REFERENCES

1. Kermark, M. and Mckendrick, A., 1927, "Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics", **Proceedings of the Royal Society A**, Vol. 115, pp. 700 - 721.

2. Liu, G. and Jin, Z., 2005, "Global Stability of a SEIR Epidemic Model with Infectious Force in Latent, Infected and Immune Period", **Chaos, Solitons and Fractals**, Vol. 25, pp. 1177 - 1184.

3. Pang, G. and Chen, L., 2007, "A Delayed SIRS Epidemic Model with Pulse Vaccination". **Chaos, Solitons and Fractals**, Vol. 34, pp. 1629 - 1635.

4. Zhou, Y., Xiao, D. and Li, Y., 2007, "Bifurcations of an Epidemic Model with Non-Monotonic Incidence Rate of Saturated Mass Action", **Chaos, Solitons and Fractals**, Vol. 32, pp. 1903 – 1915.

5. Rvachev, L. and Longini, I., 1985, "A Mathematical Model for the Global Spread of Influenza", **Mathematical Biosciences**, Vol. 75, pp. 3 - 22.

6. Longini, I., 1988, "A Mathematical Model for Predicting the Geographic Spread of New Infectious Agents", **Mathematical Biosciences**, Vol. 90, pp. 367 - 383.

7. Sattenspiel, L. and Dietz, K., 1995, "A Structured Epidemic Model Incorporating Geographic Mobility Among Cities", **Mathematical Biosciences**, Vol. 128, pp. 71 – 91.

8. Fulford, G.R., Roberts, M.G. and Heesterbeek, J.A.P., 2002, "The Metapopulation Dynamics of an Infectious Disease: Tuberculosis in Possums", **Journal of Theoretical Biology**, Vol. 61, pp. 15 – 29.

9. Arino, J. and Van Den Driessche, P., 2003, "A Multi-City Eidemic Model", **Mathematical Population Studies**, Vol. 10, pp. 175 – 193.

10. Wan, H. and Cui, J., 2007, "An SEIS Epidemic Model with Transport–Related Infection", **Journal of Theoretical Biology**, Vol. 247, pp. 507 – 524.

11. Wang, W. and Mulone, G., 2003, "Threshold of Disease Transmission in a Patch Environment", **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Vol. 285, pp. 321 – 335.

12. Wang, W. and Ruan, S., 2004, "Simulating the SARS Outbreak in Beijing with Limited Data", **Journal of Theoretical Biology**, Vol. 227, pp. 369 – 379.

13. Sattenspiel, L. and Herring, D.A., 1998, "Structured Epidemic Models and the Spread of Influenza in the Central Canada Subarctic", **Human Biology**, Vol. 70, pp. 91 – 115.

14. Sattenspiel, L. and Herring, D.A., 2003, "Simulating the Effect of Quarantine on the Spread of the 1918-1919 Flu in Central Canada", **Bulletin of Mathematical Biology**, Vol. 65, pp. 1 – 26.

15. Wang, W. and Zhao, X.Q., 2004, "An Epidemic Model in a Patchy Environment", **Mathematical Biosciences**, Vol. 190, pp. 97 – 112.

16. Wang, W. and Zhao, X.Q., 2005, "An Age–Structured Epidemic Model in a Patchy Environment", **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Vol. 65, pp. 1597 – 1614.

17. Cui, J., Takeuchi, Y. and Saito, Y., 2006, "Spreading Disease with Transport–Related Infection", **Journal of Theoretical Biology**, Vol. 239, pp. 376 – 390.

18. Liu , X. and Takeuchi, Y., 2006, "Spread of Disease with Transport-Related Infection and Entry Screening", **Journal of Theoretical Biology**, Vol. 242, pp. 517 – 528.

19. Takeuchi, Y., Liu, X. and Cui, J., 2007, "Global Dynamics of SIS Models with Transport-Related Infection", **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Vol. 329, pp. 1460 – 1471.

20. James, L., Shindo, N., Cutler, J., Ma, S., and Chew, S.K., 2006, "Public Health Measures Implemented During the SARS Outbreak in Singapore, 2003", **Public Health**, Vol. 120, pp. 20 – 26.

21. Wilder – Smith, A., 2006, "The Severe Acute Respiraltory Syndrome: Impact on Travel and Tourism", **Travel Medicine and Infectious Disease**, Vol. 4, pp. 53 – 60.

22. Liu, J. and Zhou, Y., 2009, "Global Stability of an SIRS Epidemic Model with Transport–Related Infection", **Chaos, Solitons and Fractals**, Vol. 40, pp. 145 - 158.

