จะเห็นได้ว่าในการจัดการเรียนรู้นั้น ผู้สอนสามารถจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนเรียนรู้อย่างค่อยเป็นค่อยไป โดยกำหนดประเด็นคำถามให้คิดและหาคำตอบเป็นลำดับโดยใช้กระบวนการแก้ปัญห จนผู้เรียนสามารถหาคำตอบได้ หลังจากนั้นในปัญหาต่อ ๆ ไป ผู้สอนค่อยลดประเด็นคำถามลงเมื่อเห็นว่าผู้เรียนมีทักษะในการแก้ปัญหเพียงพอแล้วก็ไม่จำเป็นต้องมีคำถามขึ้นนำ นอกจากนี้แล้วหากผู้เรียนเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหเป็นลำดับขั้นแล้ว

การพัฒนาให้มีทักษะนั้นผู้สอนควรเน้นฝึกการวิเคราะห์แนวคิดที่หลากหลาย ในชั้นวางแผนแก้ปัญหาให้มาก เพราะเป็นขั้นตอนที่มีความสำคัญและถือว่ายากสำหรับผู้เรียน

2.2.7 ทักษะและความสามารถที่จำเป็นในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ทักษะและความสามารถที่จำเป็นในการแก้ปัญหา ได้แก่

1. ทักษะในการอ่านคือ ความสามารถในการเข้าใจความหมายในสิ่งที่อ่าน
2. ทักษะในการคำนวณ คือ ความสามารถในการคิดคำนวณพื้นฐานและความสามารถในการเลือกวิธีการคิดคำนวณที่เหมาะสม
3. ความสามารถในการสืบค้น คือความสามารถในการค้นหาข้อมูลต่าง ๆ ในสถานการณ์ปัญหา บอกได้ว่าโจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง มีเงื่อนไขอย่างไร และต้องการหาอะไร
4. ความสามารถในการสร้างข้อคาดเดา คือ ความสามารถในการคาดเดาถึงผลที่คาดว่า จะเกิดขึ้นจากการดำเนินการแก้ปัญหา และความสามารถในการเลือกวิธีการที่จะใช้ในการตรวจสอบข้อคาดเดานั้น
5. ความสามารถในการวิเคราะห์ คือ ความสามารถในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ปรากฏ และข้อมูลที่ไม่ปรากฏในสถานการณ์ปัญหาวิเคราะห์ได้ว่า ข้อมูลใดจำเป็นและต้องหาข้อมูลใดเพิ่มอีกจึงจะสามารถแก้ปัญหาได้
6. ความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหาและตรวจสอบผล คือ ความสามารถในการบูรณาการการทักษะและความสามารถต่าง ๆ ข้างต้น มาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2.3 การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.3.1 ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่าน ได้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ดังนี้

Henderson และ Pingry [29] ได้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ว่าเป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการหาข้อสรุป หรือเป็นคำตอบซึ่งผู้แก้ปัญหาคิดจะทำได้โดยจะต้องมีกระบวนการที่เหมาะสม ซึ่งใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผน และตัดสินใจประกอบกัน

Adam และคณะ [20] ได้ให้ความหมายไว้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ โจทย์ภาษา (Word Problem) หรือ โจทย์เชิงเรื่องราว (Story Problem) หรือ โจทย์เชิงถ้อยคำบรรยาย (Verbal Problem) นั่นคือ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการบรรยายสภาพการณ์ด้วยถ้อยคำ หรือข้อความและตัวเลข โดยต้องการหาคำตอบในเชิงปริมาณหรือตัวเลข ผู้แก้ปัญหาคิดต้องค้นหาวางจะใช้วิธีการใดในการแก้โจทย์ปัญหานั้น

Krulik และ Rudnick [24] ได้กล่าวถึงความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เป็นประโยคภาษา คำตอบจะเกี่ยวข้องกับปริมาณในตัวปัญหานั้น ไม่ได้ระบุวิธีการหรือการดำเนินการในการแก้ปัญหาไว้อย่างชัดเจน ผู้แก้ปัญหาก็ต้องค้นหาว่าจะใช้วิธีการใดในการหาคำตอบ จึงจะทำให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา

Sheffield และ Cruikshank [30] ได้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า ปัญหาอาจจะเป็นคำถามหรือสถานการณ์ที่ทำให้เกิดความงงววย ปัญหาจะเป็นคำถามหรือสถานการณ์ซึ่งไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีหรือไม่ทราบวิธีการหาคำตอบได้อย่างรวดเร็ว ปัญหาคณิตศาสตร์จะเกี่ยวข้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ แต่ไม่ได้หมายความว่าต้องเกี่ยวข้องกับจำนวน บางปัญหาที่ดีเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับมิติหรือการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์โดยไม่เกี่ยวข้องกับจำนวน

สุนีย์ เหมะประสิทธิ์ [31] ได้ให้ความหมายว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์คือ โจทย์ภาษา (Word Problem) หรือ โจทย์เชิงเรื่องราว (Story Problem) หรือ โจทย์เชิงสนทนา (Verbal Problem) นั่นคือ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่บรรยายสภาพการณ์ด้วยถ้อยคำหรือข้อความ และตัวเลข โดยต้องการคำตอบในเชิงปริมาณหรือตัวเลข ผู้แก้ปัญหาก็ต้องค้นหาว่าจะใช้วิธีการใดแก้ปัญหานั้น ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ จำเป็นต้องอาศัยทักษะและความสามารถต่าง ๆ มาประกอบกันเช่น ทักษะการอ่านและวิเคราะห์ปัญหา การคำนวณ การมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ เป็นต้น

ยุพิน พิพิธกุล [32] ได้กล่าวถึงปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นปัญหาที่นักเรียนจะต้องค้นหาความจริง หรือข้อสรุปใหม่ที่นักเรียนยังไม่เคยเรียนมาก่อนปัญหาที่เกี่ยวกับวิชาการ เช่น การพิสูจน์ที่ต้องอาศัยเหตุผล ปัญหาที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่อาศัยนิยาม ทฤษฎีบทต่าง ๆ ซึ่งจะถูกนำมาใช้โดยอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหานั้น

ปรีชา เนาว์เย็นผล [33] ได้ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการคำตอบซึ่งบุคคลต้องใช้สาระความรู้ และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มากำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบ บุคคลผู้คิดหาคำตอบไม่คุ้นเคยกับสถานการณ์นั้นมาก่อน และไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใดสถานการณ์หรือคำถามข้อใดจะเป็นปัญหาหรือไม่ ขึ้นอยู่กับบุคคลผู้คิดหาคำตอบ ในบางสถานการณ์เป็นปัญหาสำหรับบางคน แต่อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับคนอื่น ๆ ก็ได้

จากความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักวิชาการและนักการศึกษาได้ให้ความหมายไว้ จึงกล่าวได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์หรือคำถามทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการหา

ข้อสรุป หรือคำตอบ โดยสถานการณ์นั้นจะเป็นปัญหาที่ใช้ภาษาแสดงถึงเงื่อนไขความสัมพันธ์ของจำนวนที่กำหนดไว้ในแต่ละประโยค ซึ่งนักเรียนจะต้องคิดและตัดสินใจว่า จะใช้วิธีการอะไรทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหา

2.3.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่านได้แบ่งประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Polya [22] ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ตามจุดประสงค์ของปัญหา เป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาให้ค้นหา (Problem to Find) เป็นปัญหาที่ต้องการให้ค้นหาคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณ วิธีการ หรือคำอธิบายให้เหตุผล ปัญหาให้ค้นหามีส่วนสำคัญแบ่งได้เป็น 3 ส่วนคือ สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดให้ และเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหา กับข้อมูลที่กำหนดให้
2. ปัญหาให้พิสูจน์ (Problem to Prove) เป็นปัญหาให้แสดงการให้เหตุผลว่า ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง หรือข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ ปัญหาให้พิสูจน์มีส่วนสำคัญแบ่งได้เป็น 2 ส่วน คือ สิ่งที่กำหนดให้หรือสมมติฐาน และ สิ่งที่ต้องพิสูจน์หรือผลสรุป

LeBlanc และคณะ [34] ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาในหนังสือแบบเรียน (Standard Textbook Problem) เป็นปัญหาสำหรับกริณนำหรือทำตาม การดำเนินการเลขคณิต เช่น การคูณจำนวนเต็ม ลักษณะของปัญหาในหนังสือแบบเรียนสามารถแก้ปัญหาโดยประยุกต์ใช้ขั้นตอนเดียวหรือใช้ขั้นตอนที่เรียนผ่านมาแล้ว นักเรียนสามารถใช้สื่อรูปธรรมหรือบริบทในชีวิตจริง เป้าหมายของปัญหาในหนังสือแบบเรียนคือสามารถระลึกได้ถึงข้อเท็จจริงพื้นฐาน ทักษะ ขั้นตอน การดำเนินการมูลฐาน มีประสิทธิภาพมากขึ้นและเป็นปัญหาเชื่อมโยงระหว่างการดำเนินการและประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ในชีวิตจริง
2. ปัญหากระบวนการ (Process Problem) เป็นปัญหาที่ต้องการให้ใช้กลวิธีหรือวิธีการที่ไม่เป็นขั้นตอน แต่ยังคงใช้ขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหา ปัญหาชนิดนี้กระตุ้นการใช้กระบวนการให้ได้คำตอบมากกว่าคำตอบที่ได้ ความสำเร็จของการแก้ปัญหาไม่ได้ขึ้นอยู่กับการประยุกต์ใช้มนทัศน์ กฎ สูตร แต่ขึ้นอยู่กับการใช้กลวิธีมากกว่าหนึ่งกลวิธีในการหาคำตอบ ปัญหากระบวนการบางปัญหามีมากกว่าหนึ่งคำตอบ

Charles และคณะ [35] กล่าวว่ามมีปัญหาอย่างน้อย 4 ประเภทที่ควรสอน คือ

1. ปัญหาขั้นตอนเดียว (One-Step Problem) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาคือนักเรียนต้องแปลงสถานการณ์ที่เป็นเรื่องราวให้เป็นประโยคทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณหรือการหาร ปัญหา

ประเภทนี้มีพบในการเรียนการสอนตามปกติ ยุทธวิธีพื้นฐานที่ใช้ในปัญหานั้นตอนเดียวคือ การเลือกการดำเนินการ

2. ปัญหาหลายขั้นตอน (Multi-Step Problem) มีความแตกต่างกับปัญหานั้นตอนเดียวที่จำนวนของการดำเนินการที่จำเป็นในการหาคำตอบ ปัญหาหลายขั้นตอนมีจำนวนของการดำเนินการมากกว่าหนึ่งตัว ยุทธวิธีพื้นฐานที่ใช้ในการแก้ปัญหามulti-step คือ การเลือกการดำเนินการ

3. ปัญหากระบวนการ (Process Problem) เป็นปัญหาที่ไม่สามารถแปลงเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ โดยการเลือกการดำเนินการได้ทันที แต่จะต้องใช้กระบวนการต่าง ๆ ช่วย เช่นการทำปัญหาให้ง่าย การแบ่งปัญหาออกเป็นปัญหาย่อย ๆ การเขียนภาพหรือแผนภาพ การเขียนกราฟแทนปัญหา การแก้ปัญหานั้นต้องใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ เช่น การประมาณคำตอบการเดาและตรวจสอบ การสร้างตาราง การค้นหาแบบรูป การทำย้อนกลับ ปัญหากระบวนการปัญหานั้นอาจใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหานั้นได้หลายแบบ

4. ปัญหาประยุกต์ (Applied Problem) บางครั้งเรียกว่า ปัญหาเชิงสถานการณ์ (Situational Problem) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหานั้นต้องใช้ทักษะ ความรู้ โนมคติ และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหานั้นที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง ซึ่งจะต้องใช้วิธีการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์เช่น การรวบรวมข้อมูลทั้งหมดที่กำหนดในปัญหา และอยู่นอกปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูลเป็นปัญหาที่จะทำให้ผู้แก้ปัญหานั้นเห็นประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์

Reys และคณะ [36] ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ตามผู้แก้ปัญหานั้นและความซับซ้อนของปัญหานั้นเป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาที่คุ้นเคย (Routine Problem) เป็นปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ มักอยู่ในรูปโจทย์ปัญหานั้นที่เป็นถ้อยคำหรือเป็นเรื่องราว มีโครงสร้างของปัญหานั้นไม่ซับซ้อนนักและคล้ายกับตัวอย่างหรือปัญหานั้นที่ผู้แก้ปัญหานั้นเคยมีประสบการณ์ในการแก้มาแล้ว

2. ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (Nonroutine Problem) เป็นปัญหานั้นที่มีโครงสร้างซับซ้อน แปลกใหม่สำหรับผู้แก้ปัญหานั้น ในการแก้ปัญหานั้นผู้แก้ปัญหานั้นต้องใช้ความรู้ และประสบการณ์หลายอย่างประมวลเข้าด้วยกันเพื่อกำหนดวิธีแก้ปัญหานั้น

Dossey อ้างใน นุตริยา จิตตารมย์ [37] ได้แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์เป็น 3 ประเภท คือ

1. ปัญหาที่ต้องตัดสินใจ (Decision Making) เป็นปัญหานั้นที่ผู้แก้ปัญหานั้นต้องทำความเข้าใจปัญหานั้น ลักษณะและข้อจำกัดของปัญหานั้น สามารถแปลงข้อมูลของปัญหานั้น เลือกวิธีการแก้ปัญหานั้นภายใต้ข้อจำกัด สามารถตรวจสอบและประเมินการตัดสินใจ และสื่อสารคำตอบได้

2. ปัญหาที่ต้องวิเคราะห์และวางแผน (System Analysis and Design) เป็นปัญหานั้นที่ผู้แก้ปัญหานั้นต้องวิเคราะห์ความซับซ้อนหรือสร้างการวางแผน จับประเด็นเหตุผลภายในปัญหานั้นซึ่งสอดคล้องกับ

จุดประสงค์ อธิบายความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นภายใน คันทาสาเหตุหรือคำตอบจากการวางแผน ประเมิน ค่าความสมเหตุสมผลแล้วเผยแพร่ได้

3. ปัญหาที่ต้องจับประเด็นปัญหา (Trouble Shooting) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาต้องวิเคราะห์ถึงความ ผิดพลาดที่เกิดขึ้น เข้าใจถึงสาเหตุอันเนื่องมาจากปัญหาเช่น ขั้นตอนการทำงานบ่งชี้ถึงจุดที่ทำให้ เกิดภาวะวิกฤตได้ วิเคราะห์และหาคำตอบ และสามารถตรวจสอบหรือพิสูจน์คำตอบแล้วเผยแพร่ได้

จากการแบ่งประเภทของ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่าน คล้ายคลึงกันในที่นี้ จึงกล่าวได้ว่า การแบ่งประเภทของ โจทย์ปัญหานั้นขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ในการ แบ่งอาจแบ่งตามจุดประสงค์ของปัญหา ตามการดำเนินการหาคำตอบ ตามเป้าหมายในการหาคำตอบ หรืออาจแบ่งตามผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของปัญหา ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหามี 2 ประเภท คือ 1. โจทย์ปัญหาที่ใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์อาจมีขั้นตอนเดียวหรือหลายขั้นตอน และประยุกต์ใช้กลวิธีต่าง ๆ ในการหาคำตอบ 2. โจทย์ปัญหาที่ต้องพิสูจน์ใช้การให้เหตุผล วิเคราะห์ ตัดสินใจ และหาคำตอบของปัญหา ซึ่งในแต่ละ โจทย์ปัญหาผู้แก้ปัญหาจะต้องพิจารณาลักษณะ โครงสร้างของปัญหาให้ชัดเจน เพื่อจะได้ประมวลความรู้และประสบการณ์หาคำตอบได้เหมาะสมกับ ลักษณะของ โจทย์ปัญหา

2.3.3 ลักษณะของ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่าน ได้เสนอแนะลักษณะของ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

Leblanc และคณะ [34] ได้เสนอแนะลักษณะของ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจสำหรับใช้สอน ในชั้นเรียน สรุปได้ว่า ครูต้องเลือกหรือออกแบบปัญหาที่นักเรียนสนใจการนำเข้าสู่ประเด็นปัญหา และร่วมมือกันทำให้ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา การเลือกปัญหาจะต้องเหมาะสมกับระดับ ความยากซึ่งเป็นสิ่งสำคัญ องค์ประกอบที่ทำให้ปัญหาเกิดความ

ยากโดยทั่วไปมีอยู่ 4 องค์ประกอบ คือ

1. การเลือกใช้คำศัพท์
2. ความยาวและ โครงสร้างของถ้อยคำหรือประโยค
3. ขนาดและความซับซ้อนของจำนวน
4. การตั้งปัญหาหรือการแสดงปัญหา

