



## รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้น  
**Simulation of Nonlinear Damped Suspended String Vibration**

ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2555

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	I
สารบัญตาราง.....	I
สารบัญภาพ.....	I
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	4
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	5
1.4 วิธีดำเนินการวิจัย.....	5
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	
2.1 แนวคิด ทฤษฎีหลักตามประเด็นให้ครอบคลุมเรื่องที่วิจัย.....	
2.1.1 การแบ่งลักษณะการสั้น.....	
2.1.1.1 การสั้นแบบอิสระหรือการสั้นแบบบังคับ.....	
2.1.1.2 การสั้นแบบมีความหน่วงและไม่มีความหน่วง.....	
2.1.1.3 การสั้นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น.....	
2.1.1.4 การสั้นแบบกำหนดได้และการสั้นแบบสุ่ม.....	
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	
3.1 สมการการสั้นของเส้นลวดในแนวคิ่งแบบมีความหน่วง.....	
3.2 การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันดับ (Finite Difference Method).....	
3.2.1 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น ( $c = 1$ ).....	

- 3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ( $c = 2$ ).....
- 3.2.3 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม ( $c = 3$ ).....
- 3.3 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อแสดงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลข.....
  - 3.3.1 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบไม่มีการเปรียบเทียบ.....
  - 3.3.2 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบมีการเปรียบเทียบ.....

#### บทที่ 4 ผลการวิจัย.....

- 4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงและมีความหน่วงเชิงเส้น.....
- 4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงและมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง.....
- 4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงและมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม.....

#### บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....

- 5.1 สรุปผลการวิจัย.....
- 5.2 ข้อเสนอแนะ.....

## สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บรรณานุกรม/เอกสารอ้างอิง.....

ภาคผนวก.....

ภาคผนวก//ก.....

ภาคผนวก//ข.....

ประวัตินักวิจัย.....

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1//.....	
2.2//.....	
3.1//.....	
3.2//.....	
3.3//.....	
4.1//.....	
4.2//.....	

## สารบัญภาพ

รูปที่	หน้า
3.2.1	กราฟแสดงการแบ่งช่วงและขอบเขตของโดเมน $[0, a] \times [0, T]$
3.2.2	กราฟแสดงการระบุตำแหน่งของแต่ละช่วงย่อยๆ ที่ถูกแบ่ง และการระบุตำแหน่งของผลเฉลย $u$
3.2.1.1	การระบุตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในสมการ (3.7)
3.2.1.2	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.10)
3.2.1.3	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.11)
รูปที่ 3.2.1.4	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.14)
รูปที่ 3.2.1.5	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.17)
รูปที่ 3.2.2.1	การระบุตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในสมการ (3.19)
รูปที่ 3.2.2.2	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.22)
รูปที่ 3.2.2.3	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.23)
รูปที่ 3.2.2.4	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.26)
รูปที่ 3.2.2.5	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.29)
รูปที่ 3.2.3.1	การระบุตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในสมการ (3.31)
รูปที่ 3.2.3.2	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.34)
รูปที่ 3.2.3.3	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.35)
รูปที่ 3.2.3.4	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.38)
รูปที่ 3.2.3.5	ตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.41)
รูปที่ 3.3.1	หน้าต่าง GUI แบบไม่มีการเปรียบเทียบ
รูปที่ 3.3.1.1	หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีการเปรียบเทียบ
รูปที่ 3.3.1.2	หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีการเปรียบเทียบ
รูปที่ 3.3.2.1	หน้าต่าง GUI แบบมีการเปรียบเทียบ
รูปที่ 3.3.2.2	หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบ
รูปที่ 3.3.2.3	หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบ
รูปที่ 4.1.1	กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ( $\psi(x) = 0$ )





รูปที่ 4.2.13 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $v(x) = x^3 + 10$

รูปที่ 4.2.14 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $v(x) = 5\sin 7x$

รูปที่ 4.2.15 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $v(x) = 3\cos 5x$

ชื่อโครงการ การจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้น.....

แหล่งเงิน ทุนประเภทส่งเสริมนักวิจัย.....

ประจำปีงบประมาณ 2555..... จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 35,000..... บาท

ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2554..... ถึง 30 กันยายน 2555

ชื่อ-สกุล หัวหน้าโครงการ ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ

หน่วยงานต้นสังกัด สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร

ลาดกระบัง

## บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับเพื่อหาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง และนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับการสั่นแบบไม่มีความหน่วงภายใต้รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นเดียวกัน ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองมีผลทำให้เส้นลวดสั่นลดลง และมีลักษณะการสั่นที่แตกต่างจากรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดอย่างมาก ในขณะที่การสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น เส้นลวดสั่นลดลงเช่นกันแต่ยังคงรักษารูปร่างการสั่นเริ่มต้นไว้ นอกจากนี้ งานวิจัยนี้ยังได้ศึกษาเพิ่มเติมว่าความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสามมีผลต่อการสั่นในแนวตั้งเช่นเดียวกับกรณีของความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองหรือไม่ ผลจากการเปรียบเทียบทั้งหมดถูกแสดงไว้ในรูปของกราฟและตารางสรุปผล และจากผลการวิจัยยังพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีผลต่อการหาแอมพลิจูดของการสั่น

**คำสำคัญ :** สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง, การสั่นแบบมีความหน่วง, ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ, ผลเฉลยเชิงตัวเลข, การจำลองเชิงตัวเลข

**Research Title:** Simulation of Nonlinear Damped Suspended String Vibration

**Researcher:** Dr. Jaipong Kasemsuwan

**Faculty:** Faculty of Science

**Department:** Department of Mathematics, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang.

## ABSTRACT

This paper presents the use of finite difference schemes to find the approximated numerical solutions of the initial-boundary-value problem of the suspended string vibrating equation with the linear damping term and the second power nonlinear damping terms. The results are compared with the suspended string without damping term provided that the initial shape and velocities are all the same. The results show that the vibration amplitude decreases and the vibration pattern demonstrates quite different from the initial pattern in the nonlinear damping case. The vibration amplitude also decreases in the linear damping case but the initial vibration pattern is still maintained. In addition, this work studies in detail the third power nonlinear damping term how it affect the vibration characteristic as the same result as the second power nonlinear damping term. The results are compared graphically and also summarized in tables. From the result, we also find that the coefficient of the damping term plays a role in determining the vibration amplitude.

**Keywords :** Suspended String Equation, Damped Vibration, Finite-Difference Method, Numerical Solution, Numerical Simulation.

## กิตติกรรมประกาศ

ในการทำวิจัยเรื่อง การจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวโค้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นนั้น ให้สำเร็จ ลุล่วงไปด้วยดีนั้น ผู้ทำวิจัยขอกราบขอบพระคุณ Prof. Masaru Yamaguchi ผู้ให้ความรู้แก่ผู้วิจัยในปัญหาที่ ทำการศึกษา รวมถึงคณาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้แก่ผู้ทำวิจัยตลอดระยะเวลาการศึกษา โดยในการวิจัยครั้งนี้ ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากทุนประเภท ส่งเสริมนักวิจัย ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555 .....

.....วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยได้รับความอนุเคราะห์อย่างยิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สวัสดิ์ โภธิวัฒน์ ประธานกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประทีป ทองไกรแสน กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้ให้ความกรุณาให้ คำปรึกษาแนะนำ ตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ เพื่อให้ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถูกต้อง มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความอนุเคราะห์ที่ได้รับ จึงขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอขอบคุณผู้เชี่ยวชาญทุกท่านที่ได้กรุณาให้คำแนะนำ ตรวจสอบแก้ไขแบบสอบถามโดยเฉพาะ ผู้ช่วย ศาสตราจารย์ ดร.ทองสุข สันแสน และอาจารย์สมใจ อินทนนท์ ที่ได้ช่วยตรวจสอบความถูกต้องต่าง ๆ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จนสามารถดำเนินการให้เสร็จเรียบร้อย และมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณ ท่านผู้บังคับการจังหวัดทหารบกสุรินทร์ พลตรีต่อศักดิ์ เหลือตระกูล และ คณะนายทหารที่มีส่วน เกี่ยวข้องทุกท่านที่ให้ความเมตตา และอำนวยความสะดวกในการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยเป็นอย่างดี

ขอขอบคุณเจ้าของเอกสาร บทความ ตำรา หนังสือทุกท่านที่ผู้วิจัยใช้ในการสืบค้นข้อมูลที่ไม่ได้กล่าวนามไว้ ณ ที่นี้ ขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สาคร พัวพันธ์ ที่ให้กำลังใจและจัดการอำนวยความสะดวกในการดำเนินการวิจัย ทุกประการ

คุณค่าและประโยชน์จากการค้นคว้าอันพึงมีของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบทดแทนบุญคุณค่าต่อบิดา มารดา และครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนศิษย์มาตลอด ด้วยวิญญานของความเป็นครู ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ

.....  
.....  
.....  
.....

# บทที่ 1

## บทนำ

ในบทนี้ จะขอล่าถึงความเป็มาและความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตของการวิจัย วิธีการดำเนินการวิจัย และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

### 1.1 ความเป็มาและความสำคัญ

ในปัจจุบัน มีงานวิจัยจำนวนมากที่ทำการศึกษาคผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคลื่น (Wave Equation) ทั้งมิติเดียวและหลายมิติ ตัวอย่างของสมการคลื่นที่ถูกนำมาใช้ในปัญหาทางวิทยาศาสตร์ที่สำคัญ ได้แก่ สมการคลื่นยาว (The Long Wave Equation) ที่ใช้เป็นส่วนหนึ่งในการอธิบายปรากฏการณ์เรื้อนกระจก รวมทั้งใช้ศึกษาลักษณะของคลื่นในทะเลเพื่อใช้อธิบายปรากฏการณ์น้ำขึ้นน้ำลง และใช้ศึกษาคลื่นชุนามิซึ่งเป็คลื่นยาวที่เกิดจากแผ่นดินสั่นสะเทือนอย่งรุนแรง

สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง (The Suspended String Oscillation Equation) [2] เป็สมการคลื่นอีกรูปแบบหนึ่งซึ่งมีความสำคัญอย่างมาก เนื่องจากสมการดังกล่าวถูกนำมาใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ที่สำคัญ เช่น การสั่นของดึกและการสั่นของเส้นลวดที่แขวนลิฟท์เมื่อเกิดแผ่นดินไหว หรือแม้แต่การสั่นของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ขนาดเล็ก เช่น การสั่นของหัวอ่านฮาร์ดดิสก์ไครฟ์ที่เกิดจากการหมุนของแผ่นบันทึกข้อมูล เป็นต้น

ที่ผ่านมางานวิจัยส่วนใหญ่ [5]-[12] ที่ศึกษาลักษณะการสั่นในแนวตั้งเป็งานวิจัยเชิงทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ซึ่งพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยประเภทต่างๆ ของปัญหาการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งทั้งที่มีความหน่วงและไม่มีความหน่วง ขั้นตอนของการพิสูจน์ในงานวิจัยเหล่านี้ทำให้ทราบว่าจะกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและข้อกำหนดของแรงภายนอกอย่างไรเพื่อป้องกันการกำทอน (Resonance) และเนื่องจากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) อยู่ในรูปแบบของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเชลชนิดที่หนึ่งซึ่งทำให้เกิดความยากในการสร้างกราฟ ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาถึงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการสั่นในแนวตั้งดังกล่าวเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์กราฟการสั่น งานวิจัย [14] ได้ทำการศึกษาคการจำลองของการสั่นแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง โดยแสดงกราฟการสั่นที่ได้จากผลเฉลยประมาณค่าโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) แอมพิจูดของการสั่นเมื่อไม่มีความเร็วเริ่มต้นถูกนำมาเปรียบเทียบกับแอมพิจูดของการสั่นเมื่อความเร็วเริ่มต้นเป็ฟังก์ชันค่าคงที่ ฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรีโกณมิติ ภายใต้งื่อนไขว่ว่าเส้นลวดมีรูปร่างเริ่มต้นเหมือนกัน และได้ข้อสรุปว่าแอมพิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงไม่ได้ขึ้นกับความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดเท่านั้น แต่ขึ้นอยู่กับรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดด้วย

อย่างไรก็ตาม โดยทั่วไปแล้วการสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้นจะเป็นการสั่นแบบมีความหน่วงแบบทั้งสิ้น (Damped Vibration) การสั่นจะเกิดการสูญเสียพลังงานในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่ของระบบไม่ว่าจะมาจากสาเหตุใดก็ตาม เป็นผลทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าลดลง [6] งานวิจัยนี้จะทำการศึกษาการจำลองของการสั่นแนวตั้งแบบมีความหน่วง การจำลองจะถูกพัฒนาจากการจำลองของการสั่นแนวตั้งที่ถูกเสนอในงานวิจัยที่ [14] สมการการสั่นจะมีพจน์ของความหน่วงเพิ่มขึ้น (Damping Term) ทำให้ต้องมีการพัฒนาสูตรของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) ที่เหมาะสม เพื่อหาผลเฉลยประมาณค่าของสมการการสั่นดังกล่าว และแสดงกราฟการสั่นของผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม MATLAB เพื่อแสดงให้เห็นว่าความหน่วงมีผลทำให้แอมพลิจูดของการสั่นลดลงจริงหรือไม่ นอกจากนี้ แอมพลิจูดของกราฟการสั่นแบบมีความหน่วงที่มีความเร็วเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันต่างๆ กัน (เช่น ฟังก์ชันค่าคงที่ ฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น) จะถูกนำมาวิเคราะห์เปรียบเทียบกับแอมพลิจูดของกราฟการสั่นแบบมีความหน่วงที่ไม่มีความเร็วเริ่มต้น ภายใต้เงื่อนไขว่าเส้นลวดมีรูปร่างเริ่มต้นเหมือนกัน การเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดการสั่นแบบมีความหน่วงจะถูกนำมาวิเคราะห์ว่าขึ้นอยู่กับความเร็วเริ่มต้นและรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดเช่นเดียวกับในงานวิจัยที่ [14] หรือไม่ พร้อมทั้งวิเคราะห์และทดสอบว่าเงื่อนไขใดที่ทำให้ผลเฉลยประมาณค่าของการสั่นลู่เข้า เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมต่อไป

## 1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 สร้างการจำลองการสั่นของเส้นลวดแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

1.2.2 พัฒนาและปรับปรุงระเบียบวิธีเชิงตัวเลขให้เหมาะสมกับปัญหาการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

1.2.3 หาเงื่อนไขที่ทำให้ผลเฉลยประมาณค่าของการสั่นลู่เข้า เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมต่อไป

1.2.4 พัฒนาและปรับปรุงโปรแกรมที่ช่วยในการสร้างกราฟการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง โดยสามารถกำหนดฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้แทนรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงได้

1.2.5 วิเคราะห์และเปรียบเทียบ แอมพลิจูดของเส้นลวดแนวตั้งแบบมีความหน่วง ที่มีรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน และหาข้อสรุปว่าเงื่อนไขใดบ้าง ที่มีผลต่อการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดการสั่นได้

1.2.6 วิเคราะห์และเปรียบเทียบ ความแตกต่างของการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง และไม่มีความหน่วง ที่มีรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นเดียวกัน เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาวิธีหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการสั้นของเส้นลวดภายใต้เงื่อนไขอื่นๆ ต่อไป

### 1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1.3.1 งานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์การสั้นของเส้นลวดแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

1.3.2 ตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดจะถูกกำหนดด้วยฟังก์ชันพื้นฐาน เช่น ฟังก์ชันค่าคงที่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันพหุนาม เป็นต้น

1.3.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั้นของเส้นลวดแบบมีความหน่วงในรูปของกราฟ พร้อมทั้งวิเคราะห์ผลกระทบของความหน่วงว่ามีผลต่อการสั้นของเส้นลวดอย่างไร

### 1.4 วิธีการดำเนินการวิจัย

1.4.1 ศึกษา ค้นคว้า งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และทำความเข้าใจในรายละเอียดของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขว่ามีส่วนใดในงานวิจัยที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับงานวิจัยนี้ได้

1.4.2 พัฒนาและปรับปรุงสูตรของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขให้เหมาะสมในการหาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาที่ทำการศึกษา พร้อมทั้งหาเงื่อนไขการลู่เข้า

1.4.3 พัฒนาและปรับปรุงโปรแกรมแสดงลักษณะกราฟของผลเฉลยลักษณะต่างๆ ที่มีรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน

1.4.4 วิเคราะห์เปรียบเทียบ ลักษณะการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดกราฟการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง ภายใต้รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน พร้อมทั้งนำไปเปรียบเทียบกับการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งที่ไม่มีความหน่วง

1.4.5 เขียนรายงานเสนอความก้าวหน้า

1.4.6 แก้ไข เพิ่มเติมรายละเอียดของผลการวิจัย

1.4.7 รวบรวม เรียบเรียงเนื้อหา เพื่อเขียนรายงานฉบับสมบูรณ์

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ได้การจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

1.5.2 ได้สูตรและเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถนำมาใช้หาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาการสั้นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

1.5.3 ได้โปรแกรมที่ช่วยในการสร้างกราฟการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น โดยสามารถกำหนดฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้แทนรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดได้