23. Murray, J.D., 1989, **Mathematical Biology**, 19, Springer–Verlage Berlin Heidelberg, USA, pp.702 – 704.

24. Dennis, G.S. and Michael, R.C., 1992, **Advanced Engineering Mathematics**, PWS Publishing Company, USA. pp. 689 – 693.

25. Diekmann, O., Metz, J.A.J. and Heesterbeek, J.A.P., 1990, "On the Definition and the Computation of the Basic Reproduction Ratio R_0 in Models for Infectious Diseases in Heterogeneous Populations", **Journal of Mathematical Biology**, Vol. 28, pp. 365 – 382.

26. Van Den Driessche, P. and Watmough, J., 2002, "Reproduction Numbers and Sub–Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission", **Mathematical Biosciences**, Vol. 180, pp. 29 - 48.

27. World Health Organization, 2003, **Cumulative Number of Reported Probable Cases of Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS)** [Online], Available : http://www.who.int/csr/ sarscountry//en/ [2011, August 1].

28. Chowella, G., Fenimorea, P.W., Castillo-Garsowc, M.A. and Castillo-Chavez, C., 2003, "SARS Outbreaks in Ontario, Hong Kong and Singapore: the Role of Diagnosis and Isolation as a Control Mechanism", **Journal of Theoretical Biology**, Vol. 224, pp. 1 – 8.

29. Gumel, A.B., et al, 2004, "Modelling Strategies for Controlling SARS Outbreaks", **Proceedings of the Royal Society B**, Vol. 271, pp. 2223 – 2232.

30. Donnelly, C.A., et al., 2003, **Epidemiological Determinants of Spread of Cusal Agent of Severe Acute Respiratory Syndrome in Hong Kong, Lancet** [Online], Available : http://image.thelancet.com/extras/03art4453-web.pdf [2011, August 2].

31. Lipsitch, M., et al., 2003, "Transmission Dynamics and Control of Severe Acute Respiratory Syndrome". **Science**, Vol. 300, pp. 1966 –1970.

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
ห้องสมุดงานวิจัย

APPENDICES

Appendix A Proof of $A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 > 0$ in Theorem 3.2.

From $(i) - (v)$, $a_{ii} < 0$ for $i = 1, 2, 3, 4$, and $J_i > 0$ for $i = 1, 2, 3$, it is revealed that

$$\begin{aligned} A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 &= (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2A_4 \\ &= (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2L_1 + A_1^2(-L_2 - L_3) > 0. \end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned} -L_2 - L_3 &= -cd(b\psi_2 - \psi_1\alpha_2) + (b + \alpha_2)cb\psi_3 \\ &= cd\psi_1\alpha_2 + cb((b + \alpha_2)\psi_3 - d\psi_2) \\ &= cd\psi_1\alpha_2 + cb(b + \alpha_2)\left(\frac{(\beta c + \beta\mathcal{R}_0(e + d))(b + \alpha_2) + \beta cd}{\mathcal{R}_0{}^2\left((b + \alpha_2)(c + d + e) + cd\right)}\right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2L_1 &= (-(a_{11} + a_{33})J_2 + (b + \psi_2)J_2 + c\psi_2(e + c) + bc\psi_3)A_3 \\ &\quad + ca_{11}^2a_{33}^2a_{44} - (a_{22} + a_{33} + a_{44})(J_1A_3 - L_1A_1) \\ &\quad - (a_{11} + a_{22})(J_3A_3 - a_{11}L_1) + a_{11}a_{44}(-(a_{11} + a_{22})A_3 - L_1) \\ &\quad + a_{11}a_{33}(-a_{11}A_3 - ca_{11}a_{33}a_{44} - L_1) \\ &> (b + \psi_1)(b + \alpha_2)\Gamma_1 + (2b + c + \psi_1 + \psi_2)\Gamma_4 \\ &\quad + (b + \psi_1)(e + d)\Gamma_5 + (2b + c + \psi_2 + e + d + \alpha_2)\Gamma_6 \\ &> 0, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -(a_{11} + a_{22})A_3 - L_1 = (2b + c + \psi_1 + \psi_2)A_3 - L_1 \\ &= bA_3 + (b + \psi_1 + \psi_2)\Gamma_2 + c\Gamma_3 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= A_3 - ba_{33}a_{44} = A_3 - (e + d)(b^2 + b\alpha_2) \\ &= Q_1 + \psi_2c(b + d) + (e + d)[\psi_1(b + \alpha_2) + \psi_1(b + c) + \psi_2b] > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_3 &= A_3 + a_{11}a_{33}a_{44} = A_3 - \psi_1 a_{33}a_{44} - ba_{33}a_{44} \\ &= Q_1 + \psi_2 c(b+d) + (e+d)[\psi_1(b+c) + \psi_2 b] > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_4 &= J_3 A_3 + a_{11}L_1 = J_3(A_3 + a_{11}a_{33}a_{44}), \\ &= J_3\Gamma_3 > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_5 &= -a_{11}A_3 - ca_{11}a_{33}a_{44} - L_1 \\ &= \psi_2(b+\alpha_2)[\psi_1(e+d) + c(b+\psi_1)] + (b+\psi_1)(b+\alpha_2)J_3 \\ &\quad +(b+\psi_1)[\psi_2 c(b+d) + (e+d)(\psi_1(b+\alpha_2) + \psi_1(b+c) + \psi_2 b)] > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_6 &= J_1 A_3 - L_1 A_1 \\ &= -a_{11}(-a_{33}A_3 - L_1) - (a_{22}+a_{33})(-a_{44}A_3 - L_1) \\ &\quad -a_{44}(-a_{11} - ca_{11}a_{33}a_{44} - L_1) - ca_{11}a_{33}a_{44}^2 \\ &= (b+\psi_1)\Gamma_7 + (b+c+e+d+\psi_2)(b+\alpha_2)(Q_1+Q_3) \\ &\quad +(b+\alpha_2)\Gamma_5 > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_7 &= -a_{33}A_3 - L_1 = a_{33}a_{44}J_2 - a_{33}(Q_2+Q_3) \\ &= (e+d)[(b+\alpha_2)J_2 + Q_2 + Q_3] > 0.\end{aligned}$$