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ควรใช้คำศัพท์ง่าย ๆ ศัพท์ทางคณิตศาสตร์ควรหลีกเลี่ยงเพื่อให้นักเรียนเข้าใจ โจทย์ปัญหาด้วยตัวนักเรียนเอง ระดับความยากของการอ่านควรจะทำให้เหมาะสมกับความยาวและ ความซับซ้อนของถ้อยคำและประโยคใน โจทย์ปัญหา โจทย์ปัญหาที่ใช้สอบถ้าเป็นประโยคยาว ๆ

สามารถแบ่งเป็นสองส่วนหรือมากกว่า หรืออาจจะเขียนใหม่เป็นประโยคสั้น ๆ ตามความเข้าใจ การใช้การคำนวณด้วยมือควรลดระดับความยากและความซับซ้อนของปัญหา การเปลี่ยนแปลงการตั้งปัญหาหรือการแสดงปัญหา สามารถเลือกได้ตามระดับความยากของปัญหา

Sheffield และ Cruikshank [30] ได้เสนอแนะถึงลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ สรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาที่ดีทำให้ผู้แก้ปัญหาเกิดความสนใจและพยายามที่จะหาคำตอบ โจทย์ปัญหาที่ดีไม่ได้รวมโจทย์ภาษา หรือโจทย์เชิงเรื่องราวที่พบเห็นจากหนังสือแบบเรียน เพราะนักเรียนคุ้นเคยมีวิธีการแก้ปัญหาได้ในทันทีและบ่อยครั้งจะไม่สนใจผลลัพธ์ที่ได้

สุรัช อินทสังข์ [38] มีคำแนะนำว่า โจทย์ปัญหาประเภทหนึ่งที่ครูควรจัดให้นักเรียนได้คิดแก่น่าจะเป็นปัญหาที่อยู่ในบริบทที่นักเรียนคุ้นเคย กล่าวคือปัญหานั้นเป็นเรื่องใกล้ตัวของนักเรียนแต่ละคน นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ดีขึ้นถ้าโจทย์ปัญหานั้นมีเนื้อหาที่สอดคล้องกับประสบการณ์เดิมและสัมพันธ์กับสิ่งที่เรียนรู้จริงรอบ ๆ ตัวของนักเรียน คุณลักษณะที่ดีของโจทย์ปัญหา คือ ต้องกระตุ้นให้นักเรียนกระหายที่จะคิด ต้องท้าทายให้นักเรียนเกิดความพยายามที่จะแก้เพื่อหาคำตอบ

2.3.4 กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอแนะลักษณะของกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ดังนี้

Polya [22] ได้เสนอขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาซึ่งเป็นที่ยอมรับและนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายที่เรียกว่า กระบวนการแก้ปัญหาสี่ขั้นตอนของโพลยา ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the Problem) ขั้นนี้เป็นขั้นการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา โดยอาจหาว่าสิ่งที่ต้องการรู้คืออะไร ข้อมูลมีอะไรบ้างเงื่อนไขคืออะไร จะแก้ปัญหตามเงื่อนไขได้หรือไม่ เงื่อนไขที่ให้มาเพียงพอที่จะหาสิ่งที่ต้องการหรือไม่ การวาดภาพ การใช้สัญลักษณ์ การแบ่งเงื่อนไขออกเป็นส่วนย่อย ๆ อาจช่วยให้เข้าใจปัญหาคิดขึ้น

ขั้นที่ 2 การวางแผนงาน (Devising a Plan) ขั้นนี้เป็นขั้นการเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลกับสิ่งที่ต้องการทราบ หากไม่สามารถเชื่อมโยงได้ทันทีอาจต้องใช้ปัญหาอื่นช่วยเพื่อให้ได้แผนงานแก้ปัญหานั้นที่สุด ผู้แก้ปัญหาอาจเริ่มต้นด้วยการคิดว่าตนเคยเห็นปัญหาลักษณะนี้จากที่ไหนมาก่อนหรือไม่ หรือเคยเห็นปัญหาในรูปแบบที่คล้ายคลึงกันนี้หรือไม่ จะใช้ความรู้หรือวิธีการใดแก้ปัญหานั้น จะแก้ปัญหานั้นส่วนใดได้ก่อนบ้าง จะแปลงข้อมูลที่มีอยู่ใหม่เพื่อให้สิ่งที่ต้องการรู้กับข้อมูลที่มีอยู่สัมพันธ์กันมากขึ้น ได้หรือไม่ ได้ใช้ข้อมูลและเงื่อนไขที่มีอยู่อย่างเหมาะสมแล้วหรือยัง

ขั้นที่ 3 การดำเนินการตามแผน (Carrying Out the Plan) ขั้นนี้เป็นการลงมือทำงานตามแผนที่วางไว้ ควรมีการตรวจสอบแต่ละขั้นย่อย ๆ ของงานที่ทำว่าถูกต้องหรือไม่ จะแน่ใจได้อย่างไร

ขั้นที่ 4 การตรวจย้อนกลับ (Looking Back) ขั้นนี้เป็นการตรวจสอบคำตอบหรือเฉลยที่ได้ว่า สอดคล้องกับข้อมูลและเงื่อนไขที่กำหนดในปัญหาหรือไม่ ซึ่งอาจครอบคลุมถึงการขยายความคิดจากผลหรือคำตอบที่ได้และการใช้วิธีการอื่นแก้ปัญหา

Troutman และ Lichtenberg [39] ได้เสนอแนะกระบวนการแก้ปัญหา 6 ขั้นตอน ซึ่งใช้แนวคิดพื้นฐานจากกระบวนการแก้ปัญหาสี่ขั้นตอนของโพลยา ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา ผู้แก้ปัญหาไม่เพียงแต่ต้องทำความเข้าใจสิ่งต่าง ๆ ที่ปรากฏในปัญหาเท่านั้น แต่ต้องมีความรู้เกี่ยวกับสิ่งต่าง ๆ ในปัญหา สิ่งหนึ่งที่สำคัญในการทำความเข้าใจปัญหา คือ การตั้งคำถามถามตนเองเพื่อให้เข้าใจปัญหาได้อย่างลึกซึ้ง
2. กำหนดแผนในการแก้ปัญหา โดยกำหนดอย่างน้อยที่สุดหนึ่งแผน การกำหนดแผนในการแก้ปัญหาหลาย ๆ แผน เป็นสิ่งที่มีประโยชน์ เพราะสามารถเปรียบเทียบและเลือกใช้แผนที่คิดว่าน่าจะมีประสิทธิภาพที่สุด การกำหนดแผนเป็นการกำหนดยุทธวิธีที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา
3. ดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาลงมือทำตามแผนที่กำหนดไว้ ซึ่งมีข้อแนะนำให้ทำงานเป็นกลุ่ม เพราะถ้าแต่ละคนดำเนินการตามแผนของตน คำตอบที่ได้สามารถนำมาตรวจสอบเปรียบเทียบกัน และได้เรียนรู้สิ่งที่แปลกใหม่จากเพื่อน ๆ ถ้าทุกคนในกลุ่มใช้แผนการแก้ปัญหาเดียวกัน ทั้งกลุ่มก็จะได้มีโอกาสช่วยเหลือกันแก้ปัญหาอย่างรอบคอบในปัญหาที่มีความซับซ้อน เมื่อสามารถวางแผนแบ่งงานได้เป็นส่วน ๆ ผู้แก้ปัญหาก็สามารถแบ่งกันทำงานตามแผนคนละส่วน แล้วนำมาประกอบกัน จะทำให้งานลุล่วงเร็ว และมีความสมบูรณ์
4. ประเมินแผนและคำตอบ ในขั้นตอนนี้ดำเนินการโดย
 - พิจารณาว่าคำตอบมีความเป็นไปได้หรือมีความสมจริงหรือไม่
 - ตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดในปัญหา
 - ลองแก้ปัญหาใหม่ โดยวางแผนใช้วิธีการอื่น แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้
 - เปรียบเทียบคำตอบของตนเองกับคำตอบของเพื่อน ๆ คนอื่น ๆ
5. ขยายปัญหา ผู้แก้ปัญหาก็ต้องค้นหาแบบรูปทั่วไปของคำตอบของปัญหา ซึ่งต้องเข้าใจโครงสร้างของปัญหาอย่างชัดเจนจึงจะสามารถขยายปัญหาได้ การขยายปัญหาจะช่วยสร้างทักษะในการแก้ปัญหา การขยายปัญหาทำได้โดย
 - เขียนปัญหาที่คล้ายกับปัญหาเดิม
 - เสนอปัญหาใหม่ เพื่อที่ว่าผู้แก้ปัญหาก็จะค้นหาแบบรูปทั่วไป กฎ หรือสูตรในการหาคำตอบ

6. บันทึกการแก้ปัญหา ผู้แก้ปัญหาที่คิดจะจดบันทึกการทำงานของเขาไว้เพื่อที่จะได้สามารถรู้พื้นหรือ ทบทวนความพยายามของเขาได้ การจดบันทึกอาจเก็บข้อมูลจากการร่วมกันคิด ร่วมกันทำ ซึ่งจะเป็น ประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาต่อไป สิ่งที่ควรจดบันทึก ได้แก่

- แหล่งของปัญหา
- ตัวปัญหาที่กำหนด
- แนวคิดในการแก้ปัญหา หรือแบบแผนการคิดอย่างคร่าว ๆ
- ยุทธวิธีแก้ปัญหานั้นนำมาใช้หรือสามารถจะนำมาใช้
- ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการขยายผลการแก้ปัญหา

Dossey อังใน นุตริยา จิตตารมย์ [37] ได้เสนอกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า ประกอบด้วย 7 ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา
2. จำแนกประเด็นปัญหาและวางแผนหาคำตอบ
3. จัดรูปแบบและแสดงความหมายเงื่อนไขของโจทย์
4. เลือกกลวิธีการแก้โจทย์ปัญหา
5. ดำเนินการหาคำตอบ
6. ทบทวนคำตอบ
7. สื่อสารและขยายคำตอบ

สมศักดิ์ โสภณพินิจ [40] ได้สรุปกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจในปัญหา ซึ่งอาจจะใช้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ช่วย เช่น กราฟแผนภูมิ ตาราง
2. แสวงหาความรู้เพื่อนำไปใช้การแก้ปัญหานั้น ๆ พิจารณาถึงเหตุและหนทางที่จะแก้ปัญหา
3. วางแผนในการแก้ปัญหา เป็นการวาง โครงการ หายุทธวิธีที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา
4. แก้ปัญหา โดยดำเนินการตามแผนที่ได้วางไว้ ซึ่งอาจจะมีบางจำเป็นต้องใช้การคำนวณช่วย
5. ตรวจสอบ เป็นการทบทวนเหตุผล ที่ได้ดำเนินการแก้ปัญหาไปแล้วนั้นว่ามีความเหมาะสมหรือไม่ เพียงใด คำนวณถูกต้องหรือไม่ คำตอบน่าเชื่อถือเพียงใด

2.3.5 กลวิธีแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอแนะลักษณะของกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

Musser และ Shaughnessy [10] ได้เสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาในโรงเรียนไว้ 5 ประการ ดังนี้

1. การทดสอบวิธีต่าง ๆ และตัดวิธีที่ผิดทิ้ง (Trial and Error) เป็นวิธีการแก้ปัญหาที่ตรงที่สุดประยุกต์ใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์กับข้อมูลที่กำหนดให้ วิธีการนี้นำไปสู่เรื่องราวที่สัมพันธ์กับความรู้และความรู้ที่ใช้นั้นไม่กว้างมากนัก
2. การค้นหาแบบรูป (Patterns) เป็นการหาคำตอบโดยสังเกตจากตัวอย่างข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ คำตอบที่ได้จะเป็นรูปทั่วไปที่ได้จากตัวอย่างที่โจทย์กำหนดให้
3. การแก้ปัญหที่ง่ายกว่า (Solving a Simpler Problem) เป็นการหาคำตอบโดยการทำปัญหาให้ง่ายลงจากปัญหาที่ซับซ้อน ทำให้สามารถกำหนดแนวคิดในการแก้ปัญหาและนำแนวคิดนั้นมาใช้แก้ปัญหที่กำหนดได้ วิธีการหนึ่งในการทำปัญหาให้ง่ายคือการแบ่งปัญหออกเป็น ส่วน ๆ หรือเริ่มด้วยปัญหาที่มีระดับความซับซ้อนน้อยลง
4. การทำย้อนกลับ (Working Backward) เป็นการหาคำตอบโดยเริ่มต้นพิจารณาจากสิ่งที่ปัญหาต้องการหรือสิ่งที่จะพิสูจน์แล้วเชื่อมโยงย้อนกลับไปสู่สิ่งที่โจทย์กำหนดให้
5. การสร้างสถานการณ์จำลอง (Simulation) เป็นการหาคำตอบโดยการทดลองแสดงสถานการณ์ตามที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อสามารถตัดสินใจบนฐานการวิเคราะห์ข้อมูล คำตอบที่ได้จากการทดลอง

Krulik และ Rudnick [41] กล่าวว่า กลวิธีในการแก้ปัญหามีหลากหลายต้องเลือกใช้ให้เหมาะสมกับปัญหา กลวิธีหนึ่งอาจจะเหมาะสมกับปัญหาหนึ่งแต่บางปัญหาอาจไม่ใช่นอกจากนั้นบางปัญหาอาจจะจำเป็นต้องใช้หลายกลวิธีในการแก้ปัญหา และเสนอแนะกลวิธีในการแก้ปัญหไว้ 8 ประการดังต่อไปนี้

1. การจำแนกแบบรูป (Pattern Recognition)
2. การทำย้อนกลับ (Working Backwards)
3. การเดาและตรวจสอบ (Guess and Test)
4. การสร้างสถานการณ์จำลองหรือการทดลอง (Simulation or Experimentation)
5. การย่อความ (Reduction)
6. การแจกแจงรายการ (Exhaustive Listing)
7. การใช้ตรรกศาสตร์เชิงอนุมาน (Logical Deduction)
8. การแสดงความหมายข้อมูล (Representing Data) โดยใช้
 - กราฟ (Graph)
 - สมการ (Equation)
 - นิพจน์เชิงพีชคณิต (Algebraic expression)
 - ตาราง (Table)
 - แผนภูมิ (Chart)

- ไดอะแกรม (Diagram)

Sheffield และ Cruikshank [30] ได้เสนอกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 5 ประการ คือ

1. เดาและตรวจสอบ (Guess and Check)
2. ค้นหาแบบรูป (Look for a Pattern)
3. เขียนรายละเอียดของโจทย์ (Make a Systematic List)
4. สร้างและใช้การวาดรูปหรือโมเดล (Make and use a Drawing or Model)
5. กำจัดสิ่งที่เป็นไปได้ (Eliminate Possibilities)

Reys และคณะ [36] ได้เสนอกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 10 ประการ คือ

1. ปฏิบัติเพื่อออกไปจากปัญหา (Act it Out) เป็นกลวิธีที่นักเรียนได้สัมผัสกับสถานการณ์ของโจทย์ปัญหา และนักเรียนได้เรียนรู้วิธีการแก้ปัญหากจากสถานการณ์นั้น
2. ใช้ภาพหรือแผนภาพ (Make a Drawing or Diagram) เป็นการเขียนภาพหรือแผนภาพของข้อมูลตามที่โจทย์กำหนดให้
3. ค้นหาแบบรูป (Look for a Pattern) เป็นการใชแบบรูปของจำนวนหรือรูปภาพที่โจทย์กำหนดให้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา
4. สร้างตาราง (Construct a Table) เป็นการจัดระเบียบของข้อมูลในรูปแบบของตารางช่วยให้ผู้แก้โจทย์ปัญหามองเห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้
5. จำแนกทุกกรณีที่เป็นไปได้ (Identify all Possibilities) กลวิธีนี้มักใช้ร่วมกับกลวิธีสร้างตาราง และค้นหาแบบรูป ทำให้นักเรียนรู้ว่าคำตอบของโจทย์ปัญหาเป็นอะไรได้บ้าง
6. เดาและตรวจสอบ (Guess and Check) เป็นการคาดเดาคำตอบและตรวจสอบคำตอบที่ได้ ผู้แก้ปัญหามั่นใจว่าคำตอบที่ได้จากการเดาถูกต้องหรือไม่ จะต้องตรวจสอบคำตอบว่าเป็นไปตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดหรือไม่
7. ทำย้อนกลับ (Work Backward) เป็นการหาคำตอบโดยพิจารณาจากข้อมูลสุดท้ายที่โจทย์กำหนดมาให้ ช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม
8. เขียนประโยคเปิด (Write an Open Sentence) เป็นการฝึกหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในประโยคคำถาม ซึ่งมีลักษณะเหมือนคำทนาย เพื่อใช้ในการหาคำตอบ
9. แก้ปัญหาที่ง่ายกว่าหรือปัญหาที่คล้ายกัน (Solve a Simpler or Similar Problem) เป็นการกำหนดปัญหาขึ้นมาใหม่ที่มีลักษณะที่ง่ายกว่า หรือคล้ายกัน โดยมีโครงสร้างของปัญหาเหมือนเดิม แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้โจทย์ปัญหาที่ง่ายกว่าหรือคล้ายกัน ไปแก้โจทย์ปัญหาเดิม