1.5.4 ทำให้สามารถวิเคราะห์ความแตกต่างของกราฟและเงื่อนไขการเพิ่มขึ้นและลดลงของแอมพลิจูดการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น พร้อมทั้งเปรียบเทียบกับการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งที่ไม่มีมีความหน่วง

## บทที่ 2

### ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับการศึกษาปัญหาการสั่นในแนวดิ่งแบบมีความหน่วงนั้น มีทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

#### 2.1 แนวคิด ทฤษฎีหลักตามประเด็นให้ครอบคลุมเรื่องที่วิจัย

##### 2.1.1 การแบ่งลักษณะการสั่น [1]

การแบ่งประเภทของการสั่นสามารถที่จะแบ่งออกได้หลายประเภท สำหรับในหัวข้อนี้จะเป็นการอธิบายถึงการแบ่งการสั่นประเภทต่างๆ ที่สำคัญและพบเห็นในการศึกษาขั้นพื้นฐานนี้ [1]

##### 2.1.1.1 การสั่นแบบอิสระหรือการสั่นแบบบังคับ

**การสั่นแบบอิสระ (Free Vibration)** คือ การสั่นของระบบในลักษณะที่หลังจากมีการรบกวนระบบที่หยุดนิ่งอยู่ที่จุดสมดุลครั้งแรกเพื่อให้เกิดการสั่นขึ้นแล้ว การสั่นนั้นดำเนินต่อไปโดยไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำกับระบบอีกเลย การรบกวนระบบอาจจะเป็นการทำให้เกิดการกจัดเบื้องต้นหรือทำให้เกิดความเร็วเริ่มต้นหรือทั้งสองแบบรวมกันก็ได้

**การสั่นแบบบังคับ (Force Vibration)** คือ การสั่นของระบบภายใต้แรงกระทำจากภายนอก ซึ่งแรงกระทำจากภายนอกนี้อาจจะเป็นแรงในลักษณะชั่วตัวเองหรือไม่ชั่วตัวเองก็ได้ การสั่นในลักษณะนี้ก็เช่นการสั่นเนื่องจากความไม่สมดุลของเครื่องจักรที่เกิดการหมุน สิ่งหนึ่งที่เราจะพบกับการสั่นแบบบังคับก็คือหากว่าความถี่ของแรงที่กระทำกับระบบนั้น ไปพ้องกับความถี่ธรรมชาติของระบบพอดี การสั่นที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะที่มีช่วงกว้างการสั่นที่สูงมาก เราเรียกการสั่นในลักษณะนี้ว่า **การสั่นพ้อง (Resonance)** ซึ่งผลของการสั่นพ้องนี้มักจะทำให้เกิดความเสียหายกับโครงสร้างที่กำลังเกิดการสั่นอยู่ ดังนั้นในการออกแบบวิศวกรมักจะหลีกเลี่ยงการเกิดการสั่นพ้องของระบบ ยกเว้นในระบบที่ต้องการให้เกิดการสั่นมากๆ เช่น ในลำโพงขนาดใหญ่ เป็นต้น

##### 2.1.1.2 การสั่นแบบมีความหน่วงและไม่มีความหน่วง

**การสั่นแบบไม่มีความหน่วง (Undamped Vibration)** หมายถึง การสั่นที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานให้กับสิ่งแวดล้อมของระบบ ไม่ว่าจะอยู่ในรูปแรงเสียดทานหรือแรงต้านอื่นใด ซึ่งเมื่อระบบเคลื่อนที่แบบไม่มีความหน่วงจะทำให้พลังงานรวมของระบบในระหว่างการเคลื่อนที่นี้มีค่าคงที่ การสั่นที่ไม่มีความหน่วงของระบบในความเป็นจริงจะเกิดขึ้นได้ในโอกาสเท่านั้น เพราะวัตถุที่เกิดการเคลื่อนที่โดยทั่วไปแล้วจะเกิดการสูญเสียพลังงานบ้างอย่างน้อยที่สุดก็จะสูญเสียพลังงานเนื่องจากแรงเสียดทานกับอากาศรอบข้าง สำหรับ

ระบบที่เกิดการสั่นแบบไม่มีความหน่วงและเป็นการสั่นแบบอิสระความถี่ของการสั่นของระบบจะเรียกว่า *ความถี่ธรรมชาติ* (Natural Frequency) ซึ่งความถี่ธรรมชาตินี้ถือว่าเป็นปริมาณที่มีความสำคัญมากในการออกแบบเพื่อป้องกันการสั่นของอุปกรณ์หรือโครงสร้าง

**การสั่นแบบมีความหน่วง** (Damped Vibration) คือการสั่นที่เกิดการสูญเสียพลังงานในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่ของระบบไม่ว่าจะมาจากสาเหตุใดก็ตาม ซึ่งเป็นผลทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าลดลงโดยทั่วไปแล้วการสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้นจะเป็นการสั่นแบบมีความหน่วงแทบทั้งสิ้น

### 2.1.1.3 การสั่นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น

ถ้าระบบของการสั่นซึ่งจะประกอบด้วย มวล สปริง และตัวหน่วง มีพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงค่าของแรงกระทำไปอย่างเชิงเส้นกับระยะทางหรือความเร็วของพิกัดที่ใช้ เราจะเรียกการสั่นนั้นว่า *การสั่นเชิงเส้น* (Linear Vibration) แต่ถ้าหากไม่เป็นเช่นนั้น คือ มีปริมาณใดปริมาณหนึ่งเปลี่ยนแปลงไม่เป็นเชิงเส้นกับระยะทางหรือความเร็ว เราจะเรียกการสั่นนั้นว่า *การสั่นไม่เชิงเส้น* (Nonlinear Vibration) ซึ่งความแตกต่างของการสั่นทั้งสองแบบนี้ก็คือ สมการการเคลื่อนที่จะได้เป็นสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น (Linear และ Nonlinear Differential Equation) ตามลำดับ ซึ่งผลที่ตามมาคือการแก้สมการอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นจะมีความยุ่งยากมากกว่าแบบที่เป็นเชิงเส้นมาก

นอกเหนือจากนั้นแล้ว หากการสั่นเป็นการสั่นเชิงเส้นจะทำให้เราสามารถนำหลักการของการรวมตำแหน่ง (Principle of Superposition) ซึ่งเป็นการแยกพิจารณาการสั่นเนื่องจากภาระกรรมแต่ละภาระกรรมแล้วนำผลที่ได้ทั้งหมดมารวมกันเป็นคำตอบสุดท้าย ซึ่งในหลายๆกรณีจะช่วยลดความยุ่งยากในการคำนวณลงไปได้มาก แต่สำหรับการสั่นไม่เชิงเส้นนั้นเราจะใช้หลักการดังกล่าวนี้ไม่ได้

### 2.1.1.4 การสั่นแบบกำหนดได้และการสั่นแบบสุ่ม

เมื่อระบบเกิดการสั่นอยู่ภายใต้แรงกระทำจากภายนอกลักษณะใดก็ตาม ถ้าหากว่าตลอดเวลาที่แรงกระทำอยู่นั้นเราสามารถกำหนดขนาดของแรงได้หรือทราบค่าความสัมพันธ์ของแรงซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาที่แรงนั้นกระทำ เราจะเรียกแรงกระทำนั้นว่า *แรงที่กำหนดค่าได้* (Deterministic Force) ซึ่งผลของแรงนี้จะทำให้เกิด การสั่นแบบกำหนดได้ (Deterministic Vibration)

สำหรับกรณีที่แรงที่กระทำต่อระบบไม่สามารถกำหนดขนาดที่เวลาใดๆ ได้อย่างแน่นอน เราจะเรียกแรงแบบนี้ว่า *แรงแบบสุ่ม* (Undeterministic หรือ Random Force) และการสั่นที่เกิดจากแรงดังกล่าวจะเรียกว่า *การสั่นแบบสุ่ม* (Random Vibration) ซึ่งการแก้ปัญหาของการสั่นแบบสุ่มนั้นจะต้องใช้วิธีการทางสถิติเข้ามาช่วยแก้ปัญหา

การแบ่งลักษณะการสั้น [1]





## 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ลักษณะการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง (The Suspended String Oscillation Equation) ถูกศึกษาโดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย [2] ตามที่ได้อธิบายรายละเอียดที่มาของสมการไว้ [3] การสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งจะถูกเขียนในรูปของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - Lu(x,t) = 0$$

เงื่อนไขขอบเขตคือ  $u(0,t) = 0$  เมื่อ  $t \in (0, T)$

เงื่อนไขเริ่มต้นคือ  $u(x,0) = f_1(x)$  และ  $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x)$  เมื่อ  $x \in (0, a)$

เมื่อ  $L$  เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง กำหนดโดย

$$L = \left( \frac{x}{\mu+1} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}$$

ซึ่งผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 ตามที่ได้อธิบายรายละเอียดไว้ [4] ดังนี้

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left( p_j \cos \sqrt{\lambda_j} t + \frac{q_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \sqrt{\lambda_j} t \right) \frac{1}{\sqrt{a} J_{\mu+1}(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{x^{\frac{\mu}{2}}} J_{\mu}(\gamma_k \sqrt{\frac{x}{a}})$$

ที่ผ่านมางานวิจัยส่วนใหญ่ [5]-[12] ที่ได้ศึกษาลักษณะการสั่นในแนวตั้งนั้น เป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ โดยพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยประเภทต่างๆ ของปัญหาการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง ทั้งแบบมีความหน่วงและไม่มีความหน่วง ขั้นตอนของการพิสูจน์ในงานวิจัยเหล่านี้ทำให้ทราบว่าควรจะต้องกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและข้อกำหนดของแรงภายนอกอย่างไรเพื่อป้องกันการกำทอน (Resonance) ดังที่อธิบายรายละเอียดไว้ในบทความวิชาการ [13]

เนื่องจากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) อยู่ในรูปแบบของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งทำให้เกิดความยากในการสร้างกราฟ งานวิจัย [14] และ [15] ได้ศึกษาถึงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการสั่นในแนวตั้งดังกล่าวเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์กราฟการสั่น โดยงานวิจัย [15] ใช้วิธีแครงค์นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(4mp-4)u_1^n + (2mp+p)u_2^n - 2u_1^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x,t)) \\ (2mp-p)u_1^n - (4mp-4)u_2^n + (2mp+p)u_3^n - 2u_2^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x,t)) \\ \vdots \\ (2mp-p)u_{m-1}^n - (4mp-4)u_m^n + (2mp+p)u_{m+1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x,t)) \\ -(4Mp-4)u_M^n + (4Mp)u_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x,t)) \end{bmatrix}$$

โดยที่  $m = 1, \dots, M$  และ  $n = 1, \dots, N$  และ  $p = \frac{k^2}{h}$  เมื่อ  $h$  และ  $k$  เป็นขนาดของช่วงที่ถูกแบ่งของตำแหน่ง  $x$  และเวลา  $t$  ตามลำดับ

ผลเฉลยที่ได้ถูกนำมาใช้เปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัย [14] ซึ่งใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) ตามสูตร ต่อไปนี้

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ (2mp + p)u_{m+1}^n - (4mp - 4)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} \right]$$

$$u_m^1 = \frac{1}{2} \left[ (2mp + p)u_{m+1}^0 - (4mp - 2)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + 2kf_2(x) \right]$$

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ -(4Mp - 4)u_M^n + (4Mp)u_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} \right]$$

$$u_M^1 = \frac{1}{2} \left[ -(4Mp - 2)u_M^0 + (4Mp)u_{M-1}^0 + 2kf_2(x) \right]$$

และจาก [15] ได้ข้อสรุปว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขจากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน ภายใต้ตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วต้นของเส้นลวดแบบเดียวกัน โดยวิธีแครงค์นิโคลสันดีกว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะ เนื่องจากค่าแอมพลิจูดที่ได้มีค่าน้อยกว่า โดยสังเกตจากกราฟจะเห็นลักษณะการสั่นที่ราบเรียบและต่อเนื่องกว่า อีกทั้งวิธีแครงค์นิโคลสันยังสามารถแบ่งความละเอียดของโดเมนเท่าใดก็ได้

เนื่องจาก โดยทั่วไปแล้วการสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้น จะเป็นการสั่นแบบมีความหน่วงแบบทั้งสิ้น (Damped Vibration) การสั่นจะเกิดการสูญเสียพลังงานในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่ของระบบไม่ว่าจะมาจากสาเหตุใดก็ตาม เป็นผลทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าลดลงตามที่ได้ศึกษาไว้ใน [7] ดังสมการและทฤษฎีบท ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - x \partial_x^2 u(x,t) - \partial_x u(x,t) + \alpha |u_t|^{p-1} u_t &= \beta |u|^{q-1} u, & (x,t) \in \Omega, \\ u(a,t) &= 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x,0) &= \psi(x), & x \in (0,a) \end{aligned} \quad (2.1)$$

**ทฤษฎีบท** ปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตตามสมการ (2.1) มีผลเฉลยอย่างอ่อน  $u \in H_0^1(\Omega; x^0)$  โดย  $u(\cdot, t) \in W$  สำหรับทุกๆ ค่าของ  $t \in (0, T)$  และสอดคล้องกับการประมาณค่าการลดลงของพลังงาน ดังสมการ

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } p = 1 \text{ แล้ว} & \quad E(u(t), u_t(t)) \leq \tilde{c}_1 e^{kt} & \text{บน } [0, \infty) \\ \text{และถ้า } p > 1 \text{ แล้ว} & \quad E(u(t), u_t(t)) \leq \tilde{c}_2 (1+t)^{-2/(p-1)} & \text{บน } [0, \infty) \end{aligned}$$

โดยที่  $k$ ,  $\tilde{c}_1$  และ  $\tilde{c}_2$  เป็นค่าคงที่ที่เป็นบวก และขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้น

### บทที่ 3

#### วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้ จะกล่าวถึงที่มาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง และการหาสูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาดังกล่าว รวมถึงขั้นตอนของการใช้โปรแกรมเพื่อแสดงผลการคำนวณในรูปของกราฟและตารางข้อมูลของผลเฉลยเชิงตัวเลข

#### 3.1 สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาการจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง เชิงเส้นและไม่เชิงเส้น โดยกำหนดให้เส้นลวดยาว  $a$  หน่วย มีความยืดหยุ่น (Flexible) มีน้ำหนัก (Heavy) และมีความหนาแน่นแบบเอกกรุป (Uniform Density) เส้นลวดถูกแขวนในแนวตั้งโดยปลายด้านบน ( $x=0$ ) ถูกตรึงให้อยู่กับที่ ส่วนปลายด้านล่าง ( $x=a$ ) มีความชันเป็นศูนย์ รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดขึ้นอยู่กับตำแหน่ง  $x$  กล่าวคือ  $\phi(x)$  และ  $\psi(x)$  ตามลำดับ ถ้ากำหนดให้  $u(x,t)$  แทนตำแหน่งการสั่น (Displacement) ของเส้นลวดที่จุด  $x$  ณ เวลา  $t$  สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงจะถูกแสดงในรูปของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขต (Initial Boundary Value Problem) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$u_{tt} - (xu_{xx} + u_x) + \alpha|u_t|^{c-1}u_t = 0, \quad \alpha < 0, c \geq 1, \quad (3.1)$$

$$\text{เงื่อนไขขอบเขต} \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(a,t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น} \quad u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0, a].$$

เมื่อ  $\alpha$  เป็นสัมประสิทธิ์ของความหน่วงและมีค่าเป็นบวก และ  $c \geq 1$

จากสมการ (3.1) จะเห็นว่ามีการเพิ่มพจน์ของความหน่วง  $\alpha|u_t|^{c-1}u_t$  ซึ่งอยู่ในรูปแบบทั่วไปลงในสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงทำให้สมการกลายเป็นสมการการสั่นแบบมีความหน่วง สำหรับที่มาของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง สามารถดูรายละเอียดตามเอกสารอ้างอิงที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.2

เนื่องจากสมการ (3.1) เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น ทำให้ยากต่อการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) ในงานวิจัยนี้จึงทำการศึกษาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ เพื่อนำมาสร้างเป็นการจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง

### 3.2 การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันดับ (Finite Difference Method)

เพื่อประมาณค่าเชิงอนุพันธ์ด้วยผลต่างอันดับ สมการที่ (3.1) จะถูกเขียนอยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned} u_{tt} - ((m\Delta x)u_{xx} + u_x) + \alpha |u_t|^{c-1} u_t &= 0, & \alpha < 0, c \geq 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(a,t) &= 0, & t \in [0, T], \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) &= \psi(x), & x \in [0, a]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

โดยที่  $m = 1, \dots, M$  เมื่อ  $M = \frac{a-0}{\Delta x}$

$$\left( \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[ mh \left( \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left( \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] + \alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left( \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = 0 \quad (3.3)$$

$u_m^{n+1} = u(x, t+k)$ ,  $u_m^n = u(x, t)$ ,  $u_m^{n-1} = u(x, t-k)$ ,  $u_{m+1}^n = u(x+h, t)$ ,  $u_{m-1}^n = u(x-h, t)$ ,  $u_{m+1}^{n+1} = u(x+h, t+k)$ ,  
 $u_{m-1}^{n+1} = u(x-h, t+k)$ , โดยที่  $m = 1, \dots, M$  และ  $n = 1, \dots, N$  เมื่อ  $M = \frac{a-0}{\Delta x}$  และ  
 $N = \frac{T-0}{\Delta t}$ ,  $h = \Delta x$  และ  $k = \Delta t$  เป็นขนาดของช่วงที่ถูกแบ่งของตำแหน่ง  $x$  และเวลา  $t$  ตามลำดับ