Appendix B Proof of $A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 > 0$ in Theorem 3.4.

From $(i)-(v)$, $a_{ii} < 0$ for $i = 1,2,3,4$ and $J_i > 0$ for $i = 1,2,3$, it is revealed that

$$\begin{aligned}A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 &= (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2A_4 \\ &= (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2L_1 + A_1^2(-L_2 - L_3) > 0.\end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned}-L_2 - L_3 &= -cd(\psi_2(b+2\alpha_1) - \psi_1\alpha_2) + (b+\alpha_2)(b+2\alpha_1)c\psi_3 \\ &= cd\psi_1\alpha_2 + c(b+2\alpha_1)[(b+2\alpha_1)\psi_3 - d\psi_2] \\ &= cd\psi_1\alpha_2 + c(b+2\alpha_1)(b+\alpha_2)\left(\frac{(\beta c + \beta\mathcal{R}_0(e+d))(b+\alpha_2) + \beta cd}{{\mathcal{R}_0}^2((b+\alpha_2)(c+d+e) + cd)}\right) \\ &> 0,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2L_1 &\geq (b+2\alpha_1+\psi_1)(b+\alpha_2)\Gamma_1 \\ &\quad +(2b+2\alpha_1+c+\psi_1+\psi_2)\Gamma_4 \\ &\quad +(b+2\alpha_1+\psi_1)(e+d)\Gamma_5 \\ &\quad +(2b+2\alpha_1+c+\psi_2+e+d+\alpha_2)\Gamma_6 \\ &> 0,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= -(a_{11}+a_{22})A_3 - L_1 \\
&= (b+2\alpha_1)A_3 + (b+2\alpha_1+\psi_1+\psi_2)\Gamma_2 + c\Gamma_3 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= A_3 - (b+2\alpha_1)a_{33}a_{44} = A_3 - (e+d)[b(b+2\alpha_1)+\alpha_2(b+2\alpha_1)] \\
&= (e+d)[\psi_1(b+\alpha_2)+\psi_1(b+c+2\alpha_1)+\psi_2(b+2\alpha_1)+2\alpha_1(b+2\alpha_1)] \\
&\quad +Q_1 + c\psi_2(b+d+2\alpha_1) > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= A_3 + a_{11}a_{33}a_{44} = A_3 - \psi_1 a_{33}a_{44} - (b+2\alpha_1)a_{33}a_{44} \\
&= (e+d)[\psi_1(b+c+2\alpha_1)+\psi_2(b+2\alpha_1)+2\alpha_1(b+2\alpha_1)] \\
&\quad +Q_1 + c\psi_2(b+d+2\alpha_1) > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_4 &= J_3A_3 + a_{11}L_1 = J_3(A_3 + a_{11}a_{33}a_{44}) \\
&= J_3\Gamma_3 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_5 &= -a_{11}A_3 - ca_{11}a_{33}a_{44} - L_1 \\
&= (b+\alpha_2)[(e+d)(\psi_1\psi_2+2\alpha_1(b+2\alpha_1+\psi_1))+c\psi_2(b+2\alpha_1+\psi_1)] \\
&\quad (b+2\alpha_1+\psi_1)(b+\alpha_2)J_3 + (b+2\alpha_1+\psi_1)(c\psi_2(b+d+2\alpha_1)) \\
&\quad +(b+2\alpha_1+\psi_1)(e+d)[\psi_1(b+\alpha_2)+\psi_1(b+c+2\alpha_1)] \\
&\quad +(b+2\alpha_1+\psi_1)(e+d)[\psi_2(b+2\alpha_1)+2\alpha_1(b+2\alpha_1)] > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_6 &= J_1A_3 - L_1A_1 \\
&= (b+2\alpha_1+\psi_1)\Gamma_7 + (b+c+e+d+\psi_2+2\alpha_1)(b+\alpha_2)(Q_1+Q_3) \\
&\quad +(b+\alpha_2)\Gamma_5 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_7 &= -a_{33}A_3 - L_1 = a_{33}a_{44}J_2 - a_{33}(Q_2+Q_3) \\
&= (e+d)[(b+\alpha_2)J_2 + Q_2 + Q_3] > 0.
\end{aligned}$$