10. เปลี่ยนจุดมุ่งหมายของปัญหา (Change your Point of View) เป็นการแก้โจทย์ปัญหาทีละตอน ทำให้ได้คำตอบของโจทย์ปัญหา

สมศักดิ์ โสภณพินิจ [40] ได้รวบรวมกลวิธีในการแก้ไขปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ 15 ประการ ดังต่อไปนี้

1. มองภาพรวม ๆ เพื่อวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะของปัญหาทั้งหมด การมองภาพรวม ๆ เป็นการทบทวนเรื่องราวทั้งหมด ทำความเข้าใจเนื้อหา การทบทวนอาจจะทำโดยการอ่านหลาย ๆ รอบเพื่อจะ 'ได้ไม่หลงทาง มองภาพในมุมกว้างจนกว่าจะเห็นหนทางแก้ไข ในกรณีที่เกิดไม่ออกอาจจะเปลี่ยนมุมมองเสียใหม่
2. กำหนดหนทางไว้เลือกหลาย ๆ ทาง การหาทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมดไว้หลาย ๆ ทางเพื่อนำมาพิจารณาในรายละเอียดว่า ทางเลือกใดที่ดีและเป็นไปได้มากที่สุด การพิจารณาเพื่อตัดสินใจเลือกนั้น ต้องกระทำอย่างรอบคอบ
3. กำจัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับปัญหาทิ้งไป เหลือไว้แต่ข้อมูลที่จะเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหานั้น ๆ โดยเฉพาะขีดเส้นใต้เนื้อหาหรือเรื่องราวที่สำคัญจากข้อมูลที่มีอยู่ พิจารณาหนทางเลือกที่เป็นไปได้ โดยตัดหนทางเลือกที่เป็นไปไม่ได้หรือประเด็นที่ไม่เกี่ยวข้องทิ้งไปเสียก่อน โดยใช้หลักตรรกศาสตร์ แล้วจึงค่อยพิจารณาตัดสินใจจากข้อมูลทั้งหมดที่มีอยู่ประกอบกัน
4. เลือกวิธีการในการคำนวณให้เหมาะสม โดยวิเคราะห์จากข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาว่าจะใช้ข้อมูลข่าวสารใด กลวิธีที่สมควรนำมาใช้คือวิธีใดจึงจะได้ผล และควรจะใช้คำนวณ บวกลบ คูณหาร หาค่า ราก ยกกำลัง หรือใช้ความรู้ทางสถิติ แคลคูลัส พีชคณิต กราฟ ฯลฯ อย่างไรช่วยในการคำนวณ
5. ใช้การเดาแล้วทดสอบ โดยใช้เหตุผลในการพิจารณาว่าคำตอบควรจะเป็นเช่นใดการเดาจะต้องเดาอย่างมีหลักเกณฑ์ สมเหตุสมผล ไม่ลำเอียง เมื่อเดาแล้วต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำตอบ การเดาจะมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นถ้ามีเทคนิคบางอย่างช่วย เช่น การประมาณค่า การวิเคราะห์ข้อมูล การจำลองสถานการณ์ การพิจารณากรณีแวดล้อมมาประกอบการพิจารณา
6. สร้างรูปแบบ (Model) ที่เป็นรูปธรรม ซึ่งจะช่วยให้มองเห็นปัญหาในลักษณะหลายมิติ รูปแบบที่สร้างขึ้น จำลองขึ้นอาจจะเป็นคน วัตถุ สิ่งก่อสร้าง โครงสร้าง เครื่องขยาย เพื่อให้เกิดต้นแบบและสามารถนำไปหาความสัมพันธ์กับข้อมูลที่มีอยู่ หรือนำไปสู่คำตอบที่ต้องการได้
7. หาแบบรูป (Pattern) ที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาก็อย่างมีระบบ ปัญหาบางปัญหาเรื่องราวบางเรื่องราว อาจจะมีลักษณะเป็นวงจร เป็นการเรียงลำดับ เป็นอนุกรมของตัวเลข เป็นรูปทรงเรขาคณิต เป็นค่าของสัดส่วน เป็นลักษณะของการแปลงค่า เป็นคู่ลำดับ หรือเป็นฤดูกาลเป็นต้น การหาแบบรูปได้จะทำให้สามารถไขปัญหาได้

8. จัดระบบข้อมูลใหม่ หมายถึง การจัดระบบข้อมูลเกี่ยวกับปัญหานั้นให้มีรูปที่ง่ายแก่การเข้าใจ เช่น ทำเป็นรายการ ทำเป็นตาราง ทำเป็นข้อสังเกต รวมข้อมูลเรื่องราวเดียวกันไว้ตัดข้อมูลที่ฟุ่มเฟือยออกไป รวมทั้งให้บันทึกข้อมูลที่สูญหายไปซึ่งอาจจะเป็นเบาะแสให้แก้ปัญหได้ง่ายขึ้น
9. สร้างภาพประกอบ เพื่อให้สามารถมองเห็นลักษณะของตัวปัญหาได้อย่างชัดเจนจากข้อมูลที่มีอยู่ที่มีลักษณะเป็นการบรรยายความเป็นตารางตัวเลข สามารถจะทำให้ชัดเจนขึ้นได้ โดยการสร้างภาพประกอบโดยการเขียนกราฟประกอบคำอธิบาย เขียนรูปทางเรขาคณิต สเกตซ์ภาพลายเส้น เขียนเป็นไดอะแกรม จะทำให้มองเห็นปัญหาในลักษณะที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น
10. แยกปัญหาใหญ่ออกเป็นปัญหาย่อย ๆ ให้มีลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาเดิมแต่อยู่ในรูปลักษณะที่ง่ายขึ้น เป็นการแก้ปัญหที่ง่ายกว่า มีตัวเลขที่ซับซ้อนน้อยกว่าแต่เป็นโจทย์ปัญหาลักษณะเดียวกันเมื่อสามารถแก้ปัญหที่เล็กกว่าได้ จะมองเห็นแนวทางในการแก้ไขปัญหาที่ยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้นได้ ในทางจิตวิทยาแล้ว เราใช้การพิสูจน์เชิงนิรนัย อ้างอิงจากเรื่องย่อย ๆ นำสรุปเรื่องที่ใหญ่กว่าได้
11. ใช้ตรรกศาสตร์ในการแก้ปัญห เป็นการแก้ปัญหโดยใช้สามัญสำนึกใช้หลักเหตุและผลบ่อยครั้งที่พบว่า การแก้ปัญหในบางครั้งผู้ที่พยายามแก้ปัญห อาจจะมองลึกซึ่งจนเกินไปและลืมนึกถึงความ เป็นจริงตามธรรมชาติ ขาดการใช้สามัญสำนึกทำให้หาหนทางแก้ไขที่เหมาะสมไม่ได้ การถามว่า “ถ้าเป็นอย่างนี้แล้วจะเกิดอะไรขึ้นต่อไป” เป็นการโยงจากเหตุไปสู่ผลการใช้วิธีอนุมานและอุปมาน เป็นวิธีการหนึ่งที่เป็นประโยชน์
12. คิดย้อนหลัง การแก้ปัญหโดยเริ่มพิจารณาเหตุในบางครั้ง ไม่สามารถกระทำได้ง่ายนัก การสืบสาวจากผลย้อนหลังไปหาเหตุในบางครั้งสามารถจะแก้ปัญหได้ดีกว่า ตัวอย่างการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ตรีโกณมิติ รวมทั้งการสืบสวนเรื่องราวต่าง ๆ เป็นต้น ในบางครั้งจะพบว่าสามารถเริ่มต้นจากผลลัพธ์ (ปลายทาง) เพื่อนำไปสู่เหตุ (ต้นทาง) ง่ายและรวดเร็วมากกว่า
13. ใช้สูตร ปัญหหลายปัญหามีสูตรในการแก้ บางสูตรใช้ได้กับหลายปัญหาในการแก้ปัญหคงจะต้องพิจารณาก่อนว่าสูตรใดบ้างที่มีความเกี่ยวข้อง และสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้ให้วิเคราะห์ปัญหาแล้วนำสูตรไปใช้ หลังจากนั้นจำเป็นจะต้องตรวจสอบทั้งความถูกต้องของสูตรและการนำสูตรไปใช้ได้อย่างถูกต้องกับเรื่องราวนั้น ๆ
14. ตั้งคำถาม คำถามที่ตั้งเหมาะ ๆ โดยตนเองหรือโดยคนอื่น สามารถให้แง่คิดที่สามารถนำไปสู่การแก้ปัญหได้ คำถามที่เป็นประโยชน์ เช่น ทำไม เป็นไปได้อย่างไร ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น จะช่วยให้เกิดความกระจำในปัญหามากขึ้น ช่วยให้สามารถจับใจความสำคัญของปัญหาได้ การตั้งคำถามและหาคำตอบจะสามารถนำไปสู่การแก้ปัญหได้
15. คอย อภิปราย หรือระดมความคิด เป็นกลวิธีอื่นหนึ่งที่จะทำให้ได้ความคิดหรือเห็นแนวทางในการแก้ปัญห เนื่องจากการคุย หรือการอภิปราย ทำให้เกิดการมองปัญหาจากหลายมุมมองที่ต่างกันออกไป เกิดแนวทางในการแก้ปัญหได้จากหลายจุด มีการเติมหรือแก้ไขในจุดบกพร่องที่มองจากบางมุมไม่เห็น คำพูดบางคำอาจเป็นกุญแจให้สามารถหาหนทางแก้ปัญหได้

2.4 การสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR

2.4.1 ความเป็นมาของการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR

การสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR (STAR Strategy Steps) เป็นกลวิธีการสอนให้นักเรียนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธีการจำตัวอักษรตัวแรกของชื่อลำดับขั้น (First Letter Mnemonic Strategy) ของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดย Maccini [13] ได้พัฒนาการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ขึ้นเพื่อชี้แนะนักเรียนที่มีความบกพร่องทางการเรียนสามารถใช้กระบวนการแก้ปัญหาและลำดับขั้นตอนย่อยครบทั้งกระบวนการในการแสดงความหมายและหาคำตอบของปัญหาเพื่อเป็นพื้นฐานสู่การเป็นนักแก้ปัญหาที่ดี

Oas และคณะ [42] ได้เสนอแนะเครื่องมือสำหรับการเรียนรู้ในระดับมัธยมศึกษาว่า กลวิธีการใช้ตัวอักษรตัวแรกช่วยในการจำ ออกแบบมาเพื่อช่วยจำแนกข้อมูลที่สำคัญต่อการเรียน จำแนกรายละเอียด และจดจำรายละเอียดแต่ละขั้น โดยใช้เครื่องช่วยจำคือตัวอักษรตัวแรกของแต่ละขั้น

Maccini และ Gagnon [13] กล่าวว่า กลวิธี STAR ประกอบด้วยลักษณะสำคัญดังนี้

1. เป็นเครื่องมือสำหรับช่วยให้นักเรียนจำกลวิธีที่ใช้ ซึ่งสร้างรูปแบบด้อยค่าจากตัวอักษรตัวแรกของลำดับขั้น
2. ขั้นตอนของกลวิธีใช้ถ้อยคำที่คุ้นเคยง่าย สั้นกะทัดรัด ช่วยให้นักเรียนเข้าใจได้
3. ขั้นตอนของกลวิธีเรียงลำดับอย่างเหมาะสม เช่น นักเรียนอ่าน โจทย์ปัญหาอย่างละเอียดถี่ถ้วนก่อนลงมือแก้ปัญห และนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ได้ เช่น แก้ปัญหาคณิตศาสตร์อย่างประสบความสำเร็จ
4. ขั้นตอนของกลวิธีกระตุ้นให้นักเรียนใช้ความสามารถด้านความรู้ เช่น ใช้การวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา
5. ขั้นตอนของกลวิธีใช้กระตุ้นให้นักเรียนสามารถควบคุมตนเองใช้ความสามารถแก้ปัญหาได้ เช่น ตรวจสอบคำตอบแล้วหรือไม่

จากการทำการวิจัยของ Maccini [11, 12] ซึ่งได้ทดลองโดยใช้กลวิธี STAR ในการแก้ปัญหาพบว่า การจำขั้นตอนแก้ปัญหาโดยใช้ตัวอักษรตัวแรกของชื่อลำดับขั้นช่วยให้นักเรียนระลึกลำดับขั้นตอนได้จากคำศัพท์ที่รู้จัก คุ้นเคย และช่วยให้สามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนเต็มได้

ขั้นตอนหลักของกลวิธี STAR ประกอบด้วย 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 S (Search the Word Problem) การศึกษาโจทย์ปัญหา

ขั้นที่ 2 T (Translate the Problem) การแปลงข้อมูลที่มีอยู่ในโจทย์ปัญหา

ขั้นที่ 3 A (Answer the Problem) การหาคำตอบของโจทย์ปัญหา

ขั้นที่ 4 R (Review the Solution) ทบทวนคำตอบ

Maccini อธิบายว่าขั้นตอนหลักของกลวิธี STAR จะประกอบด้วยขั้นตอนย่อยเพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์โจทย์เพื่อหาคำตอบได้ รายละเอียดของแต่ละขั้นตอนเป็นดังนี้

ขั้นที่ 1 S การศึกษาโจทย์ปัญหา แยกแยะประเด็นของปัญหา ดำเนินการดังนี้

1. อ่านโจทย์ปัญหาอย่างละเอียดถี่ถ้วน
2. ถามคำถามต่อตนเองว่า “รู้ที่จริงอะไรบ้างจากโจทย์ปัญหา” “โจทย์ต้องการให้หาอะไร”
3. เขียนข้อเท็จจริงที่ได้จากโจทย์

ขั้นที่ 2 T การแปลงข้อมูลที่มีอยู่ในโจทย์ปัญหา ดำเนินการดังนี้

1. เลือกตัวแปร
2. ระบุงการดำเนินการทางคณิตศาสตร์
3. แปลงข้อมูลที่มีอยู่ในโจทย์ปัญหาไปสู่สมการในแบบรูปภาพหรือสมการทางคณิตศาสตร์ โดยอาจเลือกใช้สื่อหรือสัญลักษณ์ ดังนี้

- สื่อที่เป็นรูปธรรม (Concrete Application: C) ใช้วัตถุจริงหรือสื่อเสมือนจริง

- สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง (Semiconcrete Application: S) วาดรูปภาพแผนภาพ หรือเขียนตารางแสดงความหมาย

- สัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม (Abstract Application: A) หานัยทั่วไปนำเสนอให้อยู่ในรูปนิพจน์ของพีชคณิต หรือเขียนสมการเชิงพีชคณิต

ขั้นที่ 3 A การหาคำตอบของโจทย์ปัญหา ดำเนินการหาคำตอบที่ถูกต้องตามขั้นที่ 2

ขั้นที่ 4 R ทบทวนคำตอบ ดำเนินการดังนี้

1. อ่านโจทย์ปัญหาล้ำอีกครั้ง
2. ถามคำถามต่อตนเองว่า “คำตอบที่ได้สอดคล้องกับข้อมูลและเงื่อนไขที่กำหนดในปัญหาหรือไม่”
3. ตรวจสอบคำตอบ

ครูสามารถใช้ใบงานที่ประกอบด้วยขั้นตอนและขั้นตอนย่อยของกลวิธี STAR เพื่อให้นักเรียนสามารถควบคุมตนเองให้แก่ปัญหาได้ทุกขั้นตอน และช่วยจำขั้นตอนในการแก้ปัญหา Maccini กล่าวว่า กลวิธีการสอนที่มีประสิทธิภาพและมีประสิทธิผลนั้นต้องช่วยนักเรียนได้เรียนรู้ข้อมูลทั่ว ๆ ไป และเรียนรู้ข้อมูลที่ต้องจำกัดเวลา นักเรียนมีความคงทนในการเรียนและเรียนรู้ได้ดีขึ้นอยู่กับตัวแปรของการสอน เช่น การทบทวน การใช้ครูเป็นตัวแบบ การชี้แนะแบบฝึกหัด การทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง ให้ผลย้อนกลับและทบทวนเป็นระยะ ๆ ก็จะช่วยให้การใช้กลวิธีในการสอนประสบความสำเร็จ

การสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR อาจเลือกใช้สื่อหรือสัญลักษณ์ดังนี้ สื่อที่เป็นรูปธรรม (Concrete) สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง (Semiconcrete) และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม (Abstract) หรือใช้ CSA แทนสื่อหรือสัญลักษณ์ทั้งสามประเภทดังกล่าว สำหรับสื่อที่เป็นรูปธรรมเป็นการใช้วัตถุ 3 มิติที่สามารถจับต้องได้ในการแสดงความหมายของโจทย์ปัญหา หากคำตอบได้ สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง เป็นการแสดงความหมายโจทย์ปัญหา โดยการวาดภาพ เขียนแผนภาพ เขียนตาราง และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรมเป็นการแสดงความหมายโดยใช้สัญลักษณ์ทางจำนวน หานัยทั่วไป นำเสนอให้อยู่ในรูปนิพจน์ของพีชคณิต หรือเขียนสมการเชิงพีชคณิต การใช้สื่อหรือสัญลักษณ์ทั้งสามประเภทดังกล่าวช่วยให้นักเรียนเข้าใจเรียนรู้ด้วยความหมายมากขึ้น

2.4.2 แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR

การสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ทั้ง 4 ขั้น สอดคล้องกับกระบวนการแก้ปัญหของโพลยาทั้ง 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 ศึกษาโจทย์ปัญหา (Search the Word Problem) สอดคล้องกับกระบวนการแก้ปัญหของโพลยาขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the Problem)

ขั้นที่ 2 แปลงข้อมูลที่มีอยู่ในโจทย์ปัญหา (Translate the Problem) สอดคล้องกับกระบวนการแก้ปัญหของโพลยาขั้นที่ 2 การวางแผน (Devising a Plan)

ขั้นที่ 3 หาคำตอบของโจทย์ปัญหา (Answer the Problem) สอดคล้องกับกระบวนการแก้ปัญหของโพลยาขั้นที่ 3 การดำเนินการตามแผน (Carrying Out the Plan) เพื่อให้ได้คำตอบ

ขั้นที่ 4 ทบทวนคำตอบ (Review the Solution) สอดคล้องกับกระบวนการแก้ปัญหของโพลยาขั้นที่ 4 การตรวจย้อนกลับ (Looking Back)

สำหรับการใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR นั้น Gagnon และ Krezmien [43] กล่าวว่า การใช้สื่อหรือสัญลักษณ์ทั้งสามประเภทดังกล่าวพัฒนามาจากทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์ (Bruner) ที่เน้นการสอนให้โอกาสผู้เรียนเรียนรู้โครงสร้างของความรู้ อันจะนำมาซึ่งความเข้าใจและการถ่ายโยงการเรียนรู้ โดยผู้วิจัยนำเสนอรายละเอียดทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์ อันเป็นพื้นฐานในการใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์

เจอร์โรม บรูเนอร์ (Jerome Bruner) อังโน นูตริยา จิตตารมย์ [44] เป็นนักจิตวิทยาที่สนับสนุนการเรียนรู้ตามแนวปัญญานิยม ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้โดยเชื่อว่า “เด็กทุกระดับชั้นของการ

พัฒนาสามารถเรียนรู้เนื้อหาวิชาได้ก็ได้ ถ้าจัดการสอนให้เหมาะสมกับความสามารถของเด็ก”ความสนใจของบรูเนอร์อยู่ที่การช่วยให้ครูพัฒนาการเรียนรู้และการคิดของผู้เรียน ในการทำความเข้าใจ ทฤษฎีของบรูเนอร์จำเป็นต้องเข้าใจสาระต่อไปนี้

1. ขั้นตอนการเรียนรู้ (Modes of Learning)

บรูเนอร์มองเห็นว่าพัฒนาการของความรู้ความเข้าใจของคนเรามีสามขั้นตอนซึ่งแต่ละขั้นตอนจะเรียนรู้ด้วยวิธีการที่ต่างกันและขั้นต่ำกว่าจะเป็นฐานของขั้นที่สูงกว่า บรูเนอร์จึง

เสนอว่า การที่จะเรียนรู้ในขั้นต่อไปได้นั้นควรจะเรียนในขั้นที่ผ่านมาให้แน่นแฟ้นเสียก่อน ขั้นตอนการเรียนรู้ทั้งสามประกอบด้วย

- ขั้นการกระทำ (Enactive Mode) การเรียนรู้ด้วยการกระทำวิธีการเรียนรู้จะผ่านทาง การแสดงออก การเลียนแบบ หรือการลงมือทำกับวัตถุ มีประสบการณ์โดยตรงจากการจับต้อง สำรวจ สิ่งแวดล้อม เด็ก ๆ ส่วนใหญ่จะเรียนรู้โดยผ่านฐานนี้ หรือผู้ใหญ่ก็จะใช้ฐานนี้เรียนรู้งานที่ต้องใช้ทักษะทางกายที่ซับซ้อน ในการสอนเด็กผู้สอนควรจะใช้วิธีการสาธิตเท่า ๆ กับการใช้อุปกรณ์ต่าง ๆ การสวมบทบาท การใช้ตัวแบบ และการให้พฤติกรรมตัวอย่าง

- ขั้นจินตนาการ (Iconic Mode) การเรียนรู้โดยการใช้รูปภาพหรือวาดภาพในใจ เนื่องจากเด็ก ต้องเรียนความคิดรวบยอด กฎ และหลักการ ซึ่งไม่อาจแสดงให้เห็นได้ง่าย ๆ ดังนั้นผู้สอนจึงต้องจัดหา ภาพ แผนภูมิหรือตาราง ซึ่งเชื่อมโยงกับสิ่งที่ต้องเรียนรู้มาให้ผู้เรียนปกคิแล้วการเรียนรู้ตามขั้นนี้จะใช้เวลา น้อยกว่าขั้นการกระทำ มีสิ่งที่ประเด็นปัญหาในการสอนตามขั้นนี้คือ เรื่องของการใช้ โสตทัศนูปกรณ์เป็นเครื่องช่วยสอน บรูเนอร์เสนอให้ใช้ภาพนิ่ง โทรทัศน์ ภาพเคลื่อนไหว หรืออื่น ๆ ที่ คล้ายกันในการสอน เนื่องจากช่วยให้เด็กเกิดประสบการณ์ แต่ขณะเดียวกันก็มีข้อควรระวัง คือ หาก เลือกแบบที่ไม่สอดคล้องกับสิ่งที่เรียนรู้นอกจากจะไม่ช่วยให้เกิดความรู้ความเข้าใจใดแล้วยังเป็น การสิ้นเปลืองมากอีกด้วย

- ขั้นสัญลักษณ์ (Symbolic Mode) การเรียนรู้โดยการใช้สัญลักษณ์ เป็นขั้นที่เด็กสามารถจะ เข้าใจการเรียนรู้สิ่งที่เป็นนามธรรมต่าง ๆ ได้ เป็นขั้นสูงสุดของการพัฒนาทางด้านความรู้ ความเข้าใจ เด็กสามารถคิดหาเหตุผล และในที่สุดจะเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรมได้

2. หลักการพื้นฐานทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์

บรูเนอร์ได้ให้หลักการพื้นฐานของตัวแปรที่สำคัญของการสอนและการเรียนรู้ดังต่อไปนี้

- บุคคลแต่ละบุคคลมีวัฒนธรรมของตน เพราะตั้งแต่แรกเกิดทุกคนได้รับการถ่ายทอด วัฒนธรรมจากผู้ใหญ่ที่อยู่รอบ ๆ เช่น บิดามารดา เป็นต้น

- ความรู้ ครูควรจะใช้เครื่องมือ (ทักษะ) แก่นักเรียนที่จะใช้แก้ปัญหาหรือหาคำตอบได้ การศึกษาควรจะเน้นความสำคัญของวิชาทุกวิชา

- กระบวนการที่จะได้มาซึ่งความรู้ บรูเนอร์บ่งว่าการเรียนรู้เพื่อได้มาซึ่งความรู้ประกอบด้วยกระบวนการ 3 อย่าง คือ 1) การเรียนรู้ เกิดจากกระบวนการเปรียบเทียบความรู้ที่ได้มาหรือรับจากข้อมูลข่าวสารหรือสารสนเทศใหม่ ๆ กับสิ่งที่มีอยู่แล้ว และปรับปรุงให้ดีขึ้น 2) การเรียนรู้ เกิดจากกระบวนการเปลี่ยนแปลง (Transform) ข้อมูลข่าวสารที่ได้รับมาให้เข้ากับที่มีอยู่ 3) กระบวนการประเมินความสำคัญของความรู้ที่ได้รับใหม่ ว่าเหมาะสมกับงานที่ทำอยู่หรือไม่ การประเมินต้องอาศัยการวินิจฉัยที่ถูกต้อง

3. การเรียนรู้แบบค้นพบ (Discovery Learning)

การเรียนรู้แบบค้นพบ เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่มีฐานอยู่บนสิ่งที่มีรูปธรรมและการแสดงพฤติกรรมภายนอก เช่น การทดลอง การกระทำกับวัตถุ การใช้สื่ออุปกรณ์ต่าง ๆ ในการเรียนรู้ เป็นต้น บรูเนอร์ให้ความเห็นว่าผู้เรียนจะเรียนได้ดีที่สุดโดยอาศัยการเรียนรู้แบบค้นพบนั่นคือ เมื่อเกิดการเข้าใจเรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างทันทีทันใด ดังนั้นครูจึงควรกระตุ้นให้ผู้เรียนค้นพบโครงสร้างของสิ่งที่กำลังเรียนรู้อยู่โดยให้ความสนใจไปยังแนวคิดหรือความสัมพันธ์ระหว่างกันและกัน ผู้เรียนจะเรียนรู้ได้ดีหากสามารถยึดกุมแนวคิดแทนที่จะท่องจำรายละเอียดของสิ่งที่เรียน เพื่อช่วยให้เกิดการเรียนรู้แบบค้นพบครูอาจกระตุ้นผู้เรียนให้ใช้การเดาอย่างฉลาด หมายถึง การเดานั้นต้องมีฐานอยู่บนข้อมูลเชิงประจักษ์หรือครูอาจใช้เทคนิคการค้นพบแบบแนะแนว คือ สร้างบรรยากาศซึ่งช่วยให้ผู้เรียนได้ค้นพบและค้นหาความสัมพันธ์

4. หลักการสอน บรูเนอร์ได้เสนอหลักการที่เกี่ยวกับการสอนไว้ 4 ประการ ดังนี้

- หลักของการจูงใจ (Motivation) หลักการนี้เน้นว่า การเรียนรู้จะขึ้นอยู่กับความพร้อมและแนวโน้มที่ผู้เรียนมีท่าทีต่อการเรียนรู้ บรูเนอร์ให้ความเห็นว่าธรรมชาติของเด็กมีความอยากรู้อยากเห็นอยู่แล้ว ผู้สอนควรใช้ธรรมชาตินี้ให้เป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอน การสอนที่มีประสิทธิภาพจะเกิดได้ก็ต่อเมื่อครูมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีกับนักเรียน ครูจะต้องเป็นต้นแบบ (Model) ที่ดีตั้งแต่ทัศนคติของครูที่มีต่อการสอน การเรียนรู้ และมีความเชื่อว่าผู้เรียนมีแรงจูงใจภายใน (Self-Motivation) และมีความอยากรู้อยากเห็นอยากค้นพบสิ่งที่อยู่รอบ ๆ คน ด้วยตนเองฉะนั้นครูมีหน้าที่สำคัญที่จะจัดสิ่งแวดล้อมในห้องเรียน เพื่อให้ให้นักเรียนมีโอกาสที่จะสำรวจค้นพบและควรหาโอกาสสนับสนุนให้นักเรียนมีความมั่นใจในตนเอง บรูเนอร์กล่าวว่าความสัมพันธ์ระหว่างครูและนักเรียนก็มีอิทธิพลต่อแรงจูงใจและความเต็มใจที่จะเรียนรู้ของนักเรียน

- หลักของโครงสร้าง (Structure) หลักการนี้เน้นว่า การเรียนรู้สามารถเพิ่มพูนได้โดยการเลือกวิธีการสอนที่เหมาะสมกับระดับพัฒนาการสติปัญญา และระดับความเข้าใจของเด็ก หลักการนี้ชี้ให้เห็นว่า ครูควรจะต้องอย่าให้เห็นความสัมพันธ์ที่มีความหมายระหว่างสิ่งที่เด็กจะต้องเรียนกับสิ่งที่เรียนรู้ไปแล้ว การจัดโครงสร้างของบทเรียน จะต้องให้เหมาะสมกับวัยของเด็กและธรรมชาติของ

บทเรียนแต่ละหน่วย ครูควรแนะนำให้นักเรียนเห็นหรือค้นคว้าความสัมพันธ์ของสิ่งที่นักเรียนต้องการจะเรียนรู้ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญ นอกจากนี้ครูควรตรวจสอบความรู้พื้นฐานที่นักเรียนจำเป็นต้องมีเพื่อค้นพบความรู้ใหม่ ถ้าปรากฏว่านักเรียนขาดความรู้พื้นฐานที่ควรจะมี ครูควรแนะนำให้นักเรียนเรียนรู้ความรู้พื้นฐานก่อนที่จะเริ่มหน่วยเรียนใหม่

- หลักของการเรียงลำดับ (Sequence) หลักการนี้เน้นว่า ลำดับของเนื้อหาที่มีอิทธิพลอย่างมากต่อการเรียนรู้ว่าเกิดได้ง่ายหรือยากแค่ไหน การเรียงลำดับในที่นี้หมายถึง การจัดลำดับระหว่างหน่วยย่อยและหน่วยใหญ่ของสิ่งที่ต้องเรียนรู้ภายในเนื้อหาหนึ่ง ๆ ของวิชาเดียวกัน ระหว่างเนื้อหาของวิชาเดียวกันหรือระหว่างเนื้อหาของวิชาหนึ่งกับอีกวิชาหนึ่ง ซึ่งการเรียงลำดับจะเริ่มจากง่ายไปยาก แม้ว่า การเรียงลำดับที่กล่าวถึงจะเป็นเรื่องที่ทำได้ค่อนข้างยาก โดยเฉพาะระหว่างวิชาแต่การพยายามทำในเรื่องนี้จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ตามที่ต้องการการจัดลำดับความยากง่ายของบทเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ บรูเนอร์เสนอแนะให้ครูกำหนดถึงพัฒนาการทางสติปัญญาของผู้เรียน ซึ่งมีลำดับขั้นขึ้นกับสิ่งแวดล้อมวัฒนธรรมของนักเรียนแต่ละคนทั้งนี้อาจจะทำให้ช้าหรือเร็วได้

- หลักของแรงเสริมด้วยตนเอง (Self-Reinforcement) บรูเนอร์ถือว่าแรงเสริมด้วยตนเองมีความหมายต่อผู้เรียนมากกว่าแรงเสริมภายนอก ครูควรจะให้ข้อมูลย้อนกลับแก่นักเรียนว่าทำถูกหรือผิด เพื่อว่าผู้เรียนจะได้ทราบถึงผลการทำงานของตนเองแต่ไม่ควรจะเน้นการทำถูกเท่านั้นเพราะการทำผิดก็เป็นส่วนหนึ่งของการเรียนรู้การนำทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์ไปประยุกต์ใช้ทฤษฎีนี้ให้แนวคิดที่คนเราจะเรียนรู้ได้ดี หากสิ่งที่เรียนนั้นมีความหมายและถูกจัดให้มีโครงสร้างที่เหมาะสม ผู้สอนจึงอาจช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ได้ดีขึ้นโดย

- ผู้สอนควรใช้คำถามหลาย ๆ ประเภทในการทดสอบ และในการทบทวนความรู้ที่เรียนไปแล้ว เพื่อจะได้ลดทอนการเรียนรู้โดยอาศัยความจำ

- ก่อนหน้าที่จะสอนบทเรียนใหม่จำเป็นที่ผู้สอนต้องทราบถึงสิ่งที่ผู้เรียนมีติดตัวมาก่อน เพราะผู้เรียนจะเชื่อมโยงทั้งสองสิ่งเข้าด้วยกัน

- ใ้งานผู้เรียนโดยที่งานนั้น ต้องให้ผู้เรียนได้เรียบเรียงลำดับความคิดและข้อมูลข่าวสารในการทำ เช่น การเขียนเค้าโครงเรียงความ การตอบคำถามที่มีลักษณะของการบรรยาย โดยผู้สอนจะตรวจสอบลำดับการจัดเรียงความคิดและข้อมูลอธิบายหรือแก้ไขให้ผู้เรียนเข้าใจชัดเจน

- สำหรับการเรียนรู้ที่ค่อนข้างซับซ้อนเป็นนามธรรม และผู้เรียนไม่คุ้นเคยมาก่อนผู้สอนควรใช้การเรียบเรียงแบบก้าวหน้าเข้าช่วยซึ่งเป็นการจัดระบบสิ่งที่จะเรียนไว้ล่วงหน้าและเรียงตามมโนทัศน์ที่ผู้เรียนต้องเรียนรู้เพื่อให้เกิดความเข้าใจ