จากพจน์สุดท้ายทางซ้ายมือของสมการ (3.3) เราสามารถพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1  $u_m^{n+1} - u_m^{n-1} > 0$  จะได้ว่า

$$\alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left( \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = \alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^c = \alpha \frac{|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c}{(2k)^c}$$

กรณีที่ 2  $u_m^{n+1} - u_m^{n-1} < 0$  จะได้ว่า

$$\alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left( \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = -\alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^c = -\alpha \frac{|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c}{(2k)^c}$$

ก่อนอื่น จะพิจารณาสูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับที่ใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับกรณีที่หนึ่งก่อน ส่วนกรณีที่สองจะคำนวณในลักษณะเดียวกัน(ต่างกันแค่เพียงเครื่องหมาย) ดังนี้

เมื่อแทนค่าสมการที่ได้จากกรณีที่หนึ่งลงในสมการที่ (3.3) จะได้ว่า

$$\left( \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[ mh \left( \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left( \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] + \alpha \frac{|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c}{(2k)^c} = 0 \quad (3.4)$$

นำ  $2k^2$  คูณตลอดในสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{1-c} k^{2-c} |u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c = 0 \quad (3.5)$$

ซึ่ง  $p = \frac{k^2}{h}$ ,  $c \geq 1$

พิจารณาพจน์  $|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c$  ในสมการ (3.5) โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) ดังสมการต่อไปนี้

จะได้สูตรรูปทั่วไปคือ

ถ้า  $c$  และ  $r$  เป็นจำนวนเต็ม โดยที่  $0 \leq r \leq n$  แล้ว

$$(a+b)^c = \sum_{r=0}^c \binom{c}{r} a^{c-r} b^r$$

หรือ  $(a+b)^c = \binom{c}{0} a^c b^{c-0} + \binom{c}{1} a^{c-1} b^1 + \binom{c}{2} a^{c-2} b^2 + \dots + \binom{c}{c} a^{c-c} b^c$

หรือ  $(a+b)^c = a^c + \binom{c}{1} a^{c-1} b^1 + \binom{c}{2} a^{c-2} b^2 + \dots + b^c$

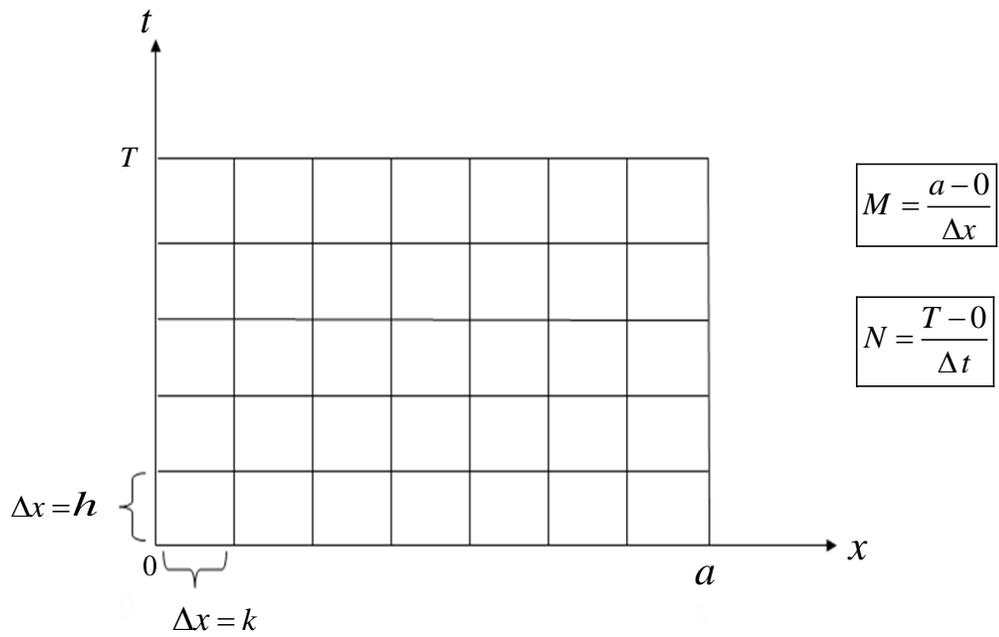
$$(u_m^{n+1} - u_m^{n-1})^c = u_m^{n+1c} + \binom{c}{1} u_m^{n+1c-1} (-u_m^{n-1})^1 + \binom{c}{2} u_m^{n+1c-2} (-u_m^{n-1})^2 + \dots + (-u_m^{n-1})^c$$

ในงานวิจัยนี้ เราจะแบ่งการพิจารณาเป็น 3 หัวข้อ คือ

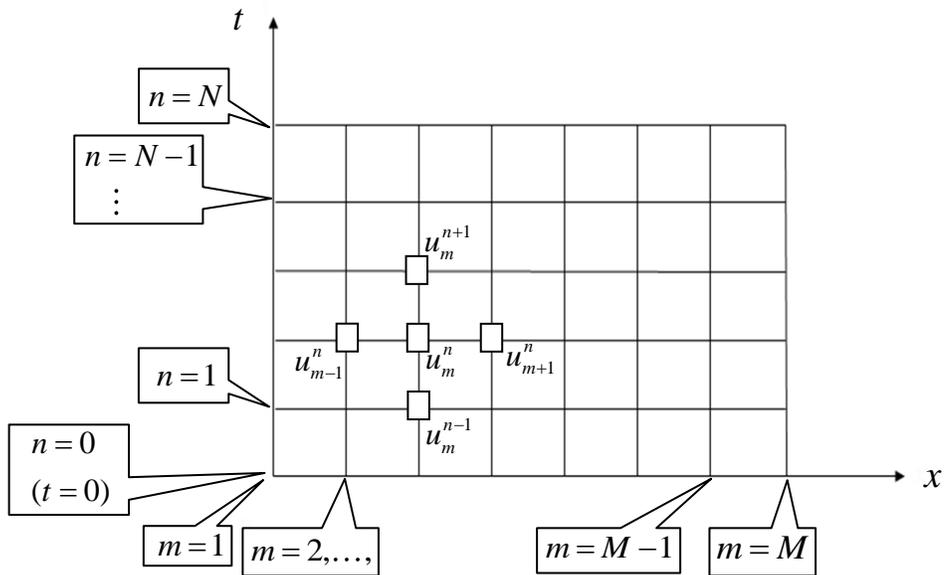
3.2.1 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น ( $c = 1$ )

3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ( $c = 2$ )

3.2.3 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม ( $c = 3$ )



**รูปที่ 3.2.1** กราฟแสดงการแบ่งช่วงและขอบเขตของโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$



**รูปที่ 3.2.2** กราฟแสดงการระบุตำแหน่งของแต่ละช่วงย่อยๆ ที่ถูกแบ่ง และการระบุตำแหน่งของผลเฉลย  $u$

### 3.2.1 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น ( $c = 1$ )

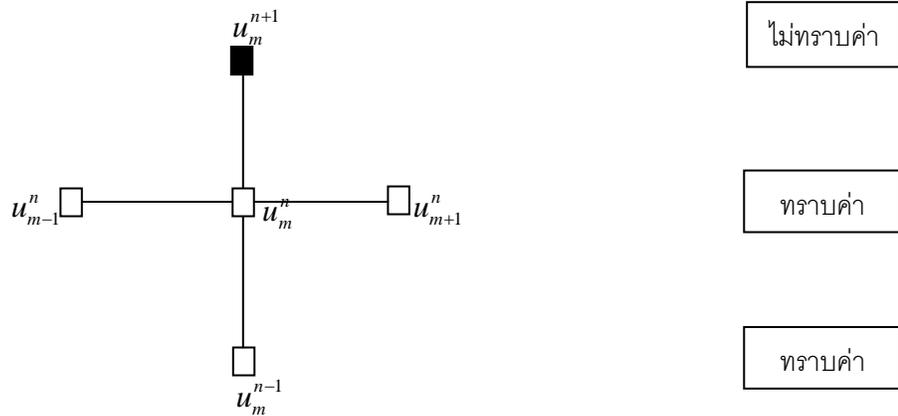
เมื่อแทน  $c = 1$  ลงในสมการ (3.5) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha k(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) = 0 \quad (3.6)$$

จากสมการที่ (3.6) จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปชัดเจน (Explicit Form) ได้ดังนี้

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1}] \quad (3.7)$$

ซึ่ง  $p = \frac{k^2}{h}$



**รูปที่ 3.2.1.1** การระบุตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในสมการ (3.7)

จากสมการ (3.7) เราจะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับทั้งหมด 4 สูตรจาก 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ  $n = 0$  และ  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$

กรณีที่ 2 เมื่อ  $n > 0$  และ  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$

กรณีที่ 3 เมื่อ  $n = 0$  และ  $m = M$

กรณีที่ 4 เมื่อ  $n > 0$  และ  $m = M$

กรณีที่ 1 แทน  $n = 0$  ในสมการที่ (3.7) เมื่อ  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$  จะได้ว่า

$$u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (\alpha k - 2)u_m^{-1}] \quad (3.8)$$

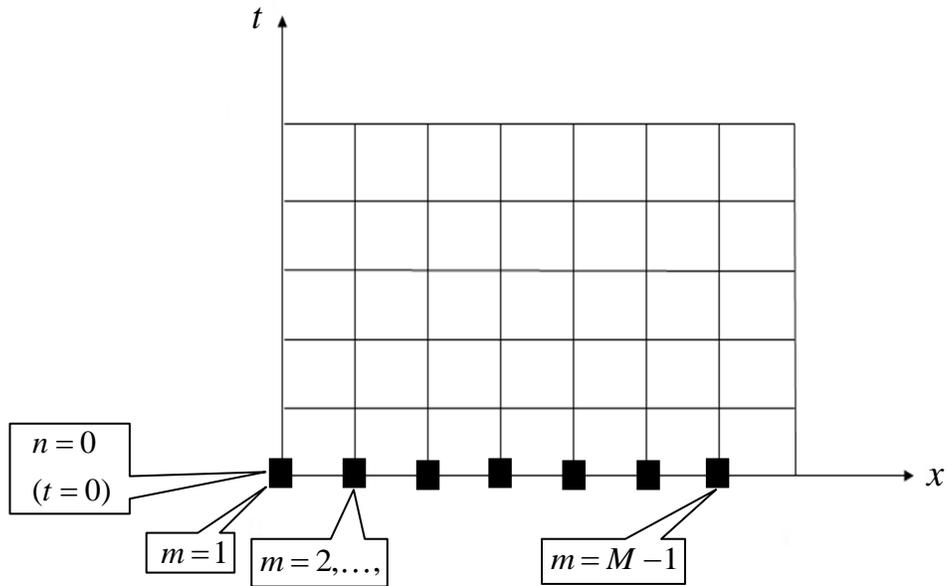
เนื่องจาก  $u_m^{-1}$  ในสมการ (3.8) อยู่นอกโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$  ดังนั้น  $u_m^{-1}$  จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} \approx \psi(x) \quad \text{หรือ} \quad u_m^{-1} \approx u_m^0 - k\psi(x) \quad (3.9)$$

แทนสมการที่ (3.9) ในสมการที่ (3.8) จะได้ว่า

$$u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (2mp + p)u_{m+1}^0 + (2 - 4mp + \alpha k)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) \right] \quad (3.10)$$

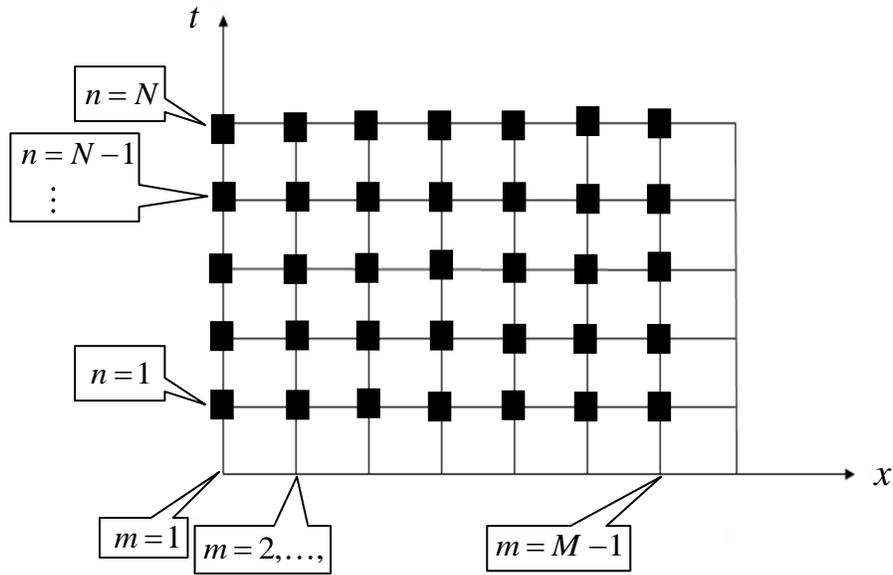
โดยที่  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$



**รูปที่ 3.2.1.2** ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.10)

กรณีที่ 2 แทน  $n > 0$  ในสมการที่ (3.7) เมื่อ  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$  จะได้ว่า

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1} \right] \quad (3.11)$$



**รูปที่ 3.2.1.3** ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.11)

กรณีที่ 3 แทน  $n = 0$  และ  $m = M$  ในสมการที่ (3.10) จะได้ว่า

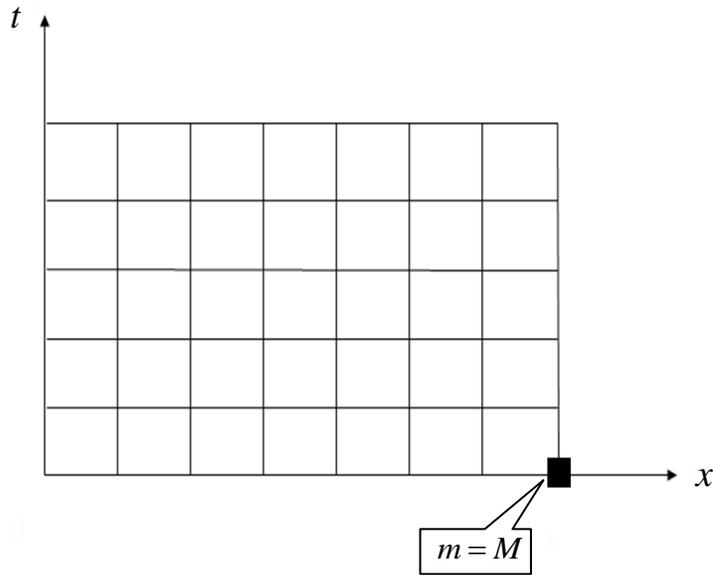
$$u_M^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (2Mp + p)u_{M+1}^0 + (2 - 4Mp + \alpha k)u_M^0 + (2Mp - p)u_{M-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) \right] \quad (3.12)$$

เนื่องจาก  $u_{M+1}^0$  ในสมการ (3.12) อยู่นอกโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$  ดังนั้น  $u_m^{-1}$  จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_{M-1}^0}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^0 \approx u_{M-1}^0 \quad (3.13)$$

แทนสมการที่ (3.13) ในสมการที่ (3.12) จะได้ว่า

$$u_M^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (2 - 4Mp + \alpha k)u_M^0 + 4Mpu_{M+1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) \right] \quad (3.14)$$



**รูปที่ 3.2.1.4** ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.14)

กรณีที่ 4 แทน  $n > 0$  และ  $m = M$  ในสมการที่ (3.11) จะได้ว่า

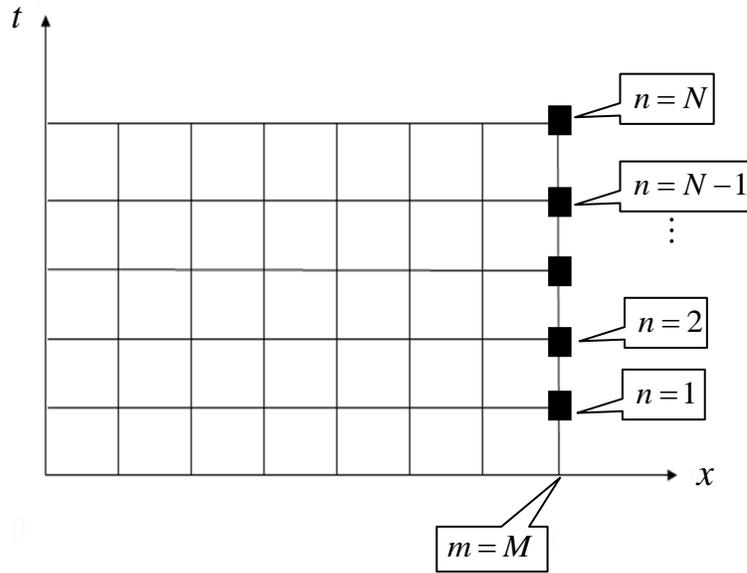
$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (2Mp + p)u_{M+1}^n + (4 - 4Mp)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} \right] \quad (3.15)$$