Appendix C Proof of $A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 > 0$ in case $A+B$ of Theorem 3.5.

From $(i)-(v)$, $a_{ii} < 0$ for $i = 1,2,3,4$ and $J_i > 0$ for $i = 1,2,3$, it is revealed that

$$\begin{aligned}
A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 &= (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2A_4 \\
&= (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2L_1 + A_1^2(-L_2 - L_3) > 0.
\end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned} -L_2 - L_3 &= -cd(b\theta_2 - \theta_1\alpha_2) + (b+\alpha_2)cb\theta_3 \\ &= cd\theta_1\alpha_2 + cb((b+\alpha_2)\theta_3 - d\theta_2) \\ &> cb(b+\alpha_2)^2\left(\frac{(\beta+\gamma\alpha_1)c + \mathcal{R}_{0\gamma}(\beta+\gamma\alpha_1)(e+d)}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b+\alpha_2)(c+d+e)+cd)}\right) \\ &\quad +cb(b+\alpha_2)\left(\frac{(\beta+\gamma\alpha_1)cd}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b+\alpha_2)(c+d+e)+cd)}\right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2L_1 &> (b+\theta_1)(b+\alpha_2)\Gamma_1 + (2b+c+\theta_1+\theta_2)\Gamma_4 \\ &\quad +(b+\theta_1)(e+d)\Gamma_5 + (2b+c+\theta_2+e+d+\alpha_2)\Gamma_6 \\ &> 0, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -(a_{11}+a_{22})A_3 - L_1 \\ &= bA_3 + (b+\theta_1+\theta_2)\Gamma_2 + c\Gamma_3 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= A_3 - ba_{33}a_{44} = A_3 - (e+d)(b^2+b\alpha_2) \\ &= Q_1 + \theta_2c(b+d) + (e+d)[\theta_1(b+\alpha_2) + \theta_1(b+c) + \theta_2b] > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= A_3 + a_{11}a_{33}a_{44} = A_3 - \theta_1a_{33}a_{44} - ba_{33}a_{44} \\ &= Q_1 + \theta_2c(b+d) + (e+d)[\theta_1(b+c) + \theta_2b] > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &= J_3A_3 + a_{11}L_1 = J_3(A_3 + a_{11}a_{33}a_{44}), \\ &= J_3\Gamma_3 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_5 &= -a_{11}A_3 - ca_{11}a_{33}a_{44} - L_1 \\ &= (b+\alpha_2)\theta_2(\theta_1(e+d) + c(b+\theta_1) + (b+\theta_1)(b+\alpha_2)J_3 \\ &\quad +(b+\theta_1)[\theta_2c(b+d) + (e+d)(\theta_1(b+\alpha_2) + \theta_1(b+c) + \theta_2b)] > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_6 &= J_1A_3 - L_1A_1 \\ &= -a_{11}(-a_{33}A_3 - P_1) - (a_{22}+a_{33})(-a_{44}A_3 - P_1) \\ &\quad -a_{44}(-a_{11} - ca_{11}a_{33}a_{44} - P_1) - ca_{11}a_{33}a_{44}^2 \\ &= (b+\theta_1)\Gamma_7 + (b+c+e+d+\theta_2)(b+\theta_2)(Q_1+Q_3) \\ &\quad +(b+\alpha_2)\Gamma_5 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_7 &= -a_{33}A_3 - L_1 = a_{33}a_{44}J_2 - a_{33}(Q_2+Q_3) \\ &= (e+d)[(b+\alpha_2)J_2 + Q_2 + Q_3] > 0. \end{aligned}$$

Appendix D Proof of $A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 > 0$ in case $A - B$ of Theorem 3.5. Here,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{(\beta - \gamma\alpha_1)c(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)^2(b + \alpha_2)}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b + \alpha_2)(c + d + e) + cd)}, \\
\phi_2 &= \frac{(\beta - \gamma\alpha_1)c(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)(b + \alpha_2)}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b + \alpha_2)(c + d + e) + cd)}, \\
\phi_3 &= \frac{(\beta - \gamma\alpha_1)[(c + \mathcal{R}_{0\gamma}(d + e))(b + \alpha_2) + cd\mathcal{R}_{0\gamma}]}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b + \alpha_2)(c + d + e) + cd)},
\end{aligned}$$

it can be shown that $A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 > 0$ as the following two cases.