- เตรียมแผนการเรียนการสอนตลอดหน่วยหรือรายวิชาเพื่อสะดวกในการเชื่อมโยงสิ่งที่จะต้องสอนในช่วงต่าง ๆ เข้าด้วยกัน

- ให้ผู้เรียน ได้แสดงการเรียนรู้ของตนออกมาด้วยภาษาถ้อยคำ และภาษาท่าทาง

- กระตุ้นผู้เรียนให้รู้จักจัดจำแนกประเภทสิ่งที่เรียนให้อยู่ในกลุ่ม ทั้งสิ่งที่คล้ายกันและต่างกัน

ทฤษฎีของบรูเนอร์กับการศึกษาคณิตศาสตร์

ทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์มีจุดมุ่งหมายในการพัฒนาความคิดของคน มิใช่สอนเพื่อให้ท่องจำ แต่สอนให้นักเรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผล ช่วยให้นักเรียนเข้าใจ และสามารถประยุกต์สิ่งที่เรียนไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ซึ่งมีประโยชน์มากในการจัดการเรียนการสอน ดังที่ อัมพร ม้าคะนอง อ้างใน นุศรียา จิตดารมย์ [37] กล่าวว่า แนวคิดของบรูเนอร์ที่นับว่ามีประโยชน์มากต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ คือ แนวคิดที่กล่าวว่ามนุษย์สามารถคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์เฉพาะใด ๆ ได้ใน 3 ชั้น คือขั้นการกระทำ ขั้นจินตนาการ และขั้นสัญลักษณ์ ซึ่งแนวคิดนี้ถูกแปลความหมายและนำไปใช้อย่างกว้างขวางในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในขั้นของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ขั้นการกระทำ กิจกรรมคณิตศาสตร์จะเกี่ยวข้องกับการให้เด็กได้รับประสบการณ์ตรงจากการสัมผัสกับสื่อและวัตถุจริง ในขั้นจินตนาการ ครูอาจใช้สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง เช่น ฟิล์มรูปภาพ แผนภาพ ที่นักเรียนสามารถมองเห็นด้วยตา สำหรับในขั้นสัญลักษณ์ เป็นระดับที่ผู้เรียนจะสามารถใช้สัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรมแทนสิ่งที่เป็วัตถุจริง จะเห็นว่าแนวคิดของการเรียนรู้ 3 ระดับนั้นเหมาะสมกับการนำไปใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งมีลักษณะเป็นนามธรรม แต่ต้องการให้เด็กเข้าใจความหมายและที่มาของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตามบรูเนอร์เห็นว่า ความพร้อมที่จะเรียนขึ้นอยู่กับพัฒนาการทางสติปัญญา ซึ่งสอดคล้องกับงานของเพียเจต์ที่กล่าวว่า สิ่งสำคัญที่สุดของการสอนมโนทัศน์พื้นฐานคือการช่วยเหลือให้เด็กสามารถพัฒนาจากการคิดเชิงรูปธรรมไปสู่การคิดที่ต้องใช้ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์มากขึ้น บรูเนอร์จึงเสนอแนะว่าความพร้อมขึ้นอยู่กับการผสมผสานของวิธีเรียนรู้ทั้ง 3 ชั้น มากกว่าการรอคอยให้เด็กพัฒนาความสามารถที่จะเรียนได้เอง

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม ในขั้นที่ 2 การแปลงข้อมูลที่มีอยู่ในโจทย์ปัญหาไปสู่สมการในแบบรูปภาพ หรือสูตรทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม ใช้วัตถุจริงหรือสื่อเสมือนจริงแสดงความหมายของโจทย์สอดคล้องกับขั้นการกระทำ ของขั้นการเรียนรู้ทฤษฎีของบรูเนอร์ การใช้สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง วาดรูปภาพ แผนภาพ แสดงความหมายสอดคล้องกับขั้นจินตนาการ ของขั้นการเรียนรู้ทฤษฎีของบรูเนอร์ และ การใช้สัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม หาน้อยทั่วไป นำเสนอให้อยู่ในรูปนิพจน์ของพีชคณิต หรือเขียนสมการหรือสูตรเชิงพีชคณิตสอดคล้องกับขั้นสัญลักษณ์ ของขั้นการเรียนรู้ทฤษฎีของบรูเนอร์

2.4.3 ขั้นตอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ในการเรียนการสอน

ขั้นตอนการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR มีดังนี้

1. ก่อนเริ่มบทเรียน ครูควรจะทดสอบก่อนเรียนเพื่อดูพื้นฐานทักษะทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน
2. ครูแนะนำกลวิธีที่ใช้ในการสอน ขั้นตอนของกลวิธีซึ่งจะช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา
3. นักเรียนควรจำขั้นตอนและขั้นตอนย่อยของกลวิธี เพื่อสามารถนำมาใช้ได้อย่างรวดเร็ว

การสอนแก้ปัญหาโดยใช้กลวิธี STAR ครูจะเป็นตัวแบบที่ดีในการใช้กลวิธีแก้ปัญหา บทบาทของครูในการสอนแก้ปัญหา Maccini และ Gagnon [13] ได้เสนอไว้ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงพฤติกรรมของครูในขั้นตอนการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ในชั้นเรียน

ขั้นตอน	พฤติกรรมของครู
ขั้นที่ 1 บทนำ	ครูให้คำแนะนำสิ่งที่เป็นภาพรวมทั่วไปโดยการเชื่อมโยงเนื้อหาใหม่กับทักษะที่เรียนผ่านมาแล้วให้นักเรียนมองเห็นความสำคัญของเนื้อหาที่จะเรียน โดยอาจเชื่อมโยงกับบทบาทในชีวิตจริง
ขั้นที่ 2 ให้ครูเป็นแบบอย่างในการใช้กลวิธี	เริ่มต้นปัญหาโดยครูใช้การคิดออกเสียงเพื่อเป็นตัวอย่างสำหรับนักเรียน เช่น อ่านโจทย์ปัญหาออกเสียงแล้วตรวจสอบทำเครื่องหมายตามลำดับขั้นในใบงานตามกลวิธี STAR ดังนี้ S : ศึกษาโจทย์ปัญหา แยกแยะประเด็นของปัญหา T : แปลงข้อมูลที่มีอยู่ในโจทย์ปัญหาไปสู่สมการในแบบรูปภาพหรือสมการทางคณิตศาสตร์ A : หาคำตอบของโจทย์ปัญหา R : ทบทวนคำตอบ
ขั้นที่ 3 ให้แบบฝึกหัดที่มีการแนะนำ	ครูให้แบบฝึกหัดเป็นใบงานที่การแนะนำตามขั้นตอนแล้วให้ออกาสนักเรียนได้ฝึกกลวิธี โดยลดบทบาทครูจนกระทั่งนักเรียนสามารถปฏิบัติงานได้ด้วยตนเอง
ขั้นที่ 4 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดอย่างอิสระ	ครูให้แบบฝึกหัดที่นักเรียนต้องหาคำตอบด้วยตัวเองไม่มีคำแนะนำ ครูให้นักเรียนคิดด้วยตัวเอง
ขั้นที่ 5 ให้ผลย้อนกลับทางบวกและถูกต้อง	ให้ผลย้อนกลับทางบวก โดยดูการปฏิบัติงานของนักเรียน เช่น เปอร์เซนต์ความถูกต้อง ในการคำนวณ เป็นต้น ให้ผลย้อนกลับคำตอบที่ผิดพลาดอาจจะสอนใหม่ถ้าจำเป็น แล้วให้แบบฝึกหัดที่คล้ายคลึงกับปัญหาเดิมและสังเกตการปฏิบัติงานของนักเรียนสุดท้ายให้ผลย้อนกลับทางบวก

Miller [9] ให้ข้อควรพิจารณาในการใช้กลวิธีการสอนในชั้นเรียนดังนี้

1. เรียนรู้บุคลิกลักษณะของนักเรียนแต่ละคนทั้งพฤติกรรมและพื้นฐานด้านความรู้ การสอนโดยใช้กลวิธีควรตระหนักถึงบุคลิกลักษณะของนักเรียนแต่ละคน เช่น บางคนอาจจะชอบเขียนเส้นเน้นข้อความในขณะที่อ่าน โจทย์ปัญหาออกเสียง ขณะที่บางคนอาจจะชอบอ่าน โจทย์ปัญหาในใจหรืออ่านเบา ๆ กระตุ้นนักเรียนให้ทำโจทย์ปัญหาให้ประสบความสำเร็จเพื่อสร้างแรงจูงใจในการเรียน
2. กระตุ้นการใช้กลวิธีเป็นรายบุคคล ควรกระตุ้นให้นักเรียนกล้าที่จะใช้กลวิธีในการหาคำตอบ ทำตามขั้นตอนเพื่อให้ได้คำตอบของโจทย์ปัญหา
3. ประยุกต์การใช้งานทั่ว ๆ ไป เช่น ให้โจทย์ที่มีโครงสร้างเหมือนเดิมแต่มีเรื่องราวแตกต่างออกไป หรือให้โจทย์ที่มีความซับซ้อนไปจาก โจทย์ที่แก้ในชั้นเรียน เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความคงทนในการเรียนและสามารถประยุกต์ใช้กลวิธีในโจทย์ทั่ว ๆ ไปได้

สำหรับขั้นตอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้พัฒนาขั้นตอนโดยรวมบทบาทของนักเรียนและบทบาทของครูไว้ในแต่ละขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 S เป็นขั้นของการศึกษาโจทย์ปัญหา ในขั้นนี้ผู้เรียนจะต้องอ่านโจทย์ปัญหาอย่างละเอียดถี่ถ้วน แล้วถามคำถามต่อตนเองว่า “รู้ข้อเท็จจริงอะไรบ้างจาก โจทย์ปัญหา” “โจทย์ต้องการให้หาอะไร” ผู้สอนสามารถใช้วิธีการคิดออกเสียงในขณะที่แนะนำ โจทย์แก่นักเรียน จากนั้นค่อย ๆ ลดบทบาทตัวเอง เพื่อให้ นักเรียนตอบข้อเท็จจริงที่ได้จาก โจทย์ด้วยตนเอง

ขั้นที่ 2 T การแปลงข้อมูลที่มีอยู่ใน โจทย์ปัญหาไปสู่สมการในแบบรูปภาพหรือ สมการทางคณิตศาสตร์ โดยอาจเลือกใช้สื่อหรือสัญลักษณ์ ดังนี้

- สื่อที่เป็นรูปธรรม ใช้วัตถุจริงหรือสื่อเสมือนจริง
- สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง วาดรูปภาพแผนภาพ หรือเขียนตารางแสดงความหมาย
- สัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม หานัยทั่วไป นำเสนอให้อยู่ในรูปนิพจน์ของพีชคณิต หรือเขียน

สมการเชิงพีชคณิต ทั้งนี้จะใช้ครบทั้ง 3 ประเภทหรือไม่ก็ได้แต่ต้องสามารถเขียนสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรมได้ โดยในขั้นนี้ใช้ CSA แทนสื่อหรือสัญลักษณ์ทั้งสามประเภทดังกล่าว ซึ่งผู้เรียนต้องเลือกตัวแปร และระบุการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ให้ถูกต้องสอดคล้องกับ โจทย์ปัญหา ผู้สอนควรให้โอกาสนักเรียนในการฝึกกลวิธีใหม่ลดบทบาทตัวเองจนกระทั่งผู้เรียนสามารถปฏิบัติงานได้ด้วยตนเองอย่างอิสระ

ขั้นที่ 3 A เป็นขั้นการหาคำตอบของ โจทย์ปัญหา ในขั้นนี้ผู้เรียนหาคำตอบที่เหมาะสมและถูกต้องของ โจทย์ปัญหา

ขั้นที่ 4 R เป็นขั้นทบทวนคำตอบ ผู้เรียนอ่านโจทย์ปัญหาซ้ำอีกครั้ง แล้วถามคำถามต่อตนเองว่า “คำตอบที่ได้สอดคล้องกับข้อมูลและเงื่อนไขที่กำหนดในปัญหาหรือไม่” จากนั้นตรวจสอบคำตอบในขั้นนี้ผู้สอนควรให้ผลย้อนกลับทางบวกโดยการปฏิบัติงานของนักเรียน เช่น เปรอ์เซนต์ความถูกต้องในการคำนวณ การนำเสนอผลการคำนวณ เป็นต้น และให้ผลย้อนกลับคำตอบที่ผิดพลาด ถ้านักเรียนหาคำตอบผิดพลาดมากอาจจะสอนใหม่ แล้วให้แบบฝึกหัดที่คล้ายคลึงกับปัญหาเดิมและสังเกตการปฏิบัติงานของนักเรียนการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาลงช่วยให้นักเรียนตัดสินใจและเลือกวิธีแก้ปัญหาคำตอบที่ถูกต้องยิ่งขึ้น

2.5 การประเมินผลความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

โดยส่วนใหญ่ในการประเมินความสามารถของนักเรียนจะใช้วิธีการให้นักเรียนทำแบบทดสอบแบบเลือกตอบ และใช้คินสอทำเครื่องหมายข้อที่ตนเลือกบนกระดาษคำตอบ ซึ่งเป็นวิธีการที่การได้คำตอบที่ถูกต้อง แต่ขาดการแสดงวิธีการคิดของนักเรียน ซึ่ง นูตริยา จิตดารมย์ [37] ได้กล่าวว่า ในการวัดผลทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการทำข้อสอบอัตนัย การตรวจคำตอบของนักเรียนว่าถูกต้องหรือไม่ ถ้าคำตอบถูกต้องจะให้คะแนนเต็ม แต่ถ้าไม่ถูกต้องจะให้ 0 คะแนน แม้ว่าวิธีทำจะมีส่วนถูกต้อง มีผลทำให้นักเรียนเกิดความรู้สึกที่ไม่ดี หรือมีทัศนคติในทางลบต่อวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นการให้คะแนนควรให้คะแนนตามความสามารถของนักเรียนในทุกขั้นตอน โดยเฉพาะการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งจำเป็นต้องให้นักเรียนแสดงขั้นตอนของการคิดคำนวณ ตั้งแต่เริ่มต้นจนถึงขั้นแก้ปัญหาลงสำเร็จ จะต้องให้คะแนนทุกขั้นตอน การที่นักเรียนสามารถแก้ปัญหาลงได้แม้จะไม่ได้คำตอบที่ถูกต้อง 100% ก็สมควรจะให้คะแนนตามความถูกต้องลดหลั่นกันตามความเหมาะสม

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่าน ได้ให้แนวทางทางการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาลงเชิงคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

สมศักดิ์ โสภณพินิจ [40] ได้รวบรวมแนวทางทางการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาลงเชิงคณิตศาสตร์ไว้ ซึ่งนำเสนอเกณฑ์การให้คะแนน 3 แบบดังนี้

แบบที่ 1 การให้คะแนนตามรูปแบบของวอลเตอร์ ซีเทอ (Walter Szetele)

Walter Szetele เสนอการประเมินผลการแก้ปัญหาลงเชิงคณิตศาสตร์ว่า ครูควรประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาลงเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก โดยใช้เกณฑ์คะแนนง่าย ๆ ดังนี้

ให้ 0 คะแนน ถ้าเด็ก ไม่ได้แสดงว่าคิดแก้ปัญหาลงได้เลย กระดาษคำตอบอาจจะว่างเปล่าไม่มีการตอบคำถาม หรือแสดงวิธีแก้ปัญหาลงเอาไว้อย่างไร

ให้ 1 คะแนน ถ้าเด็กได้พยายามตอบคำถาม แต่คำถามที่ให้ไม่มีเหตุผล หรือตอบไม่ตรงคำถาม

ให้ 2 คะแนน ถ้าเด็กแสดงให้เห็นว่ามีความเข้าใจในตัวคำถาม สามารถตอบคำถามได้บ้างแต่ไม่สมบูรณ์ มีวิธีทำที่ยังมีความสับสนอยู่

ให้ 3 คะแนน ถ้าเด็กเข้าใจคำถามได้ดี สามารถตอบคำถามได้ถูกต้อง มีเหตุผลพอสมควร การอ้างอิงถูกต้อง แต่วิธีทำยังขาดความสมบูรณ์ ขาดความสัมพันธ์ระหว่างขั้นตอนต่าง ๆ หรือมีข้อผิดพลาดบกพร่องบ้าง

ให้ 4 คะแนน ถ้าเด็กเข้าใจคำถามดี ตอบคำถามและแสดงวิธีทำในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ มีเหตุมีผลและอ้างอิงถูกต้อง

แบบที่ 2 การให้คะแนนตามรูปแบบของแรนคอลล ชาล์ส (Randall Charles)