เนื่องจาก  $u_{M+1}^n$  ในสมการ (3.15) อยู่นอกโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$  ดังนั้น  $u_{M+1}^n$  จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^n \approx u_{M-1}^n \quad (3.16)$$

แทนสมการที่ (3.16) ในสมการที่ (3.15) จะได้ว่า

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (4 - 4Mp)u_M^n + 4Mpu_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} \right] \quad (3.17)$$



**รูปที่ 3.2.1.5** ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.17)

จากสมการ (3.10) (3.11) (3.14) และ (3.17) จะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับสูง สำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้น ดังนี้

สูตรที่ 1 
$$u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (2mp + p)u_{m+1}^0 + (2 - 4mp + \alpha k)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) \right]$$

สูตรที่ 2 
$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1} \right]$$

เมื่อ  $m = 1, \dots, M - 1$

สูตรที่ 3 
$$u_M^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (2 - 4Mp + \alpha k)u_M^0 + 4Mp u_{M-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) \right]$$

สูตรที่ 4 
$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (4 - 4Mp)u_M^n + 4Mp u_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} \right]$$

โดยที่ 
$$p = \frac{k^2}{h}$$

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจการใช้สูตรจะขอแสดงตำแหน่งต่างๆ สำหรับสูตรแต่ละสูตรดังนี้

### 3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ( $c = 2$ )

เมื่อแทน  $c = 2$  ลงในสมการ (3.5) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} |u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^2 = 0 \quad (3.18)$$

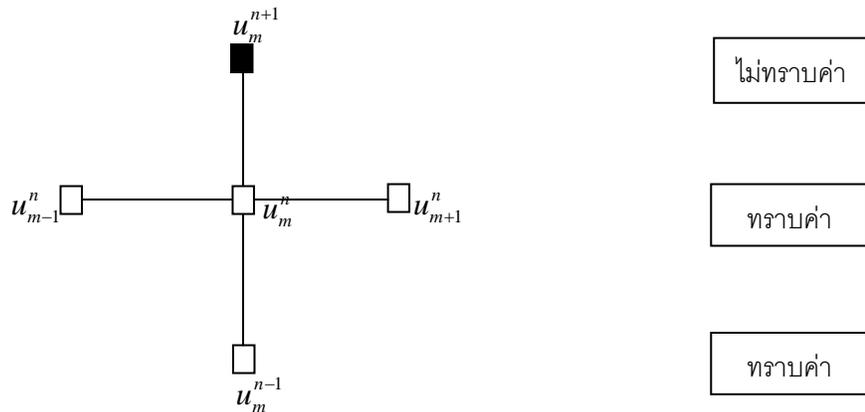
แทน  $|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^2 = (u_m^{n+1})^2 - 2u_m^{n+1}u_m^{n-1} + (u_m^{n-1})^2$  ลงในสมการ (3.18) จะได้

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} [(u_m^{n+1})^2 - 2u_m^{n+1}u_m^{n-1} + (u_m^{n-1})^2] = 0$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปชัดเจน (Explicit Form) ได้ดังนี้

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{n-1})} [(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1}] \quad (3.19)$$

โดย  $p = \frac{k^2}{h}$



#### รูปที่ 3.2.2.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย $u$ ในสมการ (3.19)

จากสมการ (3.19) เราจะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับทั้งหมด 4 สูตรจาก 4 กรณี เช่นเดียวกับหัวข้อ 3.2.1 ดังนี้

กรณีที่ 1 แทน  $n = 0$  ในสมการที่ (3.19) เมื่อ  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$  จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{-1})} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{-1})} [(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 - (\alpha u_m^{-1} + 2)u_m^{-1}] \quad (3.20)$$

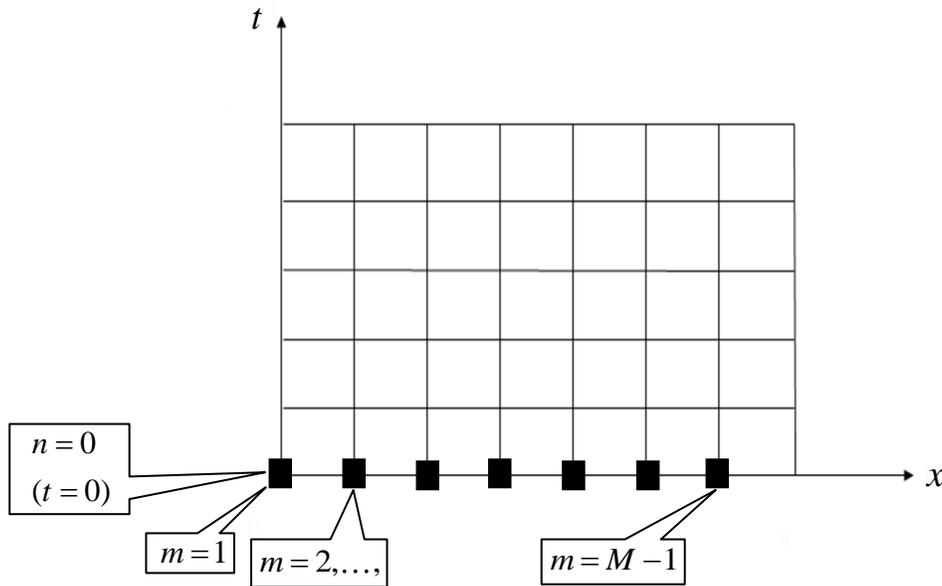
เนื่องจาก  $u_m^{-1}$  ในสมการ (3.20) อยู่นอกโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$  ดังนั้น  $u_m^{-1}$  จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} \approx \psi(x) \quad \text{หรือ} \quad u_m^{-1} \approx u_m^0 - k\psi(x) \quad (3.21)$$

แทนสมการที่ (3.21) ในสมการที่ (3.20) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha(u_m^0 - k\psi(x)))} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2 - \alpha(u_m^0 - k\psi(x)))} \left[ \begin{array}{l} (2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 \\ -(\alpha(u_m^0 - k\psi(x)) + 2)(u_m^0 - k\psi(x)) \end{array} \right] \quad (3.22)$$

โดยที่  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$

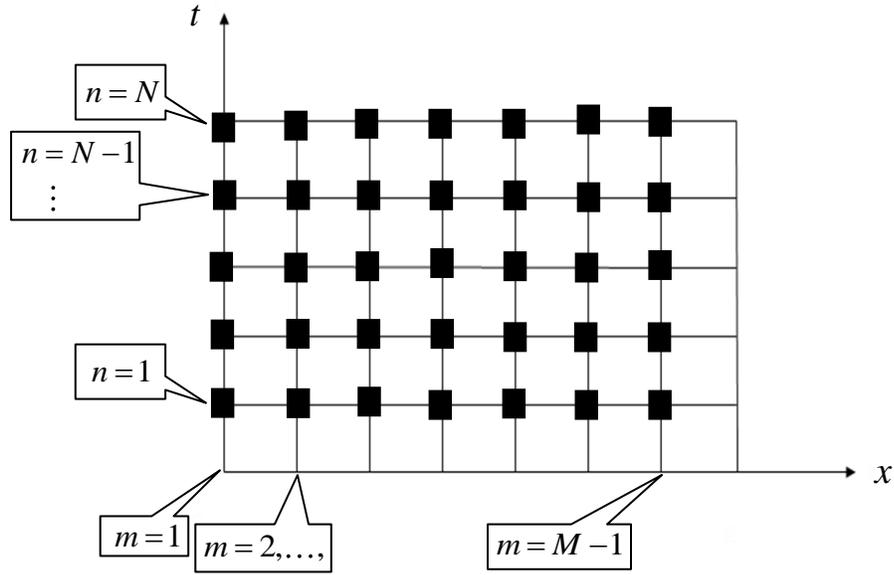


**รูปที่ 3.2.2.2** ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.22)

กรณีที่ 2 แทน  $n > 0$  ในสมการที่ (3.7) เมื่อ  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$  จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{n-1})} \left[ (2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1} \right] \quad (3.23)$$

โดยที่  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$



**รูปที่ 3.2.2.3** ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.23)

กรณีที่ 3 แทน  $n = 0$  และ  $m = M$  ในสมการที่ (3.22) จะได้ว่า

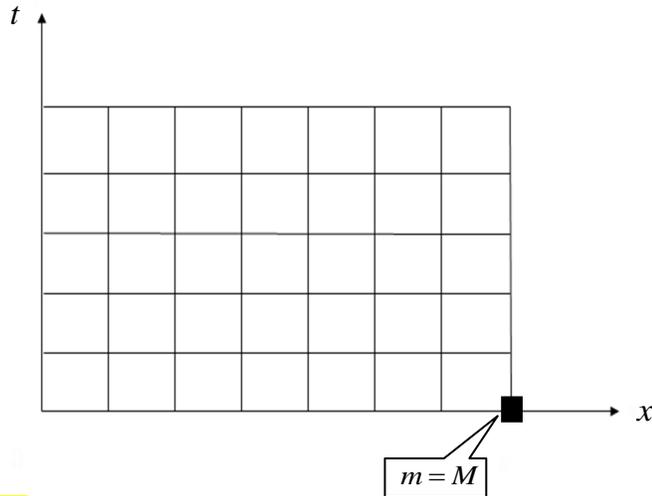
$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2 - \alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} \left[ (2Mp + p)u_{M+1}^0 + (4 - 4Mp)u_M^0 + (2Mp - p)u_{M-1}^0 \right] \left[ -(\alpha(u_M^0 - kf_2(x)) + 2)(u_M^0 - k\psi(x)) \right] \quad (3.24)$$

เนื่องจาก  $u_{M+1}^0$  ในสมการ (3.24)อยู่นอกโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$  ดังนั้น  $u_m^{-1}$  จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_{M-1}^0}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^0 \approx u_{M-1}^0 \quad (3.25)$$

แทนสมการที่ (3.25) ในสมการที่ (3.24) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2 - \alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} \left[ 4Mp u_{M-1}^0 + (4 - 4Mp)u_M^0 \right] \left[ -(\alpha(u_M^0 - kf_2(x)) + 2)(u_M^0 - k\psi(x)) \right] \quad (3.26)$$



รูปที่ 3.2.2.4 ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.26)

กรณีที่ 4 แทน  $n > 0$  และ  $m = M$  ในสมการที่ (3.23) จะได้ว่า

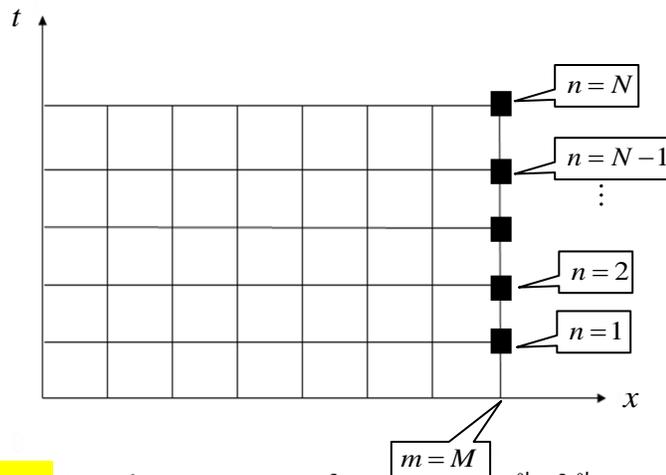
$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[ (2Mp + p)u_{M+1}^n + (4 - 4Mp)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} \right] \quad (3.27)$$

เนื่องจาก  $u_{M+1}^n$  ในสมการ (3.27) อยู่นอกโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$  ดังนั้น  $u_{M+1}^n$  จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^n \approx u_{M-1}^n \quad (3.28)$$

แทนสมการที่ (3.28) ในสมการที่ (3.27) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_M^{n-1})} (u_M^{n+1})^2 + u_M^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_M^{n-1})} \left[ (2Mp + p)u_{M+1}^n + (4 - 4Mp)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n - (\alpha u_M^{n-1} + 2)u_M^{n-1} \right] \quad (3.29)$$



รูปที่ 3.2.2.5 ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.29)

จากสมการ (3.22) (3.23) (3.26) และ (3.29) จะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการเคลื่อนที่ของเส้นลวดในแนวโค้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ดังนี้

**สูตรที่ 1**

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_m^0 - kf_2(x)))} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_m^0 - kf_2(x)))} \left[ (2mp+p)u_{m+1}^0 + (4-4mp)u_m^0 + (2mp-p)u_{m-1}^0 \right] - (\alpha(u_m^0 - kf_2(x)) + 2)(u_m^0 - k\psi(x))$$

**สูตรที่ 2** 
$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2-\alpha u_m^{n-1})} \left[ (2mp+p)u_{m+1}^n + (4-4mp)u_m^n + (2mp-p)u_{m-1}^n - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1} \right]$$

เมื่อ  $m=1, \dots, M-1$

**สูตรที่ 3** 
$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} \left[ 4Mp u_{M-1}^0 + (4-4Mp)u_M^0 \right] - (\alpha(u_M^0 - kf_2(x)) + 2)(u_M^0 - k\psi(x))$$

**สูตรที่ 4** 
$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha u_M^{n-1})} (u_M^{n+1})^2 + u_M^{n+1} = \frac{1}{(2-\alpha u_M^{n-1})} \left[ 4Mp u_{M-1}^n + (4-4Mp)u_M^n - (\alpha u_M^{n-1} + 2)u_M^{n-1} \right]$$

โดยที่  $p = \frac{k^2}{h}$

จากสูตรที่ 1-4 กำหนดให้  $u_M^0$  เป็นรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด ส่วน  $\psi(x)$  เป็นความเร็วต้นของเส้นลวด หลังจากแทนค่าพจน์ที่ทราบค่าลงไปในสูตรทางด้านขวามือแล้ว จะติดเทอมที่ไม่ทราบค่าคือ  $(u_m^{n+1})^2$  และ  $u_m^{n+1}$  ซึ่งจะอยู่ในรูปของสมการกำลังสอง กล่าวคือ  $a(u_m^{n+1})^2 + bu_m^{n+1} + c = 0$  ดังนั้น เราจะสามารถหาผลเฉลยได้จาก  $u_m^{n+1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  เมื่อ  $x = u_m^{n+1}$  เป็นผลเฉลยของสมการ และจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ผลเฉลยเป็นจำนวนจริงเท่านั้น กรณีที่ผลเฉลยเป็นจำนวนเชิงซ้อนเราจะไม่ใช้

### 3.2.3 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม ( $c = 3$ )

เมื่อแทน  $c = 3$  ลงในสมการ (3.5) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} |u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^3 = 0 \quad (3.30)$$

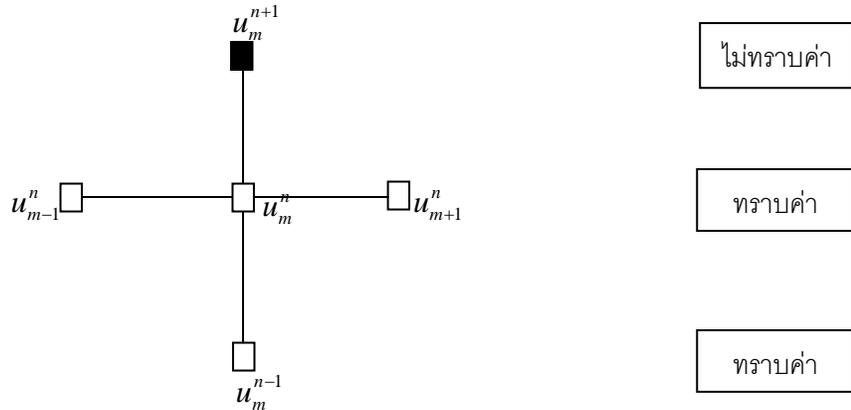
แทน  $|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^3 = (u_m^{n+1})^3 - 3(u_m^{n+1})^2 u_m^{n-1} + 3u_m^{n+1} (u_m^{n-1})^2 - (u_m^{n-1})^3$  ลงในสมการ (3.18) จะได้

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} \left[ (u_m^{n+1})^3 - 3(u_m^{n+1})^2 u_m^{n-1} + 3u_m^{n+1} (u_m^{n-1})^2 - (u_m^{n-1})^3 \right] = 0$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปชัดแจ้ง (Explicit Form) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
& (u_m^{n+1})^3 - 3u_m^{n-1}(u_m^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{n-1})^2\right)u_m^{n+1} \\
&= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^n + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^n + \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_m^{n-1}
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

โดย  $p = \frac{k^2}{h}$



**รูปที่ 3.2.3.1** การระบุตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในสมการ (3.31)

จากสมการ (3.31) เราจะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับสี่ทั้งหมด 4 สูตรจาก 4 กรณี เช่นเดียวกับหัวข้อ 3.2.1 และ 3.2.2 ดังนี้

**กรณีที่ 1** แทน  $n = 0$  ในสมการที่ (3.31) เมื่อ  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& (u_m^1)^3 - 3u_m^{-1}(u_m^1)^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{-1})^2\right)u_m^1 \\
&= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^0 + \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^0 + \left((u_m^{-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_m^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.32}$$