Case 1, if $\beta > \gamma\alpha_1$ then $\phi_1 > 0$, $\phi_2 > 0$ and $\phi_3 > 0$. It can be seen that

$$A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 = (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2L_1 + A_1^2(-L_2 - L_3) > 0$$

where

$$\begin{aligned}
-L_2 - L_3 &> cb(b + \alpha_2)^2\left(\frac{(\beta - \gamma\alpha_1)c + \mathcal{R}_{0\gamma}(\beta - \gamma\alpha_1)(e + d)}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b + \alpha_2)(c + d + e) + cd)}\right) \\
&\quad + cb(b + \alpha_2)\left(\frac{(\beta - \gamma\alpha_1)cd}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b + \alpha_2)(c + d + e) + cd)}\right) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2L_1 &\geq (b + 2\alpha_1 + \phi_1)(b + 2\alpha_1 + \alpha_2)\Gamma_1 \\
&\quad + (2b + 4\alpha_1 + c + \phi_1 + \phi_2)\Gamma_4 \\
&\quad + (b + 2\alpha_1 + \phi_1)(e + d + 2\alpha_1)\Gamma_5 \\
&\quad + (2b + 6\alpha_1 + c + \phi_2 + e + d + \alpha_2)\Gamma_6 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= -(a_{11} + a_{22})A_3 - L_1 \\
&= (b + 2\alpha_1)A_3 + (b + 2\alpha_1 + \phi_1 + \phi_2)\Gamma_2 + c\Gamma_3 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= A_3 - (b + 2\alpha_1)a_{33}a_{44} = A_3 - (b + 2\alpha_1)(e + d + 2\alpha_1)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1) \\
&= Q_1 + c\phi_2(b + d + 2\alpha_1) + (e + d + 2\alpha_1)(\phi_1(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) + \phi_2(b + 2\alpha_1)) \\
&\quad + (e + d + 2\alpha_1)(b + c + 2\alpha_1)\phi_1 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= A_3 + a_{11}a_{33}a_{44} = A_3 - \phi_1 a_{33}a_{44} - (b + 2\alpha_1)a_{33}a_{44} \\
&= Q_1 + c\phi_2(b + d + 2\alpha_1) + (e + d + 2\alpha_1)(\phi_1(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) + \phi_2(b + 2\alpha_1)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_4 &= J_3A_3 + a_{11}L_1 = J_3(A_3 + a_{11}a_{33}a_{44}) \\
&= J_3\Gamma_3 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_5 &= -a_{11}A_3 - ca_{11}a_{33}a_{44} - L_1 \\
&= (b+\alpha_2+2\alpha_1)[(e+d+2\alpha_1)(\phi_1\phi_2+2\alpha_1(b+2\alpha_1+\phi_1))+c\phi_2(b+2\alpha_1+\phi_1)] \\
&\quad +(b+2\alpha_1+\phi_1)[(b+\alpha_2+2\alpha_1)J_3+c\phi_2(b+d+2\alpha_1)] \\
&\quad +(b+2\alpha_1+\phi_1)(e+d+2\alpha_1)[\phi_1(2b+\alpha_2+c+4\alpha_1)+(\phi_2+2\alpha_1)(b+2\alpha_1)] \\
&> 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_6 &= J_1A_3 - L_1A_1 \\
&= (b+2\alpha_1+\phi_1)\Gamma_7+(b+c+e+d+\phi_2+4\alpha_1)(b+\alpha_2+2\alpha_1)(Q_1+Q_3) \\
&\quad +(b+\alpha_2+2\alpha_1)\Gamma_5 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_7 &= -a_{33}A_3 - L_1 = a_{33}a_{44}J_2 - a_{33}(Q_2+Q_3) \\
&= (e+d+2\alpha_1)[(b+\alpha_2+2\alpha_1)J_2+Q_2+Q_3] > 0.
\end{aligned}$$

Case 2, if $\beta < \gamma\alpha_1$,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= -\frac{(\gamma\alpha_1-\beta)c(\mathcal{R}_{0\gamma}-1)^2(b+\alpha_2)}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b+\alpha_2)(c+d+e)+cd)} < 0, \\
\phi_2 &= -\frac{(\gamma\alpha_1-\beta)c(\mathcal{R}_{0\gamma}-1)(b+\alpha_2)}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b+\alpha_2)(c+d+e)+cd)} < 0, \\
\text{and}\quad \phi_3 &= -\frac{(\gamma\alpha_1-\beta)[(c+\mathcal{R}_{0\gamma}(d+e))(b+\alpha_2)+cd\mathcal{R}_{0\gamma}]}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2((b+\alpha_2)(c+d+e)+cd)} < 0.
\end{aligned}$$