Randall Charles ได้เสนอเกณฑ์การให้คะแนนอีกวิธีหนึ่ง ที่เรียกว่าการให้คะแนนแบบแยกส่วน (Analytic Scoring Scale) ในแต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 6 คะแนน ซึ่งแบ่งให้คะแนนออกเป็น 3 ตอน แต่ละตอนมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน ดังนี้

ตอนที่ 1 การประเมินความเข้าใจปัญหา

ให้ 0 คะแนน ถ้าไม่เข้าใจปัญหาเลย

ให้ 1 คะแนน ถ้าเข้าใจปัญหาเพียงบางส่วนหรือเข้าใจไม่ถูกต้อง หรือแปลความหมายตัวปัญหาบางส่วนผิดพลาด

ให้ 2 คะแนน ถ้าเข้าใจตัวปัญหาอย่างถูกต้องสมบูรณ์

ตอนที่ 2 การวางแผนปัญหา

ให้ 0 คะแนน ถ้าไม่ได้มีความพยายามในการวางแผน หรือวางแผนไม่ถูกต้อง ไม่ได้มีแนวทางในการแก้ปัญหาได้เลย

ให้ 1 คะแนน ถ้าการวางแผนมีส่วนถูกต้องอยู่บ้าง สามารถนำปัญหาบางส่วนมากำหนดเป็นขั้นตอน เพื่อใช้วิธีแก้ปัญหาได้

ให้ 2 คะแนน ถ้าสามารถวางแผนแก้ปัญหาได้เหมาะสม นำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างสมบูรณ์

ตอนที่ 3 การได้คำตอบ

ให้ 0 คะแนน ถ้าไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบที่ผิด ๆ หลงทางเนื่องจากการวางแผนที่ผิดพลาดแต่แรก

ให้ 1 คะแนน ถ้ามีการเขียนคำตอบหรือวิธีทำที่ผิด เนื่องจากการลอกใจหัดคำนวณผิด ทำให้ได้คำตอบผิด แต่มีความเข้าใจถูกต้องอยู่บ้าง คำตอบบางส่วนมีความถูกต้อง

ให้ 2 คะแนน ถ้าคำตอบถูกต้อง เขียนอธิบายวิธีทำถูกต้องสมบูรณ์

แบบที่ 3 การให้คะแนนตามรูปแบบของ Randall Charles, Frank Lester และ Phares O'Deffer

Charles และคณะ [35] ได้เสนอวิธีการให้คะแนนที่เรียกว่า การให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic Scoring Scale) โดยกำหนดให้คะแนนเต็ม 4 คะแนน ถ้าสามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องมากน้อยต่าง ๆ กัน จะได้คะแนนลดหลั่นกันตามส่วน ดังนี้

คะแนนที่ให้ 0 ลักษณะของวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบ นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้เลย แม้จะมีรอยขีดเขียนอยู่บ้างก็ไม่ได้หรือลู่ทางที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาได้

คะแนนที่ให้ 1 ลักษณะของวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบ ผู้เรียนมีความเข้าใจในปัญหาโจทย์ได้ถูกต้อง ได้แสดงการคิดคำนวณที่ถูกต้องบ้างเล็กน้อย แสดงให้เห็นว่าเขารู้วิธีทำที่ถูกต้อง แต่ไม่สามารถทำงานสำเร็จได้

คะแนนที่ให้ 2 ลักษณะของวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบ มีวิธีการคำนวณที่ถูกต้อง ได้แสดงวิธีทำอย่างมีเหตุผลแต่รายละเอียดของการคิดคำนวณยังผิดอยู่ ส่วนใหญ่เป็นความผิดจากการเข้าใจผิดหรือมีความบกพร่องในขั้นตอนการคำนวณ

คะแนนที่ให้ 3 ลักษณะของวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบ สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้เกือบถูกต้องสมบูรณ์ วิธีการถูกต้องตามขั้นตอนต่าง ๆ แต่มีข้อผิดพลาดบกพร่องในรายละเอียดบางประการเช่น ไม่ได้ระบุเงื่อนไขที่จะเป็นประกอบคำอธิบาย หรือวิธีทำถูกต้องตลอดทาง แต่วิเคราะห์หรือตอบในขั้นสุดท้ายผิดพลาด

คะแนนที่ให้ 4 ลักษณะของวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบ มีความถูกต้องทั้งวิธีทำ และรายละเอียดของการคิดคำนวณ

สิริพร ทิพย์คง [44] ได้กำหนดการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหา ซึ่งควรจะมีวิธีการที่มากกว่าการได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง มีดังนี้

ตอนที่ 1 ความเข้าใจปัญหา

2 คะแนน สำหรับความเข้าใจปัญหาได้ถูกต้อง

1 คะแนน สำหรับความเข้าใจโจทย์บางส่วนไม่ถูกต้อง

0 คะแนน เมื่อมีหลักฐานที่แสดงว่าเข้าใจน้อยมาก หรือไม่เข้าใจเลย

ตอนที่ 2 การเลือกยุทธวิธีการแก้ปัญหา

2 คะแนน สำหรับการเลือกวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง และเขียนประโยคคณิตศาสตร์ถูก

1 คะแนน สำหรับการเลือกวิธีการแก้ปัญหา ซึ่งอาจจะนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้องแต่ยังมีบางส่วนผิด โดยอาจเขียนประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง

0 คะแนน สำหรับการเลือกวิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง

ตอนที่ 3 การใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหา

2 คะแนน สำหรับการนำยุทธวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง

1 คะแนน สำหรับการนำวิธีการแก้ปัญหาบางส่วนไปใช้ได้ถูกต้อง

0 คะแนน สำหรับการใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง

ตอนที่ 4 การแสดงผลลัพธ์ของการแก้ปัญหา

2 คะแนน สำหรับการตอบคำถามได้ถูกต้อง สมบูรณ์

1 คะแนน สำหรับการตอบที่ไม่สมบูรณ์หรือใช้สัญลักษณ์ผิด

0 คะแนน เมื่อไม่ได้ระบุคำตอบ

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้เกณฑ์การประเมินพัฒนาจากรูปแบบของแรนดอล ชาร์ลส์ (Randall Charles) และ นวลจันทร์ ผมอดทา อังโน นุตริยา จิตตารมย์ [37] และ สิริพร ทิพย์คง [44] โดยใช้เกณฑ์ 2 แบบ คือ แบบที่ 1 สำหรับนักเรียนที่แก้ปัญหาโดยใช้กลวิธีอื่น ๆ ที่ไม่ใช่สูตร และแบบที่ 2 สำหรับนักเรียนที่ใช้สูตรในการหาคำตอบ แบบสอบมีคะแนนเต็มข้อละ 10 คะแนน โดยแต่ละข้อจะประกอบด้วย 3 ส่วน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

แบบที่ 1 เกณฑ์การให้คะแนนสำหรับโจทย์ปัญหาเรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ สำหรับนักเรียนที่แก้ปัญหาโดยใช้กลวิธีอื่น ๆ ที่ไม่ใช่สูตร

ส่วนที่ 1 ประกอบด้วยโจทย์ปัญหาเรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ และคำถามเพื่อให้นักเรียนสามารถบอกสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ มีคะแนนเต็ม 2 คะแนน เกณฑ์การตรวจให้ คะแนนมี 3 ลักษณะ คือ

ให้ 0 คะแนน ในกรณีไม่ได้ตอบคำถามหรือตอบผิดหมดในตอนนั้น

ให้ 1 คะแนน ในกรณีที่ตอบคำถามได้บ้างหรือตอบได้ครึ่งหนึ่งของตอนนั้น

ให้ 2 คะแนน ในกรณีตอบถูกต้อง

ส่วนที่ 2 ประกอบด้วยการแสดงวิธีทำเพื่อคิดหาคำตอบซึ่งจะมีวิธีการในการหาคำตอบได้หลายวิธี มีคะแนนเต็ม 6 คะแนน เกณฑ์การตรวจให้คะแนนมี 3 ลักษณะ คือ

ให้ 0 คะแนน ถ้าแสดงวิธีทำผิดหรือไม่ตอบเลย

ให้ 3 คะแนน ถ้าแสดงวิธีทำถูกต้องบางส่วนไม่ว่าจะทำวิธีใดก็ตาม

ให้ 6 คะแนน ถ้าแสดงวิธีทำถูกต้องครบถ้วนอย่างน้อย 1 วิธี หรืออาจจะทำวิธีอื่น และทำได้ถูกต้อง

ส่วนที่ 3 ประกอบด้วยการสรุปคำตอบมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน

ให้ 0 คะแนน ถ้าตอบผิดหรือไม่ตอบเลย

ให้ 2 คะแนน ถ้าตอบถูกต้องครบถ้วน

แบบที่ 2 เกณฑ์การให้คะแนนสำหรับโจทย์ปัญหาเรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ โดยใช้สูตรในการหาคำตอบ เป็นดังนี้

ส่วนที่ 1 ประกอบด้วยโจทย์ปัญหา และคำถามเพื่อให้นักเรียนสามารถบอกสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ มีคะแนนเต็ม 2 คะแนน เกณฑ์การตรวจให้คะแนน เป็นดังนี้

ให้ 0 คะแนน ในกรณีไม่ได้ตอบคำถามหรือตอบผิดหมดในตอนนั้น

ให้ 1 คะแนน ในกรณีที่ตอบคำถามได้บ้างหรือตอบได้ครั้งหนึ่งของตอนนั้น

ให้ 2 คะแนน ในกรณีตอบถูกหมด

ส่วนที่ 2 ประกอบด้วยการแสดงวิธีทำเพื่อคิดหาคำตอบซึ่งใช้การแก้สมการในการหาคำตอบ มีคะแนนเต็ม 6 คะแนน เกณฑ์การตรวจให้คะแนน เป็นดังนี้

ให้ 1 คะแนน ถ้ากำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่โจทย์ให้หาได้

ให้ 2 คะแนน ถ้าสร้างสมการหรือประโยคที่เขียนแสดงความเท่ากันได้

ให้ 2 คะแนน ถ้าแก้สมการได้ถูกต้อง

ให้ 1 คะแนน ถ้าตอบคำตอบที่โจทย์ต้องการได้

ส่วนที่ 3 ประกอบด้วยการสรุปคำตอบมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน เกณฑ์การตรวจให้คะแนน เป็นดังนี้

ให้ 0 คะแนน ถ้าตอบผิดหรือไม่ตอบเลย

ให้ 2 คะแนน ถ้าตอบถูกต้องครบถ้วน

2.6 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

2.6.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดังนี้

Wilson [45] กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึงความสามารถทางสติปัญญา (Cognitive domain) ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ซึ่งเป็นผลของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ประเมินพฤติกรรมด้านสติปัญญาในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ออกมาเป็นระดับความสามารถ

Good [19] ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ความรู้ที่ได้รับและทักษะที่พัฒนาจากการเรียนในสถานศึกษาตามปกติวัดจากคะแนนที่ครูเป็นผู้ให้หรือจากแบบทดสอบหรืออาจรวมทั้งคะแนนที่ครูเป็นผู้ให้และคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบ

นิภา เมธาวีชัย [46] กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หมายถึง ความรู้และทักษะที่ได้รับ การพัฒนามาจากการเรียนการสอนวิชาต่าง ๆ ครูอาศัยเครื่องมือวัดผลช่วยในการศึกษาว่านักเรียนมีความรู้และทักษะมากน้อยเพียงใด

อารีย์ คงสวัสดิ์ [47] กล่าวว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หมายถึง ความสำเร็จความสมหวัง ในด้านการเรียนรู้ รวมทั้งด้านความรู้ ความเข้าใจ ความสามารถและทักษะทางด้านวิชาการของแต่ละบุคคลที่ประเมินได้จากการทำแบบทดสอบหรือการทำงานที่ได้รับมอบหมาย และการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนั้นจะทำให้แยกกลุ่มของนักเรียนที่ถูกประเมินออกเป็นระดับต่าง ๆ เช่น สูง กลางและต่ำ เป็นต้น

อัญชญา โปธิพลากร [48] กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึงความสามารถในการเรียนรู้ของนักเรียนจากการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งประเมินได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบทดสอบนั้นสอดคล้องกับพฤติกรรมด้านความรู้ความคิด

ณยศ สงวนสิน [49] ให้ความหมาย ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถ หรือ ความสำเร็จในด้านต่าง ๆ เช่น ความรู้ ทักษะในการแก้ปัญหาความสามารถในการนำไปใช้ และการวิเคราะห์ เป็นต้น รวมถึงประสิทธิภาพที่ได้จากการเรียนรู้ ซึ่งได้รับจากการสอน การฝึกฝน หรือ ประสบการณ์ต่างๆ ซึ่งวัดได้จากการตอบแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สร้างขึ้น

ธารินี อยู่เสน [50] ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ว่า ผลที่ผู้เรียนได้รับจากการเรียน การสอน หรือทักษะที่ได้พัฒนาขึ้นมาตามลำดับในการเรียนรู้และฝึกปฏิบัติในสาขาวิชาต่าง ๆ ซึ่งมีองค์ประกอบที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กับหลายด้าน ซึ่งผู้เรียนมีระดับความสามารถแตกต่างกันออกไป วัดได้จากเครื่องมือวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งเครื่องมือที่ใช้โดยมากจะใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เครื่องมือวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

จำปี นิลอรุณ [51] กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึงความสามารถ หรือ ความสำเร็จในด้านต่าง ๆ เช่น ความรู้ ทักษะในการแก้ปัญหา ความสามารถในการนำไปใช้ และการวิเคราะห์ เป็นต้น รวมถึงประสิทธิภาพที่ได้จากการเรียนรู้ซึ่งได้รับมาจากการสอนการฝึกฝน หรือ ประสบการณ์ต่าง ๆ ซึ่งวัดได้จากการตอบแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สร้างขึ้น

จากความหมายที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ผลที่ผู้เรียนได้รับจากการเรียน การสอน หรือทักษะที่ได้พัฒนาขึ้นมาตามลำดับขั้นในการเรียนรู้และฝึกปฏิบัติในสาขาวิชาต่าง ๆ ซึ่งมีองค์ประกอบที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันหลายด้าน ซึ่งผู้เรียนมีระดับความสามารถแตกต่างกันออกไป วัดได้จากเครื่องมือวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ซึ่งแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนั้นสอดคล้องกับพฤติกรรมด้านความรู้ความคิด (Cognitive domain) ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ตามที่ Wilson [45] จำแนกไว้เป็น 4 ระดับ คือ

1. ด้านความรู้ความจำด้านคิดคำนวณ (Computation) เป็นการวัดเกี่ยวกับทักษะในการคำนวณได้แก่ การวัดความรู้ ความจำแบบง่าย ๆ เกี่ยวกับสิ่งที่ผู้เรียนได้เรียนผ่านไปแล้ว เป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับพื้นฐานแรกสุด แบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน คือ

- ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific Facts) คำถามที่วัดความสามารถในระดับนี้จะเกี่ยวกับข้อเท็จจริง ตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สั่งสมมาเป็นระยะเวลานานแล้ว

- ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และนิยาม (Knowledge of Terminology) เป็นความสามารถในการระลึกหรือจำศัพท์และนิยามต่าง ๆ ได้โยคำถามอาจจะถามโดยตรงหรือโดยอ้อมก็ได้แต่ไม่ต้องอาศัยการคิดคำนวณ

- ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability to Carry out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้วมาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยได้เรียนรู้มาแล้ว ข้อสอบวัดความสามารถในด้านนี้ต้องเป็น โจทย์ง่าย ๆ คล้ายคลึงกับตัวอย่าง นักเรียนไม่ต้องพบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ด้านความเข้าใจ (Comprehension) เป็นความสามารถในการนำความรู้ที่ได้เรียนมาแล้วมาสัมพันธ์กับโจทย์หรือปัญหาใหม่ แบ่งเป็น 6 ขั้น คือ

- ความรู้เกี่ยวกับมโนคติ (Knowledge of Concept) เป็นความสามารถในการนำข้อเท็จจริงที่ได้เรียนมาแล้วมาสัมพันธ์แล้วสรุปความหมายตามความเข้าใจตนเอง

- ความรู้เกี่ยวกับหลักการ กฎ และการสรุปอ้างอิงทั่วไป (Knowledge of Principles, Rule and Generalization) เป็นความสามารถในการเอานำหลักการ กฎ มาสัมพันธ์กันระหว่างความคิดรวบยอดและปัญหา

- ความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Knowledge of Mathematical Structure) เป็นความสามารถในการมองเห็นส่วนประกอบของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับโครงสร้างทางพีชคณิต

- ความสามารถในการแปลงรูปของปัญหาจากแบบหนึ่งไปยังอีกแบบหนึ่ง (Ability of Transform Problem Elements from One Mode to Another) เป็นความสามารถในการเปลี่ยนข้อความให้เป็นสัญลักษณ์