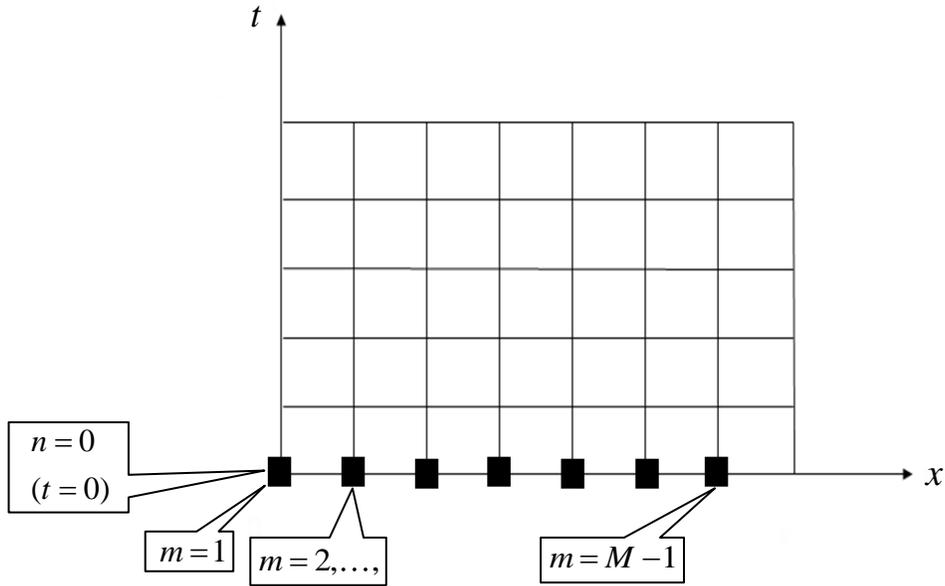
เนื่องจาก  $u_m^{-1}$  ในสมการ (3.20) อยู่นอกโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$  ดังนั้น  $u_m^{-1}$  จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} \approx \psi(x) \quad \text{หรือ} \quad u_m^{-1} \approx u_m^0 - k\psi(x)
\tag{3.33}$$

แทนสมการที่ (3.33) ในสมการที่ (3.32) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& (u_m^1)^3 - 3[u_m^0 - kf_2(x)](u_m^1)^2 + \left( \frac{4}{\alpha} - 3 \left[ (u_m^0)^2 - 2u_m^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2 \right] \right) u_m^1 \\
&= \frac{2}{\alpha} (2mp + p) u_{m+1}^0 + \frac{2}{\alpha} (4 - 4mp) u_m^0 + \frac{2}{\alpha} (2mp - p) u_{m-1}^0 \\
&+ \left[ (u_m^0)^2 - 2u_m^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha} \right] (u_m^0 - kf_2(x))
\end{aligned} \tag{3.34}$$

โดยที่  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$

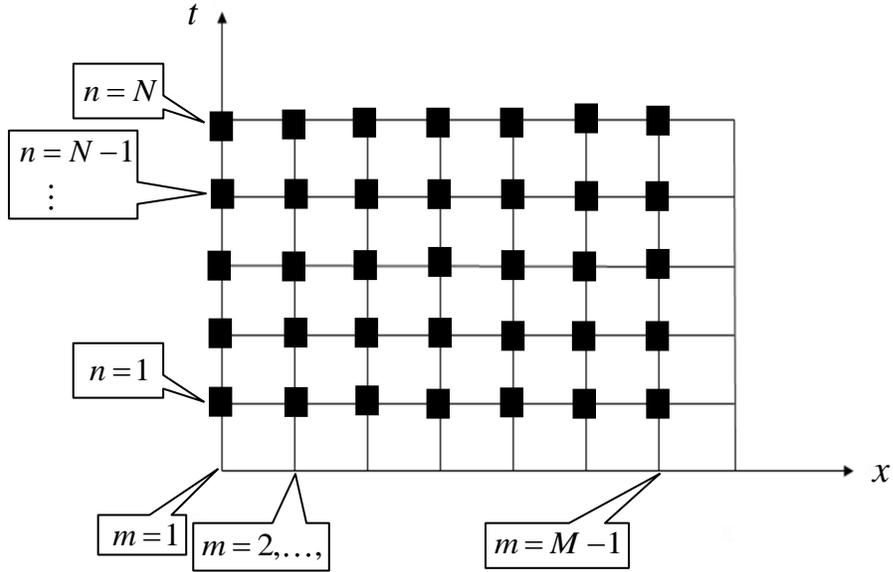


**รูปที่ 3.2.3.2** ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.34)

กรณีที่ 2 แทน  $n > 0$  ในสมการที่ (3.31) เมื่อ  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& (u_m^{n+1})^3 - 3u_m^{n-1} (u_m^{n+1})^2 + \left( \frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{n-1})^2 \right) u_m^{n+1} \\
&= \frac{2}{\alpha} (2mp + p) u_{m+1}^n + \frac{2}{\alpha} (4 - 4mp) u_m^n + \frac{2}{\alpha} (2mp - p) u_{m-1}^n + \left( (u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha} \right) u_m^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

โดยที่  $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$



**รูปที่ 3.2.3.3** ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.35)

กรณีที่ 3 แทน  $n = 0$  และ  $m = M$  ในสมการที่ (3.34) จะได้ว่า

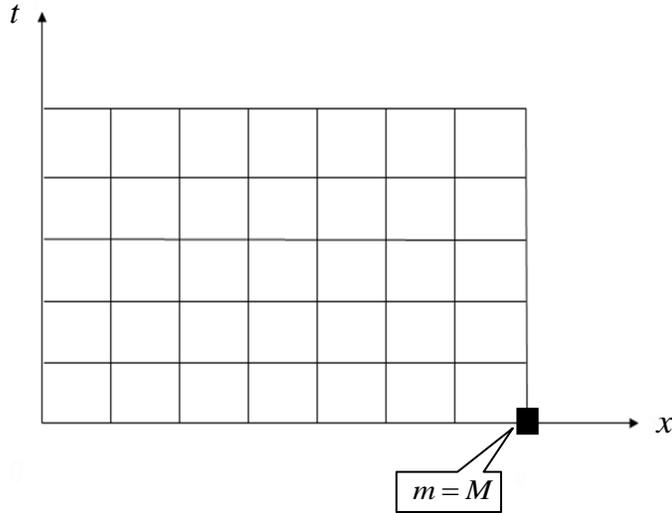
$$\begin{aligned} & (u_M^1)^3 - 3[u_M^0 - kf_2(x)](u_M^1)^2 + \left( \frac{4}{\alpha} - 3[(u_M^0)^2 - 2u_M^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2] \right) u_M^1 \\ &= \frac{2}{\alpha}(2Mp + p)u_{M+1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4Mp)u_M^0 + \frac{2}{\alpha}(2Mp - p)u_{M-1}^0 + \left[ (u_M^0)^2 - 2u_M^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha} \right] (u_M^0 - kf_2(x)) \end{aligned} \quad (3.36)$$

เนื่องจาก  $u_{M+1}^0$  ในสมการ (3.24)อยู่นอกโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$  ดังนั้น  $u_m^{-1}$  จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_{M-1}^0}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^0 \approx u_{M-1}^0 \quad (3.37)$$

แทนสมการที่ (3.37) ในสมการที่ (3.36) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (u_M^1)^3 - 3[u_M^0 - kf_2(x)](u_M^1)^2 + \left( \frac{4}{\alpha} - 3[(u_M^0)^2 - 2u_M^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2] \right) u_M^1 \\ &= \frac{2}{\alpha}(4Mp)u_{M-1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4Mp)u_M^0 + \left[ (u_M^0)^2 - 2u_M^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha} \right] (u_M^0 - kf_2(x)) \end{aligned} \quad (3.38)$$



**รูปที่ 3.2.3.4** ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.38)

กรณีที่ 4 แทน  $n > 0$  และ  $m = M$  ในสมการที่ (3.35) จะได้ว่า

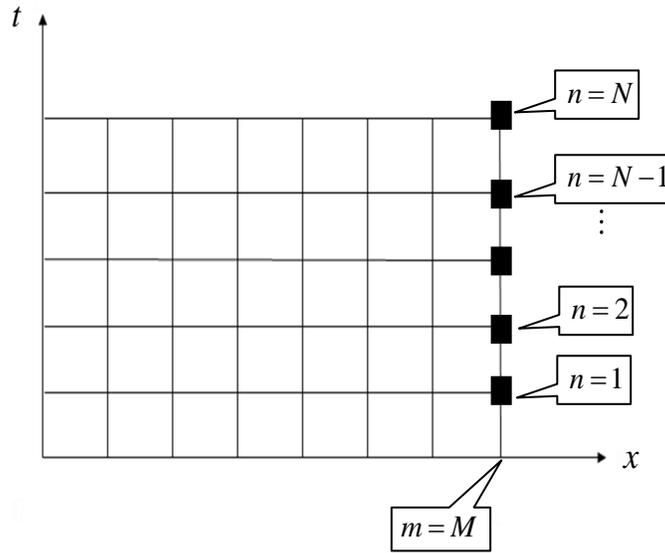
$$\begin{aligned} & (u_M^{n+1})^3 - 3u_M^{n-1} (u_M^{n+1})^2 + \left( \frac{4}{\alpha} - 3(u_M^{n-1})^2 \right) u_M^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha} (2Mp + p) u_{M+1}^n + \frac{2}{\alpha} (4 - 4Mp) u_M^n + \frac{2}{\alpha} (2Mp - p) u_{M-1}^n + \left( (u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha} \right) u_M^{n-1} \end{aligned} \quad (3.39)$$

เนื่องจาก  $u_{M+1}^n$  ในสมการ (3.27) อยู่นอกโดเมน  $[0, a] \times [0, T]$  ดังนั้น  $u_{M+1}^n$  จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^n \approx u_{M-1}^n \quad (3.40)$$

แทนสมการที่ (3.40) ในสมการที่ (3.39) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (u_M^{n+1})^3 - 3u_M^{n-1} (u_M^{n+1})^2 + \left( \frac{4}{\alpha} - 3(u_M^{n-1})^2 \right) u_M^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha} (4Mp) u_{M-1}^n + \frac{2}{\alpha} (4 - 4Mp) u_M^n + \left( (u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha} \right) u_M^{n-1} \end{aligned} \quad (3.41)$$



รูปที่ 3.2.3.5 ตำแหน่งของผลเฉลย  $u$  ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.41)

จากสมการ (3.34) (3.35) (3.38) และ (3.41) จะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับสาม สำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม ดังนี้

สูตรที่ 1

$$\begin{aligned} & (u_m^1)^3 - 3[u_m^0 - kf_2(x)](u_m^1)^2 + \left( \frac{4}{\alpha} - 3[(u_m^0)^2 - 2u_m^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2] \right) u_m^1 \\ &= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^0 + \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^0 + \left[ (u_m^0)^2 - 2u_m^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha} \right] (u_m^0 - kf_2(x)) \end{aligned}$$

สูตรที่ 2

$$\begin{aligned} & (u_m^{n+1})^3 - 3u_m^{n-1}(u_m^{n+1})^2 + \left( \frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{n-1})^2 \right) u_m^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^n + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^n + \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^n + \left( (u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha} \right) u_m^{n-1} \end{aligned}$$

เมื่อ  $m = 1, \dots, M - 1$

สูตรที่ 3

$$\begin{aligned} & (u_M^1)^3 - 3[u_M^0 - kf_2(x)](u_M^1)^2 + \left( \frac{4}{\alpha} - 3[(u_M^0)^2 - 2u_M^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2] \right) u_M^1 \\ &= \frac{2}{\alpha}(4Mp)u_{M-1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4Mp)u_M^0 + \left[ (u_M^0)^2 - 2u_M^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha} \right] (u_M^0 - kf_2(x)) \end{aligned}$$

#### สูตรที่ 4

$$\begin{aligned} & (u_M^{n+1})^3 - 3u_M^{n-1}(u_M^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_M^{n-1})^2\right)u_M^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha}(4Mp)u_M^{n-1} + \frac{2}{\alpha}(4-4Mp)u_M^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_M^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } p = \frac{k^2}{h}$$

นอกจากนี้ ในสูตรที่ 1-4 เราจะแทน  $u_M^0$  ด้วยรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด ส่วน  $\psi(x)$  เป็นความเร็วต้นของเส้นลวด หลังจากแทนค่าพจน์ที่ทราบค่าลงไป สูตรทางด้านขวามือแล้ว จะติดเทอมที่ไม่ทราบค่าคือ  $(u_m^{n+1})^3$ ,  $(u_m^{n+1})^2$  และ  $u_m^{n+1}$  ซึ่ง จะ อยู่ ใน รูป ของ สมการ กำลัง สาม ก่ ว คือ  $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$

กำหนดให้

$$q = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3ac - b^2}{9a^2}\right) + q^2}$$

$$s = \sqrt[3]{q+r}$$

$$t = \sqrt[3]{q-r}$$

ดังนั้น เราจะสามารถหาผลเฉลยได้จาก

$$x_1 = s + t - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = \frac{-1}{2}(s+t) - \frac{b}{3a} + \frac{\sqrt{3}}{2}(s-t)i$$

$$x_3 = \frac{-1}{2}(s+t) - \frac{b}{3a} - \frac{\sqrt{3}}{2}(s-t)i$$

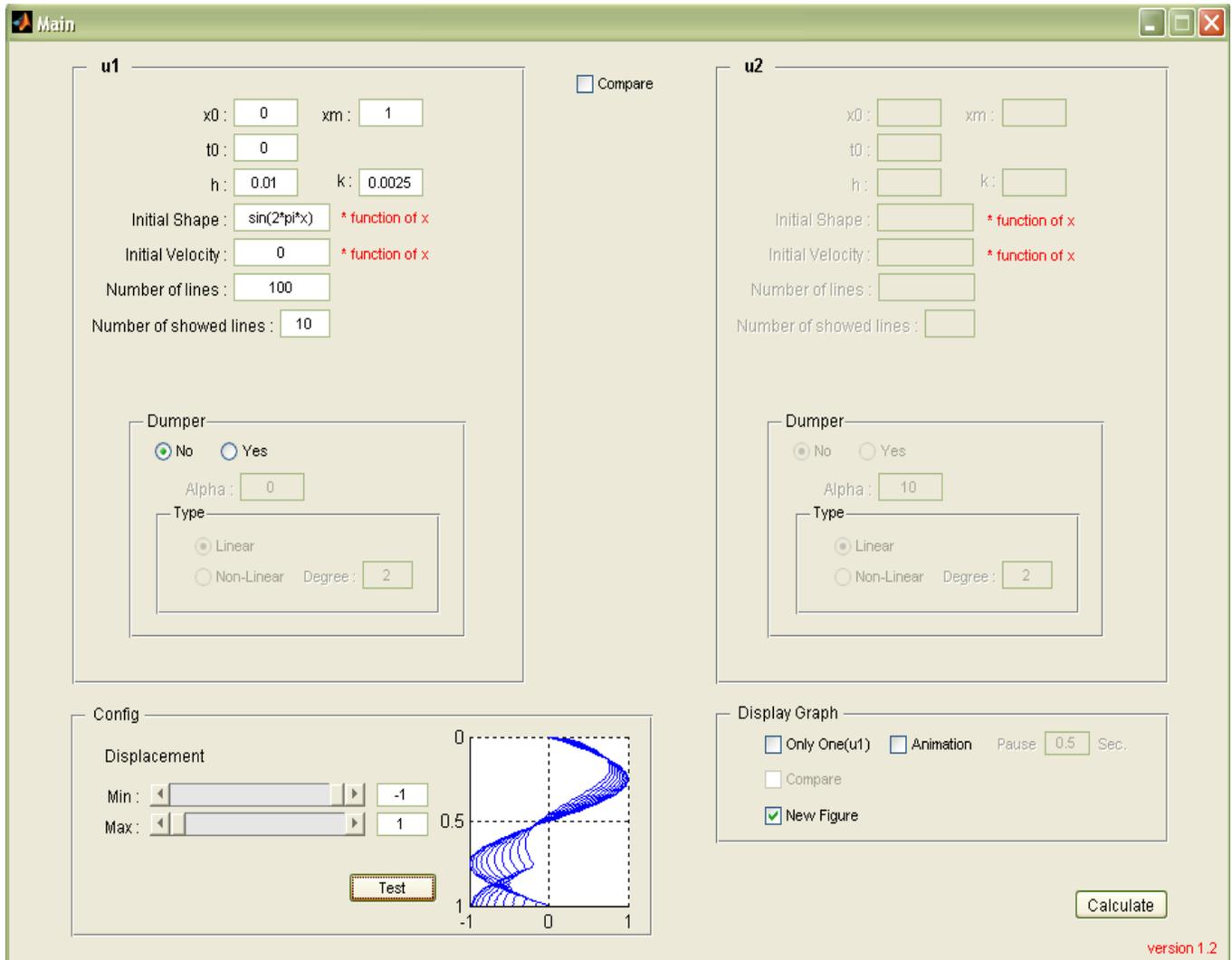
เมื่อ  $x = u_m^{n+1}$  เป็นผลเฉลยของสมการ และเมื่อใช้  $x_1$  จะได้กราฟแบบที่ 1

เมื่อใช้  $x_2$  จะได้กราฟแบบที่ 2

เมื่อใช้  $x_3$  จะได้กราฟแบบที่ 3

### 3.3 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อแสดงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลข

สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับจากหัวข้อ 3.2.1, 3.2.2 และ 3.2.3 จะถูกนำมาพัฒนาโดยโปรแกรม MATLAB เพื่อสร้างหน้าต่างแบบกราฟิกส์ (Graphic User Interface: GUI) สำหรับการรับข้อมูลและแสดงผลในรูปของตารางและกราฟของผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.3.1 หน้าต่าง GUI แบบไม่มีการเปรียบเทียบ