From (3.34) – (3.36), it is revealed that $\phi_1+\alpha_1 > 0$, $\phi_2+\alpha_1 > 0$ and $J_3+c\phi_3 > 0$, respectively. Next, the inequality

$$A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 = (A_1A_2-A_3)A_3 - A_1^2(L_1+L_2+L_3) \qquad (D1)$$

is proved as follows. Calculating L_2+L_3, J_2-J_3, give

$$\begin{aligned}
L_2+L_3 &= dc[\phi_2(b+2\alpha_1)-(\phi_1+\alpha_1)\alpha_2]-(J_3+c\phi_3)(b+\alpha_2+2\alpha_1)(b+2\alpha_1) \\
&\quad +dc\alpha_1\alpha_2+J_3(b+\alpha_2+2\alpha_1)(b+2\alpha_1) \\
&= \eta+\nu, \\
J_2-J_3 &= (e+d+2\alpha_1)(b+c+\phi_2+2\alpha_1)-(b+c+2\alpha_1)(b+2\alpha_1) \\
&\quad -\phi_1(b+c+2\alpha_1)-\phi_2(b+2\alpha_1)-c\phi_3 \\
&= (b+c+2\alpha_1)(e-b)+d(b+c+2\alpha_1+\phi_2)-\phi_1(b+c+2\alpha_1) \\
&\quad -\phi_2b-\phi_3c > 0,
\end{aligned}$$

where $\eta = dc[\phi_2(b+2\alpha_1)-(\phi_1+\alpha_1)\alpha_2]-(J_3+c\phi_3)(b+\alpha_2+2\alpha_1)(b+2\alpha_1) < 0$ and $\nu = dc\alpha_1\alpha_2+J_3(b+\alpha_2+2\alpha_1)(b+2\alpha_1) > 0$.