- ความสามารถในการดำเนินการตามแนวของเหตุผล (Ability of Follow a Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์โดยดำเนินการตามแนวเหตุผลขณะที่ย่ออ่าน

- ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Mathematics Problem) เป็นความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ รวมถึงการแปลความหมายจากกราฟหรือข้อมูลทางสถิติ

3. ด้านการนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาคือคล้ายกับปัญหาที่เคยเรียนมาแล้ว โดยอาศัยความรู้ ฎ กฏ หลักการ ข้อเท็จจริง ไปแก้ปัญหาคือใหม่เป็นผลสำเร็จพฤติกรรมลำดับนี้แบ่งเป็น 4 ชั้น ได้แก่

- ความสามารถในการแก้ปัญหาคือที่คุ้นเคย (Ability to Solve Routine Problem) ผู้เรียนต้องอาศัยความรู้ด้านการคำนวณ ความเข้าใจ และใช้กระบวนการการเพื่อแก้ปัญหาคือได้คำตอบ

- ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparisons) เป็นความสามารถในการการนำข้อมูล 2 ชุด มาหาความสัมพันธ์ระหว่างกัน โดยการเปรียบเทียบ สรุปรูป และตัดสินใจ

- ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการจำแนกแยกแยะ และตัดสินใจว่าข้อมูลส่วนใดจำเป็นหรือไม่จำเป็นในการนำไปใช้แก้ปัญหาคือ

- ความสามารถในการมองเห็นแบบรูป ลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกัน และการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns Isomorphism and Symmetries) เป็นความสามารถในการระลึกถึงข้อมูล การแปลงปัญหา การจัดกระทำข้อมูล และการสำรวจหาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่ยื่นเคยกับข้อมูลที่กำหนดปัญหา

4. ด้านการวิเคราะห์ (Analysis) เป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดทางสถิติปัญหาในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ด้านพุทธิพิสัย ซึ่งพฤติกรรมในขั้นนี้ต้องมีความสามารถในระดับสูง จะเป็นการแก้ปัญหาคือที่แปลกไม่คุ้นเคยมาก่อน การแก้ปัญหาคือครอบคลุมถึงความรู้ความสามารถในสามขั้นที่กล่าวมาแล้ว พฤติกรรมในขั้นนี้แบ่งออกเป็น 5 ชั้นดังนี้

- ความสามารถในการแก้ปัญหาคือที่ไม่เคยประสบมาก่อน (Ability to Solve Nonroutine Problems) เป็นความสามารถในการตอบคำถามที่ซับซ้อน ผู้เรียนต้องนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เคยเรียนมาแล้วผสมผสานกับความเข้าใจในความคิดรวบยอด นิยามเพื่อนำไปสู่เนื้อหาใหม่

- ความสามารถในการค้นพบความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้ มาสัมพันธ์กันใหม่เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาคือ

- ความสามารถในการสร้างข้อพิสูจน์ (Ability to Construct Proofs) เป็นความสามารถในการสื่อสารเพื่อยืนยันข้อความทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผลด้วยตนเอง โดยอาศัยนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีต่าง ๆ เข้ามาช่วยแก้ปัญหาคือ

- ความสามารถในการวิพากษ์วิจารณ์ข้อพิสูจน์ (Ability to Criticize Proofs) เป็นความสามารถที่ใช้เหตุผลควบคุมความสามารถในการสร้างพิสูจน์ ผู้เรียนจะต้องตรวจสอบว่าพิสูจน์ถูกต้องหรือไม่ มีตอนใดผิดพลาด

- ความสามารถเกี่ยวกับการสร้างสูตรและทดสอบความถูกต้องของสูตร (Ability of Formulate and Validate Generalizations) นักเรียนสร้างสูตรขึ้นมาใหม่ โดยให้สัมพันธ์กับเรื่องเดิมและสมเหตุสมผลด้วย

2.6.2 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึง สาเหตุที่นักเรียนมีปัญหาคือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ดังนี้

วิชรี บุรณสิงห์ [52] ได้กล่าวถึงสาเหตุที่นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำนั้นอาจเกิดจากนักเรียนที่มีลักษณะ ดังนี้

1. ระดับสติปัญญา (I.Q.) อยู่ระหว่าง 75-90 และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์จะต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 30
2. อัตราการเรียนรู้อัตราต่ำกว่านักเรียนอื่น ๆ
3. มีความสามารถในการอ่านต่ำ
4. จำหนักหรือมโนคติเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์ที่เรียนไปแล้ว ไม่ได้
5. มีปัญหาในการใช้ถ้อยคำ
6. มีปัญหาการใช้ความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ และการสรุปเป็นหลักเกณฑ์โดยทั่วไป
7. มีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์น้อยจากการสอบตกวิชาคณิตศาสตร์บ่อยครั้ง
8. มีเจตคติที่ไม่ดีต่อโรงเรียนและโดยเฉพาะอย่างยิ่งวิชาคณิตศาสตร์
9. มีความกดดันและรู้สึกกังวลต่อความล้มเหลวทางด้านการเรียนของตนเองและบางครั้งรู้สึกดูถูกตนเอง
10. ขาดความเชื่อมั่นในความสามารถในตนเอง
11. อาจมาจากครอบครัวที่มีสภาพแวดล้อมที่แตกต่างจากนักเรียนอื่น ๆ ซึ่งมีผลทำให้ขาดประสบการณ์ที่จำเป็นต่อความสำเร็จในการเรียน
12. ขาดทักษะในการฟังและไม่มีความตั้งใจในการเรียนหรือมีความตั้งใจในการเรียนเพียงชั่วระยะเวลาสั้น ๆ
13. มีข้อบกพร่องในด้านสุขภาพ เช่น สายตาไม่ปกติ มีปัญหาด้านการฟังและมีข้อบกพร่องทางทักษะการใช้มือ
14. ไม่ประสบความสำเร็จทางด้านการเรียนทั่วไป



15. ขาดความสามารถในการแสดงออกทางคำพูดซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้คำที่แสดงให้เห็นว่าตนเองก็ยังไม่เข้าใจการเรียนนั้น ๆ

16. มีวุฒิภาวะค่อนข้างต่ำทั้งทางด้านอารมณ์และสังคม

อัญชญา โภธิพลากร [48] กล่าวว่า สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อการเรียนคณิตศาสตร์และมีผลต่อการเรียนของนักเรียน ก็คือ การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนและสร้างเจตคติ ความรู้สึกต่อการมีส่วนร่วมในกิจกรรมต่าง ๆ ที่ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ซึ่งเป็นหน้าที่ของครูโดยตรงที่จะจัดหาวิธีสอนและเทคนิคการสอนที่เหมาะสมนำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้เกิดประสิทธิผลที่ดียิ่งขึ้น

ธารินี อยู่เสน [50] กล่าวว่า สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ คือ การจัดการเรียนการสอน แรงจูงใจต่อวิชาคณิตศาสตร์สภาพแวดล้อมทางครอบครัว และวุฒิภาวะ ตัวนักเรียน

จากการศึกษาถึงสาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำนั้นสามารถสรุปได้ว่าเกิดสาเหตุจาก การจัดการเรียนการสอน แรงจูงใจต่อวิชาคณิตศาสตร์สภาพแวดล้อมทางครอบครัว และวุฒิภาวะ ตัวนักเรียน ครูและโรงเรียน ดังนั้นจึงต้องมีการร่วมมือกันจัดปัญหาให้หมดไปทั้งด้านตัวครู นักเรียนและส่วนที่เกี่ยวข้องเพื่อให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น

2.6.3 องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึง องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการไว้ดังนี้

Prescott [53] ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเรียนของนักเรียน และสรุปผลการศึกษาว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งในและนอห้องเรียนมีดังนี้

1. องค์ประกอบทางด้านร่างกาย ได้แก่ อัตราการเจริญเติบโตของร่างกาย สุขภาพทางกายข้อบกพร่องทางร่างกายและบุคลิกท่าทาง
2. องค์ประกอบทางด้านความรัก ได้แก่ ความสัมพันธ์ของบิดามารดา ความสัมพันธ์ของบิดามารดากับลูก ความสัมพันธ์ระหว่างลูก ๆ ด้วยกัน และความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกทั้งหมดในครอบครัว
3. องค์ประกอบทางวัฒนธรรมและสังคม ได้แก่ ขนบธรรมเนียมและประเพณี ความเป็นอยู่ของครอบครัว สภาพแวดล้อมทางบ้าน การอบรมทางบ้านและฐานะทางบ้าน

4. องค์ประกอบทางความสัมพันธ์กับเพื่อนวัยเดียวกัน ได้แก่ความสัมพันธ์ของนักเรียนกับเพื่อนวัยเดียวกัน ทั้งที่บ้านและที่โรงเรียน
5. องค์ประกอบแห่งการพัฒนาตน ได้แก่ สติปัญญา ความสนใจ เจตคติของนักเรียนต่อการเรียน
6. องค์ประกอบทางการปรับตัว ได้แก่ ปัญหาการปรับตัว การแสดงทางอารมณ์

Carrol [54] ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับอิทธิพลต่อองค์ประกอบต่าง ๆ ที่มีระดับผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน โดยการนำครู นักเรียน และหลักสูตรมาเป็นองค์ประกอบที่สำคัญ โดยเชื่อว่าเวลาและคุณภาพของการสอนมีอิทธิพลโดยตรงต่อปริมาณความรู้ที่นักเรียนจะได้รับ

Maddox [55] ได้ศึกษาว่าผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษาของแต่ละบุคคล ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบทางสติปัญญาและความสามารถทางสมอง ร้อยละ 50-60 ขึ้นอยู่กับโอกาสและสิ่งแวดล้อม ร้อยละ 10-15

สุวรรณมาลี นาคเสน [56] กล่าวว่าปัจจัยและองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีหลายประการ คือ ทางด้านตัวนักเรียน ได้แก่ ด้านสติปัญญา อารมณ์ ความสนใจ เจตคติการเรียน ทางด้านตัวครู ได้แก่ คุณภาพของครู การจัดระบบ การบริหาร ทางด้านสังคม ได้แก่ สภาพเศรษฐกิจและสังคมของครอบครัวของนักเรียน เป็นต้น ดังนั้น เพื่อให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนเป็นไปตามเป้าหมาย ครูจะต้องตระหนักถึงคุณภาพการสอน จัดการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับสภาพของนักเรียนและท้องถิ่น

อารีย์ คงสวัสดิ์ [47] กล่าวว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลกับผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนนั้นมีองค์ประกอบมากมายหลายอย่าง ดังต่อไปนี้ คือ

1. ด้านคุณลักษณะการจัดระบบในโรงเรียน ตัวแปรด้านนี้จะประกอบด้วยขนาดของโรงเรียน อัตราส่วนนักเรียนต่อครู อัตราส่วนนักเรียนต่อห้องซึ่งตัวแปรเหล่านี้มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน
2. ด้านคุณลักษณะของครู ตัวแปรทางด้านคุณลักษณะประกอบด้วยอายุ วุฒิครูประสบการณ์ของครู การฝึกอบรมของครู จำนวนวันลาของครู จำนวนคาบที่สอนในหนึ่งสัปดาห์ของครู ความเอาใจใส่ในหน้าที่ ซึ่งตัวแปรเหล่านี้ล้วนมีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทั้งสิ้น
3. ด้านคุณลักษณะของนักเรียน ประกอบด้วยตัวแปรเกี่ยวกับนักเรียน เช่น เพศ อายุ สติปัญญา การเรียนพิเศษ การรับการช่วยเหลือเกี่ยวกับการเรียน สมาชิกในครอบครัว ระดับการศึกษาของบิดามารดา อาชีพของผู้ปกครอง ความพร้อมเรื่องอุปกรณ์การเรียน การสอนฐานะทางครอบครัว การขาดเรียน การเข้าร่วมกิจกรรมที่ทางโรงเรียนจัดทำขึ้น ตัวแปรเหล่านี้ก็มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

4. ด้านภูมิหลังเศรษฐกิจ สังคมและสิ่งแวดล้อมของนักเรียน การศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างเศรษฐกิจ สังคมกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ส่วนใหญ่เป็นการศึกษาในต่างประเทศซึ่งประกอบด้วยขนาดของครอบครัว ภาษาที่พูดในบ้าน ถิ่นที่ตั้ง การมีสื่อทางการศึกษาต่าง ๆ ระดับการศึกษาของบิดามารดา ฯลฯ ผลศึกษาค้นคว้าที่ผ่านมามีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

จากการศึกษาองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า ปัจจัยและองค์ประกอบในการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์มีหลายองค์ประกอบ ได้แก่ ด้านระบบของโรงเรียน ด้านนักเรียน ด้านครู และด้านเศรษฐกิจและสังคม

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษาค้นคว้างานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ทั้งในและต่างประเทศ มีผู้ทำวิจัยได้เสนอไว้หลายท่าน ดังต่อไปนี้

2.7.1 งานวิจัยในประเทศ

ยุรวัดน์ คล้ายมงคล [57] ทำการวิจัยเรื่องการศึกษากระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงในโรงเรียนสังกัดสำนักงานการประถมศึกษา กรุงเทพมหานคร กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานการประถมศึกษากรุงเทพมหานคร ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง จำนวน 102 คน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาเพียง 3 ขั้นตอน คือ การทำความเข้าใจ โจทย์ปัญหา การวางแผนแก้ปัญหา และการดำเนินการตามแผนปัญหา มีเพียงส่วนน้อยที่มีกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาครบ 4 ขั้นตอน คือ มีการทบทวนคำตอบและแผนแก้ปัญหา และนักเรียนมีวิธีการเปรียบเทียบวิธีการหาทางเลือกที่มากที่สุด วิธีการเขียนรายการและวิธีการลองผิดลองถูกแต่นักเรียนที่มีวิธีการคิดย้อนหลังมีจำนวนน้อย และนักเรียนยังขาดวิธีการสร้างตาราง

บุญเกื้อ ละอองปลิว [58] ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้เกี่ยวกับโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้การสอนแบบวิเคราะห์กับการสอนแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 84 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ 42 คน คือ กลุ่มทดลองได้รับการสอนแบบวิเคราะห์ และกลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบปกติตามคู่มือครูคณิตศาสตร์ ของสสวท. ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่สอนโดยการสอนแบบวิเคราะห์กับการสอนแบบปกติ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

ทางสถิติที่ระดับ .05 และความคงทนในการเรียนรู้ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่สอน โดยการสอนแบบวิเคราะห์กับการสอนแบบปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี [59] ศึกษาวิธีการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่องความไม่เท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยจัดกิจกรรมการสอนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ผลการพิสูจน์ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมตามกระบวนการแก้ปัญหาที่ละขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 หาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์ เป็นการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา

ขั้นที่ 2 หาสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ แปลงเป็นสัญลักษณ์

ขั้นที่ 3 หาสิ่งที่จะได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยพิจารณาจากสัจพจน์ สิ่งที่เห็นจริง นิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนเป็นสัญลักษณ์

ขั้นที่ 4 ไขกระบวนการวิเคราะห์ และสังเคราะห์จากสิ่งที่ได้จากขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 เพื่อหาเหตุผลต่าง ๆ ของผล และหาผลต่าง ๆ จากเหตุ

ขั้นที่ 5 เรียบเรียงการพิสูจน์ จากเหตุผลต่าง ๆ ตามลำดับไปสู่ผล

ผลการทดลองพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้รับจากการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นการแก้ปัญหาลงกว่าผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

สุมาลี วงศ์ยะรา [60] ทำการวิจัยเรื่องการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยใช้ภาพกับไม่ใช้ภาพ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 60 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่สอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพและกลุ่มที่สอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยไม่ใช้ภาพ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยไม่ใช้ภาพอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และนักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพมีความสามารถในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา การหาคำตอบของโจทย์ปัญหา และการแสดงวิธีทำโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงกว่านักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยไม่ใช้ภาพอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

กัจจร มุณีแก้ว [61] ศึกษาผลของการสอน โดยใช้เทคนิคการคิดออกเสียงที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียน

สาธิตสังกัดสำนักงานสภาพัฒนาการศึกษาระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยากรุงเทพมหานคร แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้เทคนิคการคิดออกเสียงจำนวน 39 คน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ จำนวน 41 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้เทคนิคการคิดออกเสียงมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แต่นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้เทคนิคการคิดออกเสียงมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สมเดช บุญประจักษ์ [16] ทำการวิจัยเพื่อพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ใน 3 ด้าน คือ ด้านความสามารถในการแก้ปัญหา ด้านการให้เหตุผล และด้านการใช้คณิตศาสตร์สื่อสาร โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ พัฒนาโดยผ่านกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า ศักยภาพทางคณิตศาสตร์ทั้ง 3 ด้านของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และผลจากการตรวจผลงานและการสังเกตระหว่างเรียนของกลุ่มทดลอง พบว่า ด้านการแก้ปัญหานักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ดีขึ้น ด้านการให้เหตุผลนักเรียนสามารถสรุปและอธิบายเหตุผลในการดำเนินการแก้ปัญหา ใช้เหตุผลยืนยันคำตอบที่หาได้ และด้านการใช้คณิตศาสตร์สื่อสาร นักเรียนสามารถนำเสนอแนวคิดได้ชัดเจนขึ้น