จากรูป 3.3.1 จะเห็นว่าหน้าต่างถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน คือส่วน u1 และ u2 โดยส่วน u1 จะใช้รับค่าข้อมูลเมื่อต้องการแสดงผลกราฟการสั่นแบบไม่มีการเปรียบเทียบ และส่วน u2 จะใช้รับค่าข้อมูลเมื่อต้องการแสดงผลกราฟการสั่นแบบมีการเปรียบเทียบ

### 3.3.1 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบไม่มีการเปรียบเทียบ

**ขั้นที่ 1** ในส่วน u1 รับค่าข้อมูลเริ่มต้นทั้งหมด เพื่อใช้สำหรับการคำนวณ ดังนี้

- คีย์ข้อมูลความยาวของเส้นลวด ซึ่งโดยทั่วไปในการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะกำหนดให้เส้นลวดยาว 1 หน่วย
- คีย์ข้อมูลเวลาเริ่มต้น โดยปกติจะกำหนดให้เวลาเริ่มต้นเป็นศูนย์
- คีย์ข้อมูลขนาดของช่วงย่อยๆ ของตำแหน่ง ( $h$ ) และเวลา ( $k$ ) ตามลำดับ โดยในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้  $h = 0.01$  และ  $k = 0.0025$
- คีย์ข้อมูลรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชัน  $\phi(x) = \sin 2\pi x$  แทนรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด เนื่องจากเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา
- คีย์ข้อมูลความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชันค่าคงที่, ฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตามลำดับ ดังนี้  $\psi(x) = 0$ ,  $\psi(x) = 1$ ,  $\psi(x) = x$ ,  $\psi(x) = \sin x$  และ  $\psi(x) = \cos x$  แทนความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด
- คีย์ข้อมูลจำนวนของเส้นที่ต้องการคำนวณ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้จำนวนของเส้นที่ต้องการให้โปรแกรมคำนวณเป็น 100 และกำหนดให้  $k = 0.0025$  แล้ว โปรแกรมจะคำนวณเส้นกราฟทั้งหมด 100 เส้น แต่ละเส้นมีเวลาห่างกัน 0.0025
- คีย์ข้อมูลจำนวนของเส้นที่ต้องการแสดง ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้จำนวนของเส้นที่ต้องการให้โปรแกรมแสดงเป็น 10 และกำหนดให้จำนวนเส้นที่ต้องการคำนวณเป็น 100 โปรแกรมจะแสดงเส้นกราฟเพียง 10 เส้น จากเส้นกราฟที่คำนวณได้ทั้งหมด 100 เส้น คือเลือกแสดงผลทุกๆ 10 เส้น

**ขั้นที่ 2** ในส่วนของ Dumper ให้เลือกข้อมูลของความหน่วง ดังนี้

- เลือก No เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบไม่มีความหน่วง  
หรือเลือก Yes เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบมีความหน่วง โดยแบ่งเป็น
  - เลือก Linear สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น หรือ
  - เลือก Non-Linear และคีย์เลข 2 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง หรือ
  - เลือก Non-Linear และคีย์เลข 3 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสาม
- คีย์ข้อมูลค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง Alpha  
ในงานวิจัยนี้ค่า Alpha จะถูกพิจารณาเป็น 3 กรณี คือ
  - กรณีของความหน่วงแบบเชิงเส้น จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง 0.1 ถึง 10,000

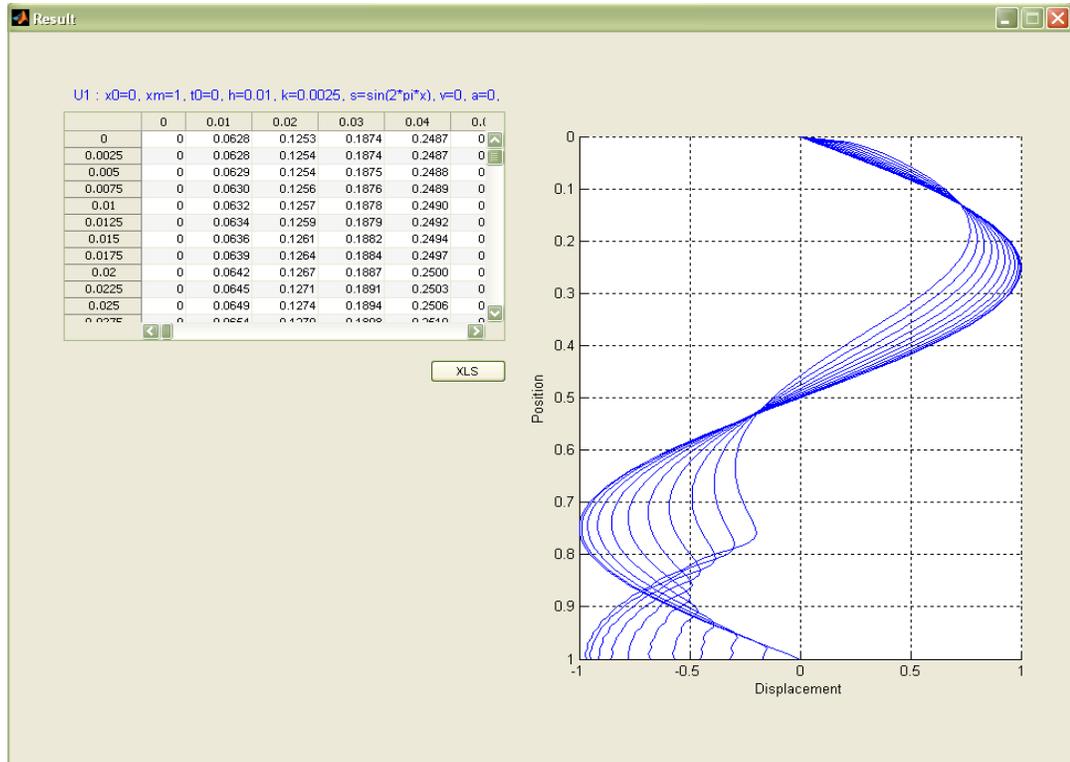
- กรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง ถึง
- กรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสาม จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง ถึง

**ขั้นที่ 3** ในส่วนของ Config จะทดสอบผลกราฟที่ได้จากการคำนวณ

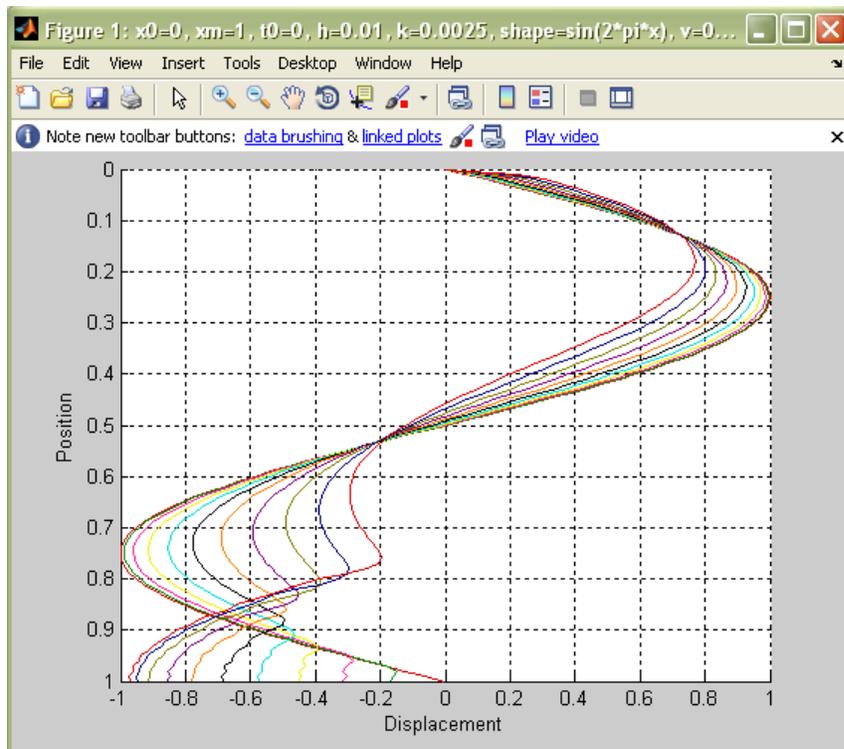
- คีย์ข้อมูลค่า Min และค่า Max เพื่อกำหนดสเกลของแกน  $x$  โดยโปรแกรมจะเซทค่าไว้ที่ -1 และ 1 ตามลำดับ
- กดปุ่ม Test เพื่อทดสอบว่าได้ผลกราฟที่ต้องการแล้วหรือไม่ ถ้าผลยังไม่เป็นที่พอใจ สามารถแก้ไขโดยคีย์ข้อมูลในขั้นที่ 1 ใหม่อีกครั้ง

**ขั้นที่ 4** ในส่วนของ Display Graph จะแสดงผลกราฟโดยขึ้นหน้าต่างใหม่

- คลิกที่ช่อง Animation และคีย์ข้อมูลเวลาที่ต้องการคีย์ในช่อง Pause (โปรแกรมจะเซทค่าไว้ที่ 0.5 Sec.) เมื่อต้องการให้แสดงผลกราฟแบบ animation โดยจะมีหน้าต่างใหม่แสดงผลกราฟแบบ animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อกดปุ่ม XLS ในหน้าต่างใหม่นี้ และ save ไฟล์เป็น .xls จะได้ไฟล์ excel เก็บข้อมูลตารางของผลเฉลยเชิงตัวเลข หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดของกราฟได้ ให้คลิกช่อง New Figure หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟทั้งสองหน้าต่าง คลิกที่ช่อง Animation และช่อง New Figure พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมา 2 หน้าต่าง โดยหน้าต่างแรกแสดงผลกราฟแบบ animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข ส่วนหน้าต่างที่สองแสดงผลกราฟเป็นภาพสี่



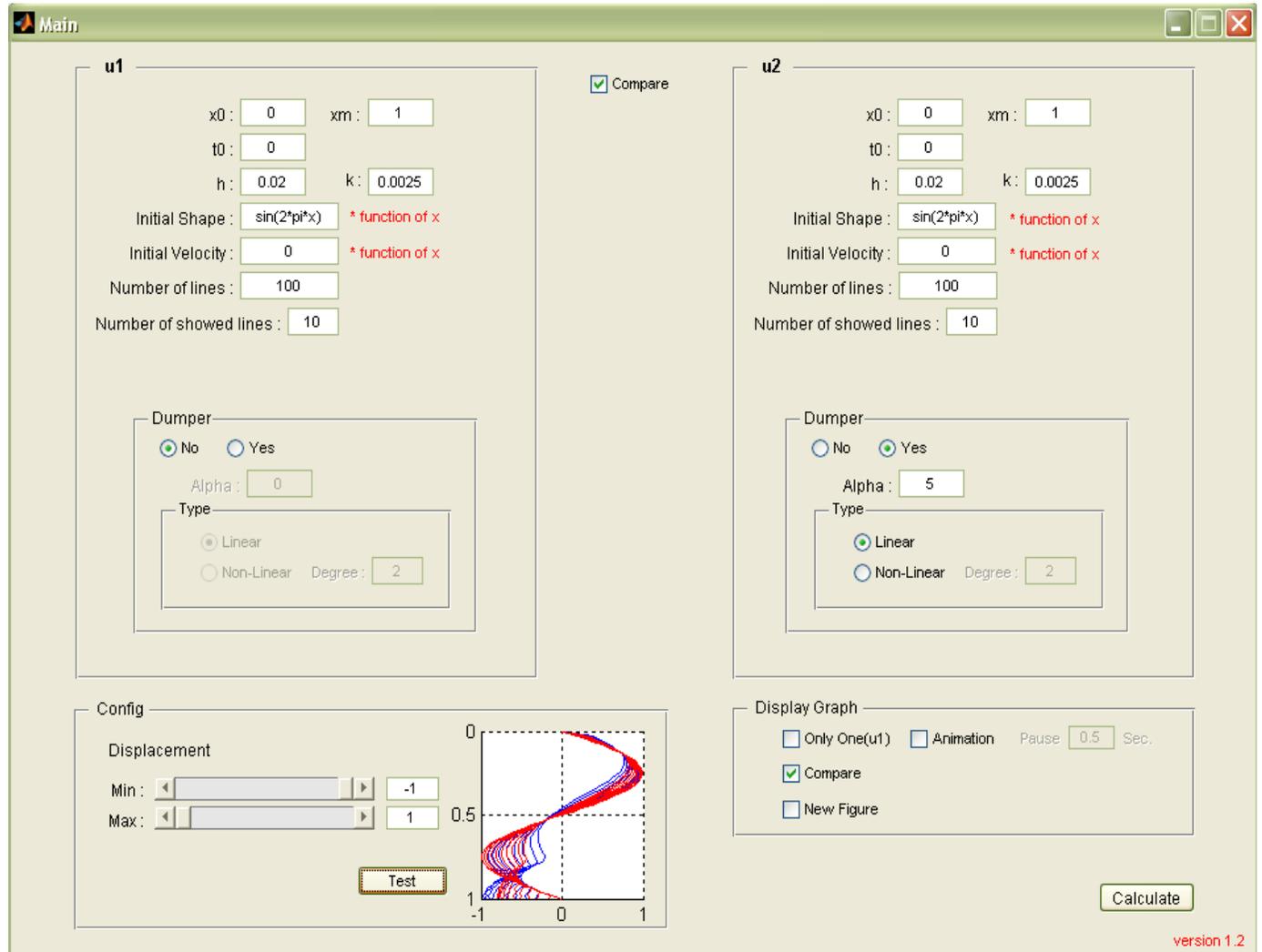
รูปที่ 3.3.1.1 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีการเปรียบเทียบ



รูปที่ 3.3.1.2 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีการเปรียบเทียบ

### 3.3.2 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบมีการเปรียบเทียบ

ขั้นที่ 1 - คลิกที่ช่อง Compare จะเห็นว่าค่าข้อมูลเริ่มต้นในส่วนของ u2 จะถูกเซทให้เหมือนกับ u1 โดยสามารถแก้ไขข้อมูลได้ตามต้องการ แต่ในงานวิจัย เราจะใช้ข้อมูลเริ่มต้นในส่วน u2 และ u1 เหมือนกัน เพื่อทำการเปรียบเทียบความแตกต่างในส่วนของความหน่วง ดังรูป



#### รูปที่ 3.3.2.1 หน้าต่าง GUI แบบมีการเปรียบเทียบ

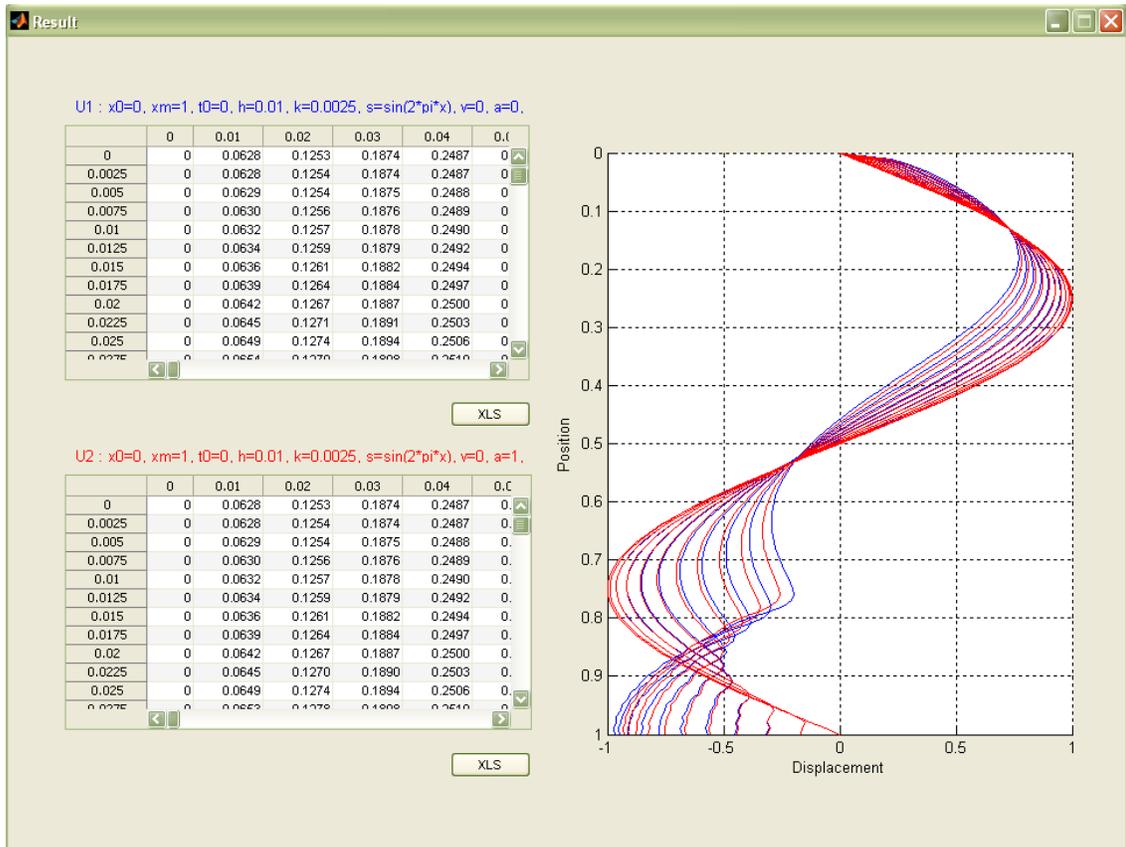
ขั้นที่ 2 ในส่วนของ Dumper ให้เลือกข้อมูลของความหน่วง ดังนี้