Substituting $L_2 + L_3$ into $(D1)$ yields

$$\begin{aligned}(A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2(L_1 + \nu + \eta) &\geq (b + 2\alpha_1 + \phi_1)(b + 2\alpha_1 + \alpha_2)\Gamma_1 \\ &\quad +(2b + 4\alpha_1 + c + \phi_1 + \phi_2)\Gamma_4 \\ &\quad +(b + 2\alpha_1 + \phi_1)(e + d + 2\alpha_1)\Gamma_5 \\ &\quad +(2b + 6\alpha_1 + c + \phi_2 + e + d + \alpha_2)\Gamma_6 \\ &> 0,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= -(a_{11} + a_{22})A_3 - (L_1 + \nu + \eta) \\ &= (b + 2\alpha_1)A_3 + (b + 2\alpha_1 + \phi_1 + \phi_2)\Gamma_2 + c\Gamma_3 \\ &\quad +(\phi_1 + \alpha_1)dc\alpha_2 + (J_3 + c\phi_3)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1) - dc\phi_2(b + 2\alpha_1) \\ &\quad -dc\alpha_1\alpha_2 - J_3(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1) \\ &> (b + 2\alpha_1)((b + \alpha_2 + 2\alpha_1)J_2 + Q_2 + Q_3) + (b + 2\alpha_1 + \phi_1 + \phi_2)\Gamma_2 + c\Gamma_3 \\ &> 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= A_3 - (b + 2\alpha_1)a_{33}a_{44} \\ &= (b + 2\alpha_1 + \alpha_2)[J_2 + J_3 - (b + 2\alpha_1)(e + d + 2\alpha_1)] + (e + d + 2\alpha_1)J_3 + Q_3 \\ &> (b + 2\alpha_1 + \alpha_2)[2\alpha_1(b + c) + (b + c + 2\alpha_1)(\alpha_1 + \phi_1) + (b + 2\alpha_1)(b + \alpha_1 + \phi_2)] \\ &\quad +c(b + \alpha_1)(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_3 &= A_3 + a_{11}a_{33}a_{44} = A_3 - (b + 2\alpha_1)a_{33}a_{44} - \phi_1 a_{33}a_{44} \\ &= \Gamma_2 + \frac{c(\gamma\alpha_1 - \beta)(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1)^2 (b + \alpha_2)(e + d + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1 + \alpha_2)}{\mathcal{R}_{0\gamma}{}^2 ((b + \alpha_2)(c + d + e) + cd)} \\ &> 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_4 &= J_3A_3 + a_{11}L_1 = J_3(A_3 + a_{11}a_{33}a_{44}) \\ &= J_3\Gamma_3 > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_5 &= -a_{11}A_3 - ca_{11}a_{33}a_{44} - L_1 - \nu - \eta \\ &= (b + 2\alpha_1 + \phi_1)A_3 + c(b + 2\alpha_1 + \phi_1)(e + d + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) \\ &\quad -(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(e + d + 2\alpha_1)J_3 + (\phi_1 + \alpha_1)dc\alpha_2 \\ &\quad +(J_3 + c\phi_3)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1) - dc\phi_2(b + 2\alpha_1) - dc\alpha_1\alpha_2 \\ &\quad -J_3(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1) \\ &> (b + \alpha_2 + 2\alpha_1)[(e + d + 2\alpha_1)\phi_1\phi_2 + (b + \phi_1 + 2\alpha_1)(2\alpha_1(e + d + 2\alpha_1) + c\phi_2)] \\ &\quad +(\phi_1 + \alpha_1)(b + \phi_1 + \alpha_1)(e + d + 2\alpha_1)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1 + c) \\ &\quad +(b + 2\alpha_1)(\phi_1 + \phi_2 + 2\alpha_1)(b + \phi_1 + \alpha_1)(e + d + 2\alpha_1) \\ &\quad +(\phi_1 + \alpha_1)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)J_3 \\ &> 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_6 &= J_1 A_3 - (L_1 + \nu + \eta) A_1 \\
&= (b + c + e + d + \phi_2 + 4\alpha_1)[(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(Q_1 + Q_3) - \nu - \eta] + (b + 2\alpha_1 + \phi_1)\Gamma_7 \\
&\quad + (b + \alpha_2 + 2\alpha_1)\Gamma_5 \\
&> (b + c + e + d + \phi_2 + 4\alpha_1)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)\alpha_2 J_3 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_7 &= -a_{33} A_3 - L_1 - \nu - \eta \\
&= (e + d + 2\alpha_1)[(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)J_2 + Q_2 + Q_3] + (\phi_1 + \alpha_1) dc\alpha_2 \\
&\quad + (J_3 + c\phi_3)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1) - dc\phi_2(b + 2\alpha_1) \\
&\quad - dc\alpha_1\alpha_2 - J_3(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1) \\
&> (b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(e + 2\alpha_1)(J_2 - J_3) + (e + d + 2\alpha_1)(Q_2 + Q_3) \\
&\quad + \frac{dc^2(\gamma\alpha_1 - \beta)\left(\mathcal{R}_{0\gamma} - 1\right)(b + \alpha_2)(b + 2\alpha_1)}{{\mathcal{R}_{0\gamma}}^2\left((b + \alpha_2)(c + d + e) + cd\right)} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Thus, $A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4 > 0$.

BIOGRAPHY

NAME	Mr. Adisak Denphetnong
DATE OF BIRTH	22 May 1986
EDUCATIONAL RECORD	
High school	Islamic College of Thailand, 2004
Bachelor's Degree	Bachelor of Science (Mathematics) King Mongkut's University of Technology Thonburi, 2008
Master's Degree	Master of Science (Applied Mathematics) King Mongkuts University of Technology Thonburi, 2011
SCHOLARSHIP	The Centre of Excellence in Mathematics, the Commission on Higher Education, Thailand.
PUBLICATIONS	Adisak Denphetnong and Wirawan Chinviriyasit, 2010, "Mathematical Analysis of Hand, Foot and Mouth Disease(HFMD) model", **Narasuan Reserch** , 28–29 July 2010, Narasuan University, Phitsanulok, Thailand. Adisak Denphetnong and Wirawan Chinviriyasit, 2010, "A mathematical model for spreading disease with transport-related infection", **International Conference for a Sustainable Greater Mekong Subregion (GMSTEC) 2010**, 26–27 August 2010, Bangkok, Thailand. Adisak Denphetnong and Wirawan Chinviriyasit, 2011, "Numerical modeling in epidemic modeling with transport–related infection", **Chiang Mai University International Conference (CMIC) 2011**, 6–7 January 2011, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand.