วิมล พงษ์ปาลิต [62] ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนแบบแก้ปัญหากับการสอนตามคู่มือครู ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบแก้ปัญหากับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้รับการสอนแบบแก้ปัญหากับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อนงก จันทจรุญ [63] ศึกษาการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยชุดกิจกรรมฝึกการแก้ปัญหผ่านกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา และแนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหที่เป็นพลวัตของวิลสัน เฟอร์นันเดซ และฮาเดเวย์ โดยใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหา 10 ยุทธวิธี ได้แก่ ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ ยุทธวิธีการหารูปแบบ ยุทธวิธีการเขียนภาพประกอบ ยุทธวิธีแจงกรณีที่เป็นไปได้ ยุทธวิธีทำย้อนกลับ ยุทธวิธีการหาการสร้างตารางกราฟ ยุทธวิธีการให้เหตุผล ยุทธวิธีการพิจารณาในกรณีที่ยากกว่าหรือแบ่งเป็นปัญหาย่อย ยุทธวิธีลงมือแก้ปัญหาเลย และยุทธวิธีการใช้แบบจำลอง พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหของนักเรียนกลุ่ม

ตัวอย่างหลังใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้สูงกว่าก่อนการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ปรีชา เนาวเย็นผล [33] ทำการศึกษาแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้กิจกรรมการสอนคณิตศาสตร์ โดยใช้การแก้ปัญหาลายเปิด พบว่าก่อนการทดลองนักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาคอนข้างต่ำ ในระหว่างเรียนความสามารถในการแก้ปัญหของนักเรียนค่อย ๆ พัฒนาขึ้นจากการแก้ปัญหที่ต่อให้การถามกระตุ้นแนะแนวทางแก้ไขไปจนกระทั่งการถามกระตุ้นให้คิดน้อยลง ในระยะสุดท้ายของการทดลองนักเรียนสามารถวางแผนกำหนดแนวคิดในการแก้ปัญหเองได้อย่างอิสระ และในการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหหลังการทดลองนักเรียนสามารถแก้ปัญหที่มีโครงสร้างคล้ายกับปัญหที่นักเรียนเคยมีประสบการณ์มาก่อนได้ดีกว่าปัญหที่แปลกใหม่

รสอุบล ธรรมพานิชวงศ์ [64] ศึกษาผลของการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 197 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองจำนวน 98 คน และกลุ่มควบคุมจำนวน 99 คน นักเรียนในกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยเน้นการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ และนักเรียนในกลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างจากนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แต่นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์มีความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ศิริพร รัตนโกสินทร์ [65] ศึกษาการสร้างชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ โดยฝึกการแก้ปัญหาผ่านกระบวนการ 4 ขั้นตอนของโพลยา คือ ทำความเข้าใจปัญหา ขึ้นวางแผนแก้ปัญหา ขึ้นดำเนินการแก้ปัญหา และขึ้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบ และแนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตของวิลสัน เฟอร์นันเดซ และฮาเดเวย์ พร้อมทั้งฝึกการใช้วิธีการแก้ปัญหา 8 ยุทธวิธี ได้แก่ ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ ยุทธวิธีการหารูปแบบ ยุทธวิธีการเขียนภาพประกอบ ยุทธวิธีแจกกรณีที่เป็นไปได้ ยุทธวิธีการทำย้อนกลับ ยุทธวิธีการสร้างตารางและกราฟ ยุทธวิธีการให้เหตุผล ยุทธวิธีการพิจารณาในกรณีที่ยากกว่าหรือแบ่งเป็นปัญหาย่อย ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการ

แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการใช้ชุดกิจกรรมสูงกว่าก่อนใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังใช้ชุดกิจกรรมสูงกว่าก่อนใช้ชุดกิจกรรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุนีย์ เงินยวง [66] ทำการวิจัยเพื่อพัฒนาและศึกษาผลการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ ส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์สมการของนักเรียนในด้านการวิเคราะห์โจทย์สมการและการ สร้างสมการ โดยแผนการเรียนรู้นั้นใช้ปัญหาปลายเปิดในการเรียน ตลอดจนตรวจคำตอบและแสดง คำตอบของโจทย์สมการ กลุ่มที่ใช้ในการศึกษาคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/9 ของโรงเรียนพะเยา พิตยาคม จังหวัดพะเยา ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 จำนวน 55 คน ผลการวิจัยพบว่า การฝึกใน สามส่วนแรกช่วยให้นักเรียนวิเคราะห์และทำความเข้าใจโจทย์ที่มีบริบทใกล้เคียงตัวนักเรียนและโจทย์ที่มี บริบทไกลตัวหรือไม่ซับซ้อนจนกระทั่งสามารถสร้างสมการได้ด้วยตัวเอง แต่ในส่วนของโจทย์ที่มี บริบทไกลตัวหรือโจทย์ที่คำนวณซับซ้อน นักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่สามารถวิเคราะห์และทำความเข้าใจ โจทย์ด้วยตนเองได้ แต่เมื่อครูผู้สอนใช้การถามตอบเพื่อช่วยในการวิเคราะห์โจทย์และนักเรียน จะสามารถสร้างสมการได้

นุศรียา จิตดารมย์ [37] ศึกษาผลของการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ที่มีต่อ ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จังหวัดสุราษฎร์ธานี ประจำปีการศึกษา/2548 จำนวน 86 คน ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR จำนวน 45 คน และกลุ่ม ควบคุมที่ได้รับการสอนปกติ จำนวน 41 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแก้ปัญหา คณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ ที่กำหนดโดยกระทรวงศึกษาธิการ คือ สูงกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถใน การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนที่ได้รับการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR มี ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมี นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ นักเรียนที่ได้รับการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR มีความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ .05

ไพรัช วงศ์ศรีตระกูล [67] ศึกษาการเสริมสร้างการเรียนรู้เรื่องทางคณิตศาสตร์เพื่อการแก้ปัญหา การให้ เหตุผล และการสื่อความหมายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย กลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6 สายวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ และสายคณิตศาสตร์-ภาษาอังกฤษ ผลการศึกษา พบว่านักเรียนที่ได้รับการเสริมสร้างการเรียนรู้เรื่องทางคณิตศาสตร์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าก่อน

เรียนที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยที่นักเรียนจำนวนร้อยละ 75 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 60 นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาอยู่ในระดับดีมาก ความสามารถในการให้เหตุผล การสื่อความหมายอยู่ในระดับดี นักเรียนแผนการเรียนสายวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ และสายคณิตศาสตร์-ภาษาอังกฤษ มีความก้าวหน้าของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.7.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

Gooya [68] ศึกษาความเข้าใจในคณิตศาสตร์และความเชื่อมั่นในการเรียนคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาจากการสอนที่เน้นการสังเคราะห์ความคิดและการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหากับนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่ไมไฮสายวิทยาศาสตร์ โดยจัดกิจกรรมการเรียนเป็น 3 ลักษณะ คือ เขียนสรุป การใช้กลุ่มย่อย และการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้น พบว่า การเขียนสรุปเป็นการสื่อสารระหว่างผู้เรียนกับผู้สอน ช่วยให้ผู้เรียนเกิดความชัดเจนในแนวคิด สำหรับกลุ่มย่อยผู้เรียนได้เรียนรู้และติดตามการทำงานของกลุ่ม ได้อภิปรายปัญหากับคนอื่น ๆ และทำงานร่วมกันทำให้เกิดการตัดสินใจที่เหมาะสม ส่วนการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นทำให้ผู้เรียนได้พบจุดอ่อนและจุดเด่นของตนเอง ช่วยให้นักเรียนได้พิจารณาและตัดสินใจได้ดีขึ้น นอกจากนี้การใช้สื่อเสริมและนวัตกรรมต่าง ๆ ทำให้ผู้เรียนเข้าใจถึงความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ต่างไปจากเดิมที่เขาใจว่าเป็นการประยุกต์ใช้กฎหรือสูตรต่าง ๆ มาเป็นกระบวนการทำความเข้าใจและสร้างความรู้ใหม่

Burks [69] ใช้การเขียนเป็นเครื่องมือในการสอนนักเรียนระดับ 8 ให้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการ 4 ขั้นตอน และยุทธวิธี 5 แบบโดยให้ครู 5 คน ไซบทเรียนซึ่งเน้นกิจกรรมเกี่ยวกับการเขียนกระบวนการ 4 ขั้นตอน ประกอบด้วย การเข้าสู่ปัญหา (Enter) วางแผน (Plan) ลงมือแก้ปัญหา (Attack) และตรวจสอบ (Review) ซึ่งคล้ายกับแนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหของโพลยา ยุทธวิธีที่ที่ใช้ในการแก้ปัญหาคือ การหารูปแบบ การสร้างแผนภาพ การแจกแจงรายการหรือการสร้างตาราง การเดาและตรวจสอบ และการทดลองปัญหาที่ง่ายกว่าเดิม โดยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มทดลองซึ่งได้รับการสอนการแก้ปัญหา 2 สัปดาห์ หลังจากนั้นให้ทำกิจกรรมแก้ปัญหา ไซเวลา 7 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 2 วันสวนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนการแก้ปัญหาในหนังสือเรียนตามปกติ ผลการศึกษาข้อมูลจากแบบทดสอบก่อนเรียน แบบทดสอบหลังเรียน การสัมภาษณ์ และแบบสอบถามทางด้านเจตคติ พบว่านักเรียนและครูมีความเห็นว่ากิจกรรมที่สร้างขึ้นช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาโดยเฉพาะจะเห็นได้ชัดเจนมากเมื่อเปรียบเทียบระหว่างนักเรียนที่มีความสามารถระดับต่ำของทั้งสองกลุ่ม

Huntington [70] ศึกษาผลของการสอนโดยใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม หรือที่เรียกโดยใช้อักษร CSA ตามลำดับ ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่มีความบกพร่องทางการเรียนรู้ จำนวน 3 คน ผลการวิจัยพบว่าการสอนโดยใช้สื่อหรือสัญลักษณ์ทั้งสามประเภทช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาถึงเกณฑ์ 100% และหลังการทดลอง 9 สัปดาห์ทำการทดสอบความคงทนในการเรียนพบว่านักเรียนยังสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้นักเรียนยังสามารถแก้โจทย์ปัญหาที่มีความยากง่ายระดับเดียวกันแต่มีโครงสร้างแตกต่างไปจากปัญหาเดิมด้วย

Fiksdal [71] ศึกษาการสอนยุทธวิธีในการแก้ปัญหาและการดำเนินการแก้ปัญหา โดยแบ่งกลุ่มตัวอย่างเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งกลุ่มทดลองได้รับการสอนยุทธวิธีการแก้ปัญหา 5 ยุทธวิธีคือ การสร้างแผนภาพ การแจกแจงการ การแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า การใช้ตัวแปร และการหาแบบรูป ผลการศึกษาพบว่า กลุ่มทดลองมีความชำนาญในการแก้ปัญหาและใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาได้เพิ่มขึ้นมากกว่ากลุ่มควบคุม

Tougaw [72] ศึกษาผลการสอนโดยใช้การแก้ปัญหาแบบเปิดกว้าง ในการสอนคณิตศาสตร์โดยศึกษาพฤติกรรมในการแก้ปัญหาและเจตคติเกี่ยวกับคณิตศาสตร์กับนักเรียนมัธยมศึกษาโดยการแก้ปัญหาแบบเปิดกว้างหมายถึง การสร้างข้อคาดเดา การสืบค้น การอภิปราย การพิสูจน์ การหารูปทั่วไป ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นักเรียนต้องใช้ความรู้ทักษะ กระบวนการคิดและเจตคติทางบวกกับพื้นฐาน ผลการทดลองพบว่านักเรียนที่ผ่านการสอนโดยการแก้ปัญหาแบบเปิดกว้างมีเจตคติทางบวกต่อการเรียนและเพศไม่มีความแตกต่างต่อพฤติกรรมในการแก้ปัญหา

Baker [73] ศึกษาผลของการสอนโดยใช้กลยุทธ์วาดภาพของนักเรียนระดับประถมศึกษาที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ โดยกลุ่มที่ใช้การวิจัยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม ซึ่งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมใช้กระบวนการแก้โจทย์ปัญหา 4 ขั้นตอนเหมือนกัน คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนในการแก้โจทย์ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบ และกลุ่มทดลองใช้กลยุทธ์วาดภาพ (Drawing Strategy) ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา ผลการวิจัย พบว่า ทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หลังการสอนสูงกว่าก่อนได้รับการสอน และกลุ่มทดลองมีการใช้กลยุทธ์ในการวาดภาพหรือใช้วิธีการวาดภาพ แสดงข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้มากขึ้นกว่าก่อนได้รับการสอน

Maccini และ Ruhl [11] ศึกษาผลการใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม หรือที่เรียกโดยใช้อักษร CSA ตามลำดับ และกลวิธี STAR ในการแก้ปัญหากลบ

จำนวนเต็มสำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษา ที่มีความบกพร่องทางการเรียน มีอุปสรรคในการให้เหตุผลขั้นสูง และทักษะการแก้ปัญหา ที่มีต่อความสามารถในการแสดงความหมายและการหาคำตอบของปัญหาการลบจำนวนเต็ม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 8 จำนวน 3 คน ผลการวิจัยพบว่า หลังการทดลองการแก้ปัญหของนักเรียนทั้ง 3 คนมีประสิทธิภาพสูงขึ้น และหลังการทดลอง 2 สัปดาห์ทำการทดสอบความคงทนของความสามารถในการหาคำตอบของปัญหา พบว่านักเรียนยังคงหาคำตอบของปัญหาได้อย่างถูกต้อง และ 1 สัปดาห์ต่อมาทำการทดสอบความคงทนของความสามารถในการแสดงความหมายของปัญหา ซึ่งนักเรียนยังคงแสดงความหมายของปัญหาได้อย่างถูกต้องเช่นกัน

Maccini และ Hughes [12] ศึกษาผลของการใช้กลวิธี STAR และการใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม (Concrete) สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม หรือที่เรียกโดยใช้อักษร CSA ตามลำดับ สำหรับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ขั้นต้นของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาที่มีความบกพร่องทางการเรียนรู้ ที่มีต่อความสามารถของการแสดงความหมายและการหาคำตอบของการแก้ปัญหการบวก ลบ คูณ และหารจำนวนเต็ม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่มีความบกพร่องทางการเรียนรู้จำนวน 6 คน จากนักเรียนจำนวน 170 คน ผลการวิจัยพบว่า ทักษะการแก้ปัญหที่เกี่ยวกับจำนวนเต็มของนักเรียนสูงขึ้น ในแต่ละลำดับการสอนนักเรียนใช้กลวิธีแก้โจทย์ปัญหาดังนี้ 1) ศึกษาทำความเข้าใจโจทย์ 2) แปลงข้อมูลจากโจทย์ภาษาไปสู่สมการ 3) ระบุนิยามดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง 4) วาดรูปภาพแสดงความหมายของโจทย์ปัญหาได้ 5) เขียนสมการได้อย่างถูกต้อง และ 6) ตอบคำตอบของโจทย์ปัญหาได้ นอกจากนี้ยังสามารถแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่ใกล้เคียงกับของเดิมอีกด้วย และหลังจากทดลองแล้ว 10 สัปดาห์ ได้ทำการวัดความคงทนในการเรียน ปรากฏว่านักเรียนยังสามารถแสดงความหมายของโจทย์และหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง

จากเอกสารและผลการวิจัยในประเทศและต่างประเทศดังกล่าวข้างต้นสรุปว่า มีการศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา โดยมีทั้งการใช้กิจกรรมการสอนแบบต่าง ๆ และ การใช้กลวิธีในการแก้ปัญหามาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เพื่อทำให้นักเรียนสามารถเลือกกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาอย่างเหมาะสม ซึ่งผลการวิจัยสรุปได้ว่า การนำสื่อที่เป็นรูปธรรม สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม หรือใช้ CSA แทนสื่อหรือสัญลักษณ์ทั้งสามประเภท และกลวิธี STAR ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอน ช่วยให้ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ดีขึ้น และทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนสูงขึ้น ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจนำวิธีการดังกล่าวมาใช้ในการสร้างบทเรียน เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้กลวิธี STAR มาประยุกต์ใช้กับการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์