- เลือก No เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบไม่มีความหน่วง
- หรือเลือก Yes เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบมีความหน่วง โดยแบ่งเป็น
  - เลือก Linear สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น หรือ
  - เลือก Non-Linear และคีย์เลข 2 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง หรือ

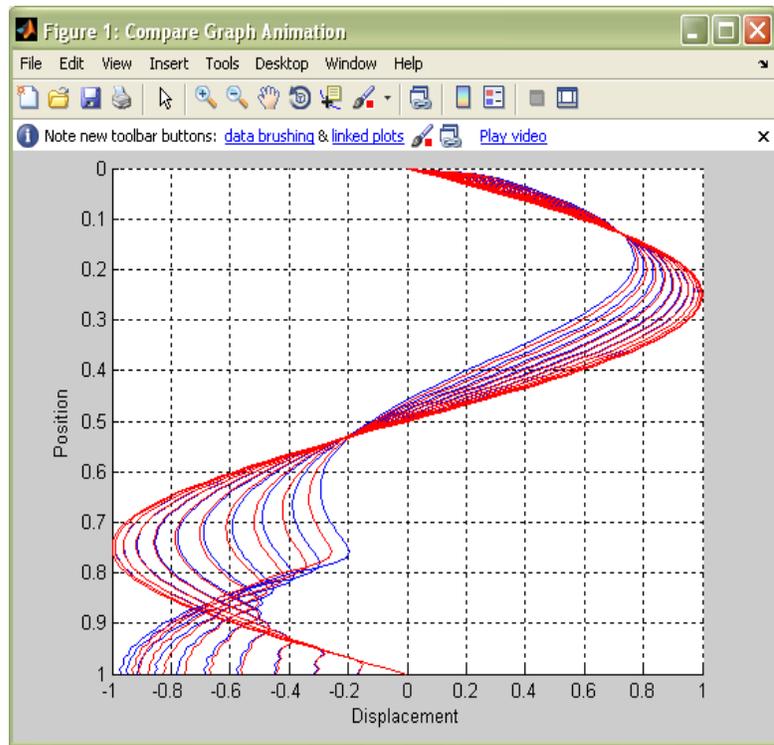
- เลือก Non-Linear และคีย์เลข 3 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสาม
- คีย์ข้อมูลค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง Alpha  
ในงานวิจัยนี้ค่า Alpha จะถูกพิจารณาเป็น 3 กรณี คือ
  - กรณีของความหน่วงแบบเชิงเส้น จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง 0.1 ถึง 10,000
  - กรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง ถึง
  - กรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสาม จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง ถึง

**ขั้นที่ 3** ในส่วนของ Display Graph จะแสดงผลกราฟโดยขึ้นหน้าต่างใหม่

- คลิกที่ช่อง Compare เมื่อต้องการให้แสดงผลกราฟแบบเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยในส่วนของ  $u_1$  (กราฟสีน้ำเงิน) และ  $u_2$  (กราฟสีแดง) โดยในงานวิจัยจะกำหนดให้ผลเฉลยในส่วนของ  $u_1$  เป็นการสั่นแบบไม่มีความหน่วงแล้วนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยในส่วนของ  $u_2$  ซึ่งถูกกำหนดให้เป็นการสั่นแบบมีความหน่วง หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟเปรียบเทียบแบบ animation คลิกที่ช่อง Animation และช่อง Compare พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่แสดงผลกราฟเปรียบเทียบแบบ animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขทั้งสองแบบ หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดของกราฟได้ ให้คลิกช่อง New Figure และช่อง Compare พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมา 2 หน้าต่าง โดยหน้าต่างแรกแสดงผลกราฟแบบเปรียบเทียบพร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข ส่วนหน้าต่างที่สองแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดต่างๆ ของกราฟได้ หรือ
- คลิกช่อง New Figure, ช่อง Animation และช่อง Compare พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมา 2 หน้าต่าง โดยหน้าต่างแรกแสดงผลกราฟแบบเปรียบเทียบแบบ Animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข ส่วนหน้าต่างที่สองแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดต่างๆ ของกราฟได้ หรือ
- ถ้าต้องการแสดงผลกราฟจากส่วน  $u_1$  เท่านั้น ให้คลิกที่ช่อง Only One( $u_1$ )

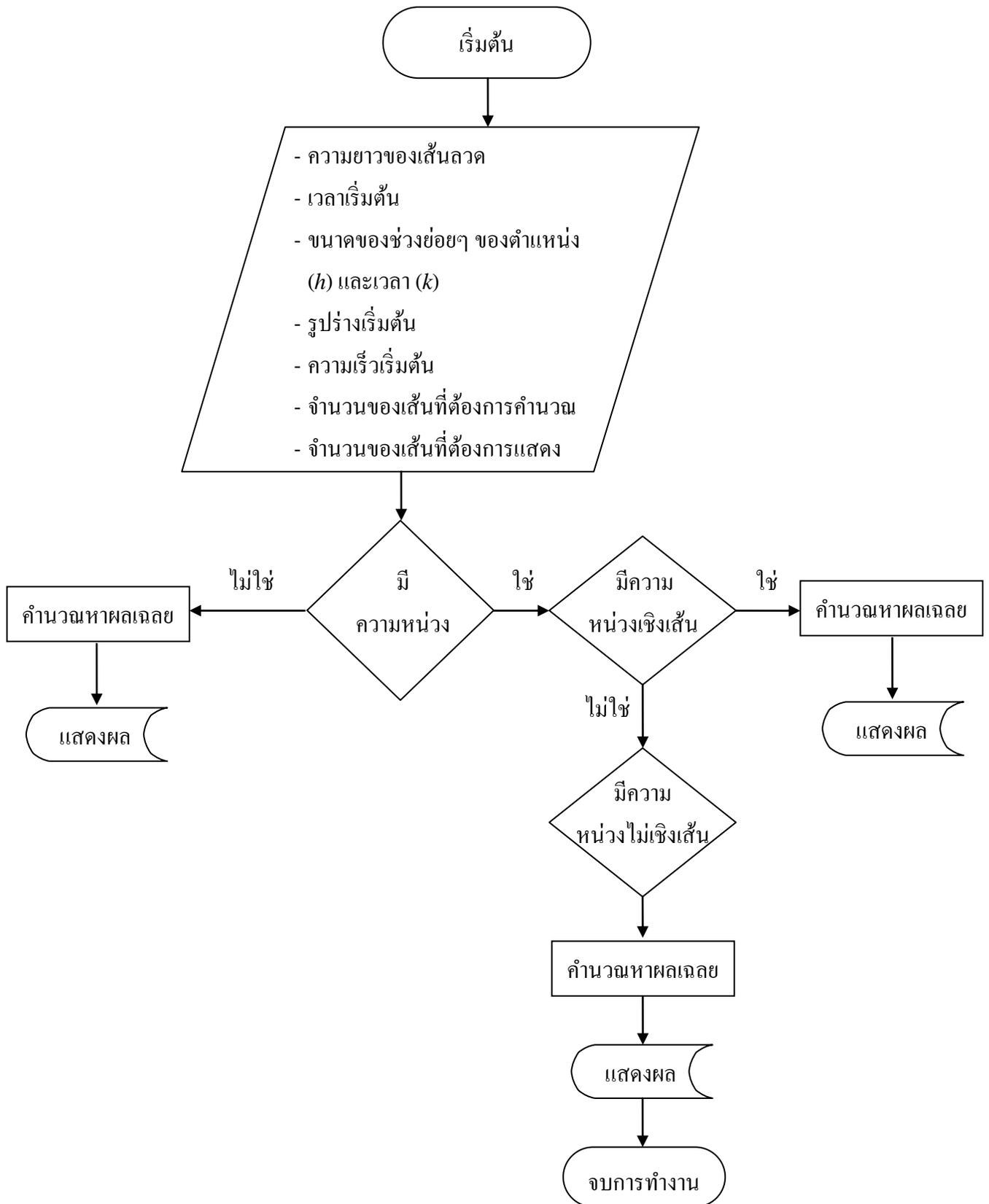


รูปที่ 3.3.2.2 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบ



รูปที่ 3.3.2.3 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบ

# แผนภาพแสดงการทำงานของโปรแกรม MATLAB



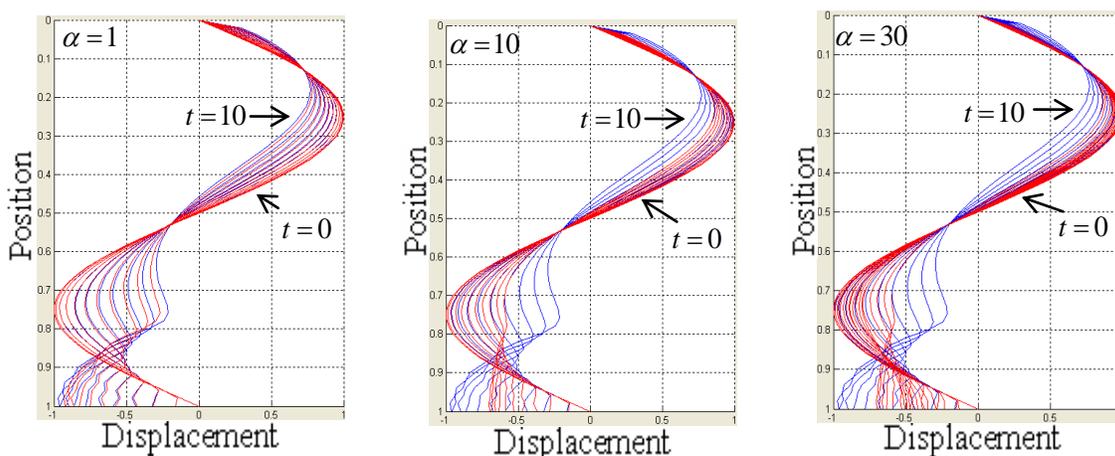
## บทที่ 4

### ผลวิจัยและอภิปรายผล

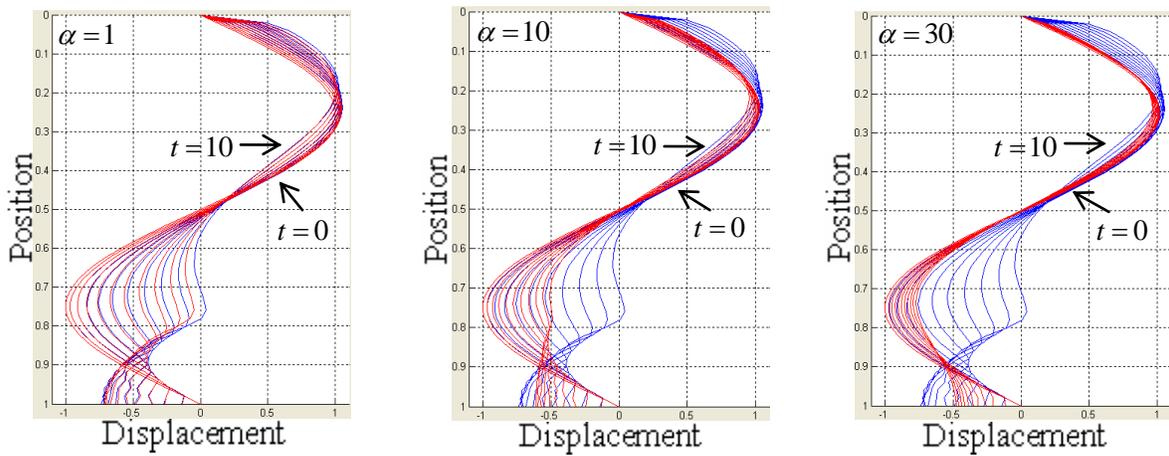
ในบทนี้จะแสดงการจำลองของกราฟเปรียบเทียบระหว่างการสั่นแบบไม่มีความหน่วงและมีความหน่วงเชิงเส้น, ความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง และความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม โดยในการสั่นทั้ง 3 แบบจะกำหนดให้รูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดคือ  $\phi(x) = \sin 2\pi x$  เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองกล่าวคือ  $u(0,t) = 0$  และ  $u_x(a,t) = 0$  และความเร็วเริ่มต้นกำหนดโดยฟังก์ชันพื้นฐานต่างๆ ดังนี้  $\psi(x) = 0, 1, x, \cos x$  และ  $\sin x$  กราฟแสดงการเปรียบเทียบทั้งหมดในบทนี้ได้จากการใช้โปรแกรม MATLAB คำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั่นทั้ง 3 แบบ โดยใช้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ และนำผลเฉลยเชิงตัวเลขแต่ละแบบดังกล่าวมาแสดงในรูปการแบบจำลองของกราฟเปรียบเทียบ พร้อมทั้งวิเคราะห์และอภิปรายผลการเปรียบเทียบที่ได้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

#### 4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงและมีความหน่วงเชิงเส้น

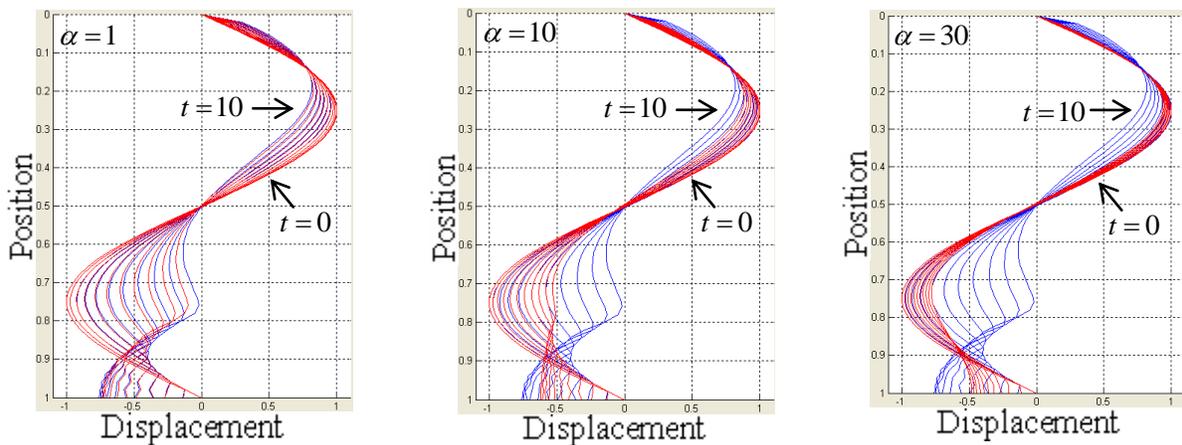
ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเส้นลวดแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแบบมีความหน่วงเชิงเส้น เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีรูปร่างเริ่มต้นเดียวกันคือ  $\phi(x) = \sin 2\pi x$  ภายใต้ความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน โดยกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงคือ  $\alpha = 1, 10, 30$  ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 4.1.1- 4.1.5 และจากผลการเปรียบเทียบ เราจะเห็นว่าเมื่อเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง  $\alpha$  แอมพลิจูดของการสั่นจะลดลง ซึ่งจะได้ผลลักษณะนี้เสมอ ถึงแม้จะมีการเปลี่ยนความเร็วเริ่มต้นเป็นค่าต่างๆ ก็ตาม



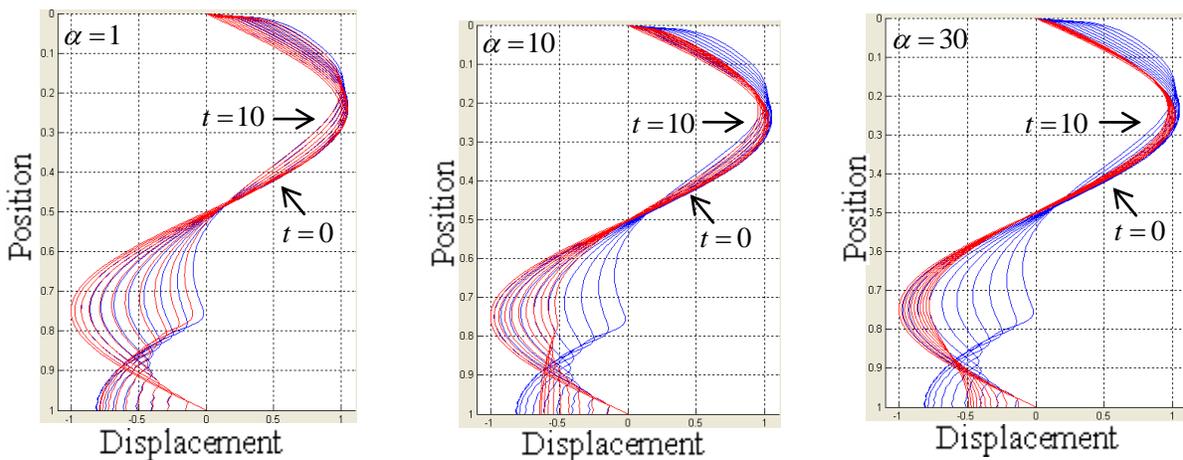
รูปที่ 4.1.1 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ( $\psi(x) = 0$ )