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

ข้อตกลงว่าด้วยการโอนสิทธิในทรัพย์สินทางปัญญาของนักศึกษาระดับบัณฑิตศึกษา

วันที่ 14 เดือน ธันวาคม พ.ศ. 2554

ข้าพเจ้า (นาย/นาง/นางสาว) อดิศักดิ์ เด็นเพ็ชรหนอง รหัสประจำตัว 52401405 เป็นนักศึกษาของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ระดับ ○ ประกาศนียบัตรบัณฑิต ∅ ปริญญาโท ○ ปริญญาเอก หลักสูตร วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะ วิทยาศาสตร์ อยู่บ้านเลขที่ 74 หมู่ 1 ตำบล/แขวง คลองใหญ่ อำเภอ/เขต ตะไหมด จังหวัด พัทลุง รหัสไปรษณีย์ 93160 เป็น "ผู้โอน"ขอโอนสิทธิในทรัพย์สินทางปัญญาให้ไว้กับมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี โดยมี **ผศ.ดร.วรนุช เกิดสินธ์ชัย** ตำแหน่ง **คณบดี** คณะวิทยาศาสตร์ เป็นตัวแทน "ผู้รับโอน" สิทธิในทรัพย์สินทางปัญญาและมีข้อตกลงดังนี้

1. ข้าพเจ้าได้จัดทำวิทยานิพนธ์เรื่อง การวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลองการระบาด *SEIRS* กับกรดิดเชื้อที่สัมพันธ์กับการเดินทาง ซึ่งอยู่ในความควบคุมของ ผศ.ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 และถือว่าเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

2. ข้าพเจ้าตกลงโอนลิขสิทธิ์จากผลงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการสร้างสรรค์ของข้าพเจ้าในวิทยานิพนธ์ให้กับมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ตลอดอายุแห่งการคุ้มครองลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 ตั้งแต่วันที่ได้รับอนุมัติโครงร่างวิทยานิพนธ์จากมหาวิทยาลัย

3. ในกรณีที่ข้าพเจ้าประสงค์จะนำวิทยานิพนธ์ไปใช้ในการเผยแพร่ในสื่อใดๆ ก็ตาม ข้าพเจ้าจะต้องระบุว่าวิทยานิพนธ์เป็นผลงานของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรีทุกครั้งที่มีการเผยแพร่

4. ในกรณีที่ข้าพเจ้าประสงค์จะนำวิทยานิพนธ์ไปเผยแพร่ หรือให้ผู้อื่นทำซ้ำหรือดัดแปลงหรือเผยแพร่ต่อสาธารณชนหรือกระทำการอื่นใด ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 โดยมีค่าตอบแทนในเชิงธุรกิจ ข้าพเจ้าจะกระทำได้เมื่อได้รับความยินยอมเป็นลายลักษณ์อักษรจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรีก่อน

5. ในกรณีที่ข้าพเจ้าประสงค์จะนำข้อมูลจากวิทยานิพนธ์ไปประดิษฐ์หรือพัฒนาต่อยอดเป็นสิ่งประดิษฐ์หรืองานทรัพย์สินทางปัญญาประเภทอื่น ภายในระยะเวลาสิบ (10) ปีนับจากวันลงนามในข้อตกลงฉบับนี้ ข้าพเจ้าจะกระทำได้เมื่อได้รับความยินยอมเป็นลายลักษณ์อักษรจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี และมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรีมีสิทธิในทรัพย์สินทางปัญญานั้น พร้อมกับได้รับชำระค่าตอบแทนการอนุญาตให้ใช้สิทธิดังกล่าว รวมถึงการจัดสรรผลประโยชน์อันพึงเกิดขึ้นจากส่วนใดส่วนหนึ่งหรือทั้งหมดของวิทยานิพนธ์ในอนาคต โดยให้เป็นไปตามระเบียบสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ว่าด้วย การบริหารผลประโยชน์อันเกิดจากทรัพย์สินทางปัญญา พ.ศ. 2538

6. ในกรณีที่มีผลประโยชน์เกิดขึ้นจากวิทยานิพนธ์หรืองานทรัพย์สินทางปัญญาอื่นที่ข้าพเจ้าทำขึ้นโดยมีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรีเป็นเจ้าของ ข้าพเจ้าจะมีสิทธิได้รับการจัดสรรผลประโยชน์อันเกิดจากทรัพย์สินทางปัญญาดังกล่าวตามอัตราที่กำหนดไว้ในระเบียบสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ว่าด้วย การบริหารผลประโยชน์อันเกิดจากทรัพย์สินทางปัญญา พ.ศ. 2538

จากทรัพย์สินทางปัญญาดังกล่าวตามอัตราที่กำหนดไว้ในระเบียบสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ว่าด้วย การบริหารผลประโยชน์อันเกิดจากทรัพย์สินทางปัญญา พ.ศ. 2538

ลงชื่อ.....ผู้โอนสิทธิ

(นางสาววรรณจกร วรสาร)

(นักศึกษา)

ลงชื่อ.....ผู้รับโอนสิทธิ

(รศ.ดร. ปิยะบุตร วานิชพงษ์พันธุ์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทนคณบดี

ลงชื่อ.....พยาน

(ดร.สมโชค สนธิแก้ว)

ลงชื่อ.....พยาน

(รศ.ดิลก ศรีประไพ)