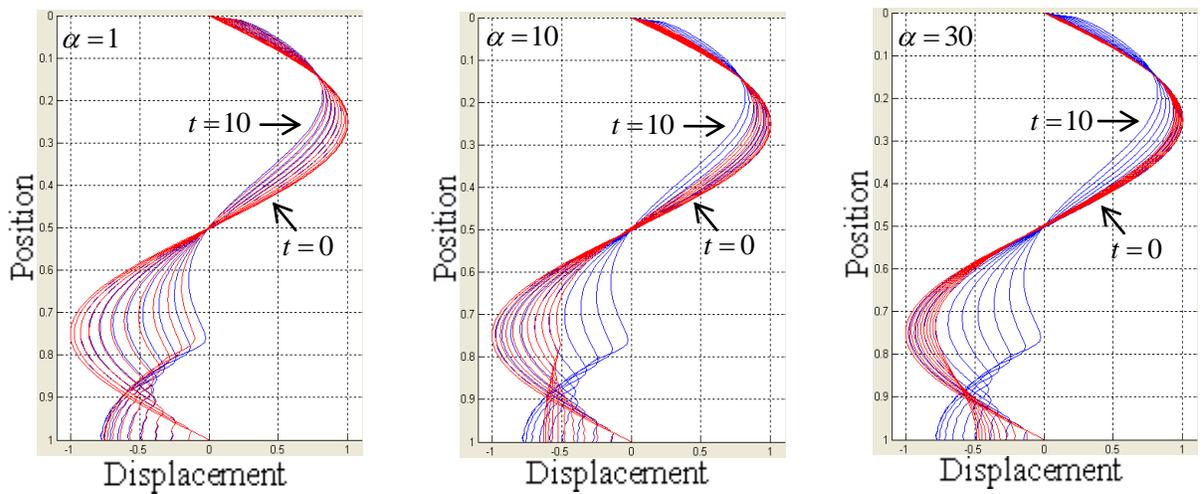
รูปที่ 4.1.2 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x)=1$



รูปที่ 4.1.3 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x)=x$

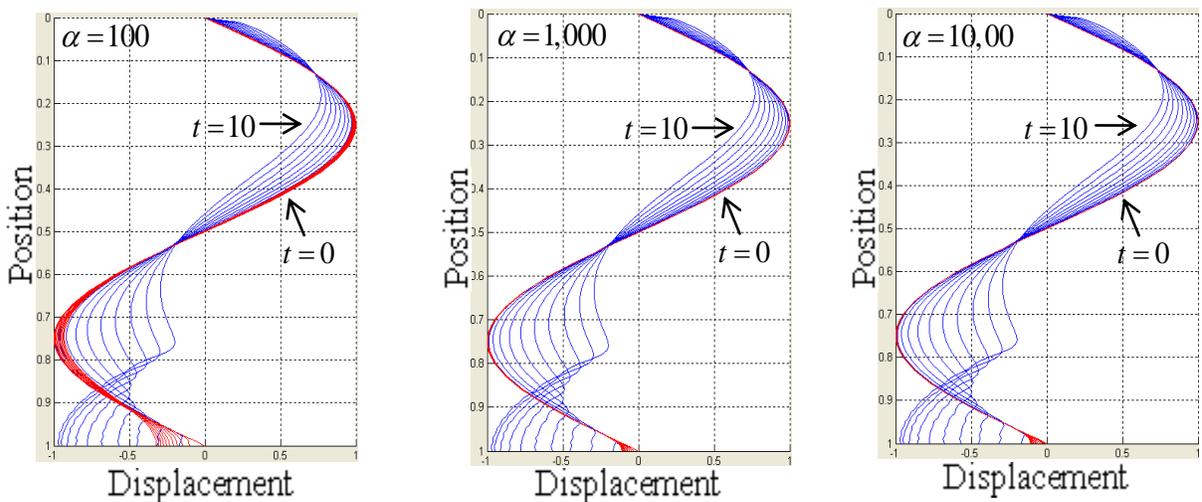


รูปที่ 4.1.4 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x)=\cos x$

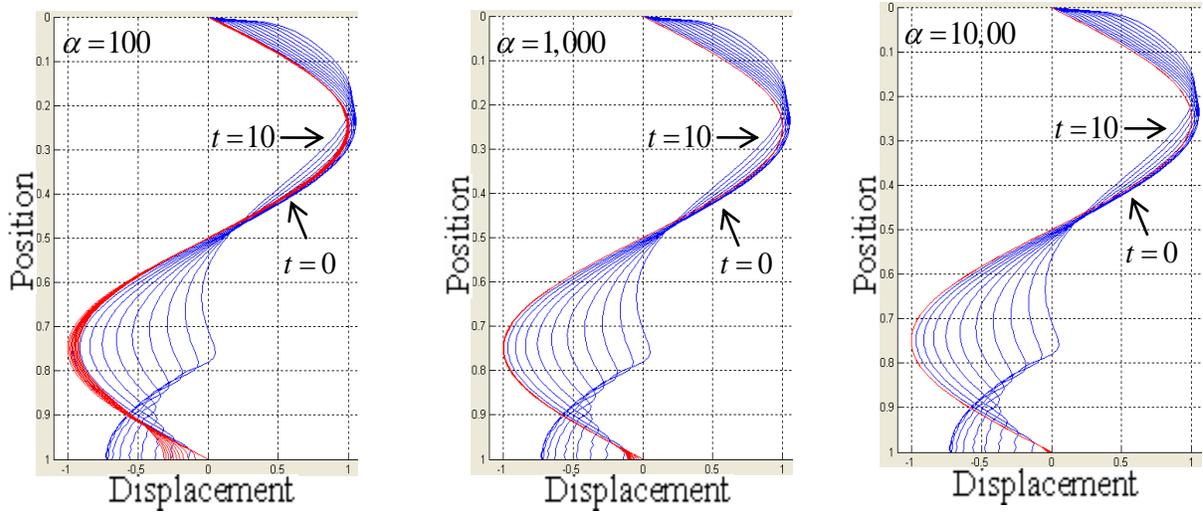


รูปที่ 4.1.5 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = \sin x$

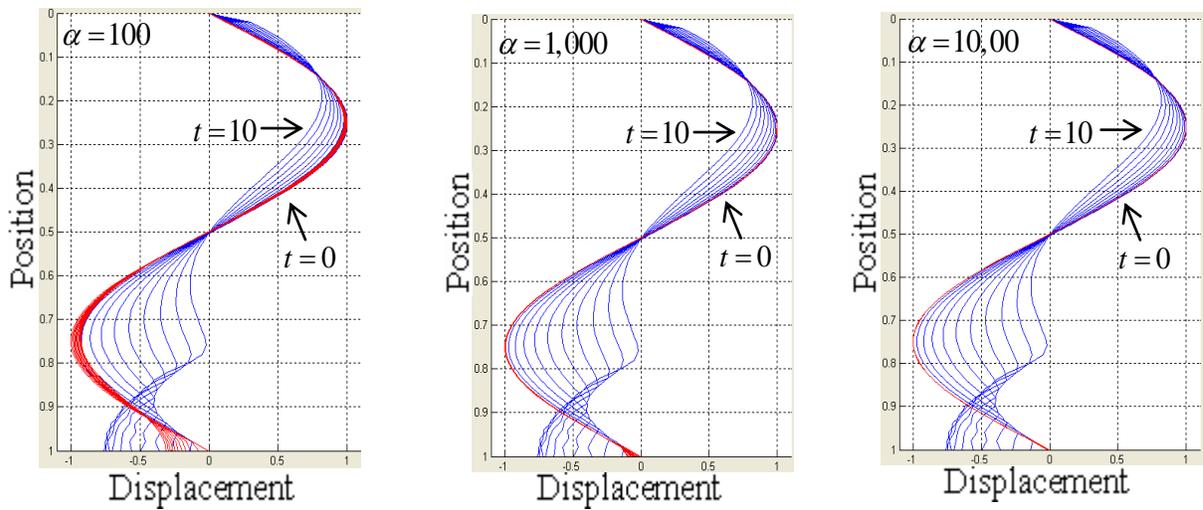
นอกจากนี้ เมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงตั้งแต่ 100 ถึง 10,000 เราจะพบว่าค่าแอมพลิจูดการสั่นจะค่อยๆ ลดลง จนกลายเป็นรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด  $\phi(x) = \sin 2\pi x$  เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน ดังรูปที่ 4.1.6 - 4.1.10



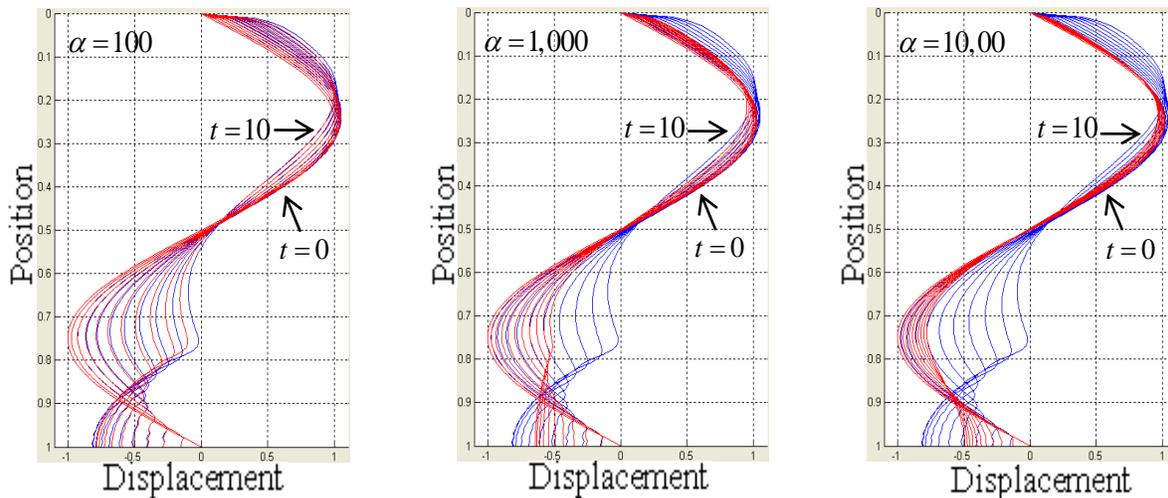
รูปที่ 4.1.6 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = 0$



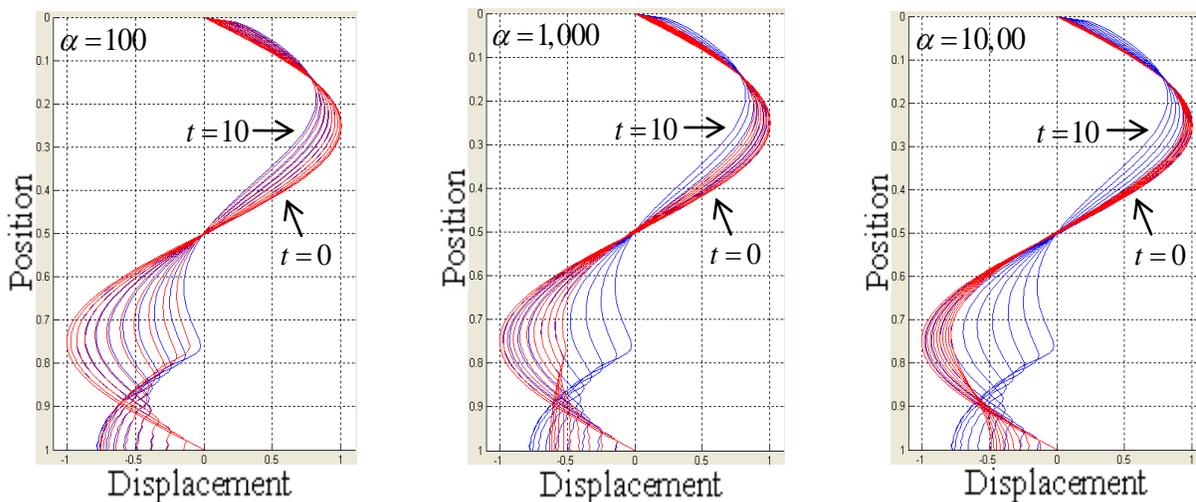
รูปที่ 4.1.7 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = 1$



รูปที่ 4.1.8 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = x$



รูปที่ 4.1.9 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = \cos x$

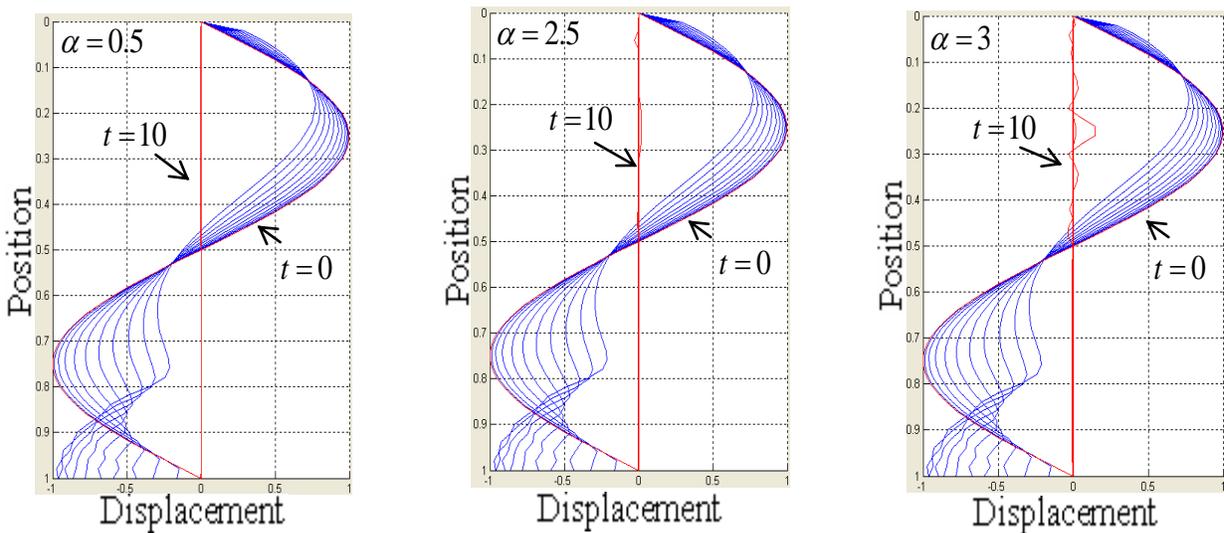


รูปที่ 4.1.10 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = \sin x$

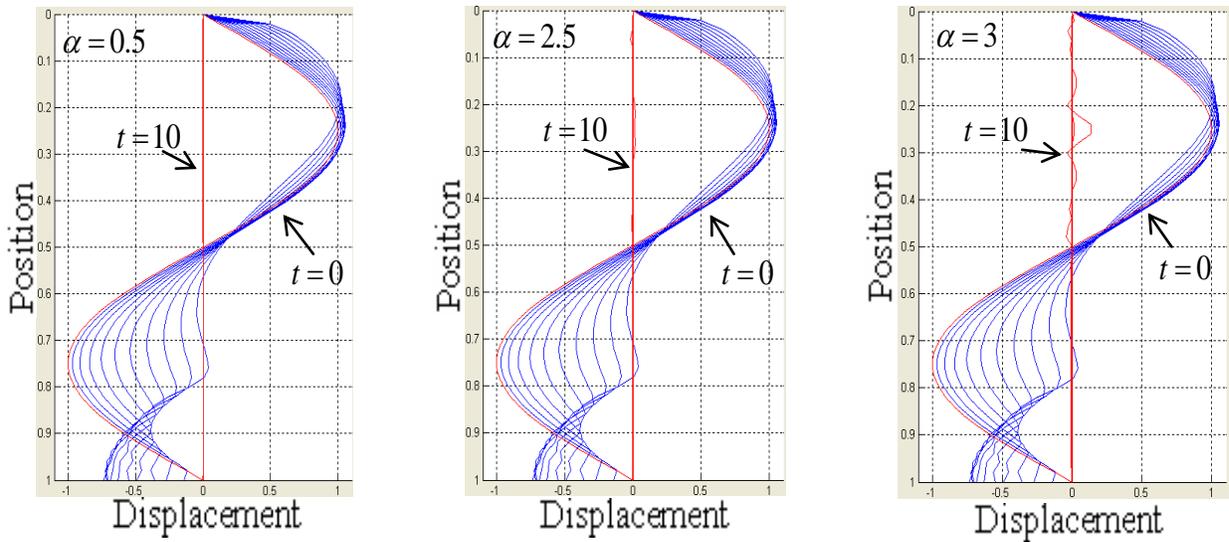
#### 4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเส้นลวดแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีรูปร่างเริ่มต้นเดียวกันคือ  $\phi(x) = \sin 2\pi x$  โดยกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงคือ  $\alpha = 0.5, 2.5, 3$  ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 4.2.1- 4.2.5 และจากผลการเปรียบเทียบ เราจะเห็นว่าเมื่อเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง  $\alpha$  ในช่วง 0.5 ถึง 3 แอมพลิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย แม้จะกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นมีค่าแตกต่างกันก็ตาม

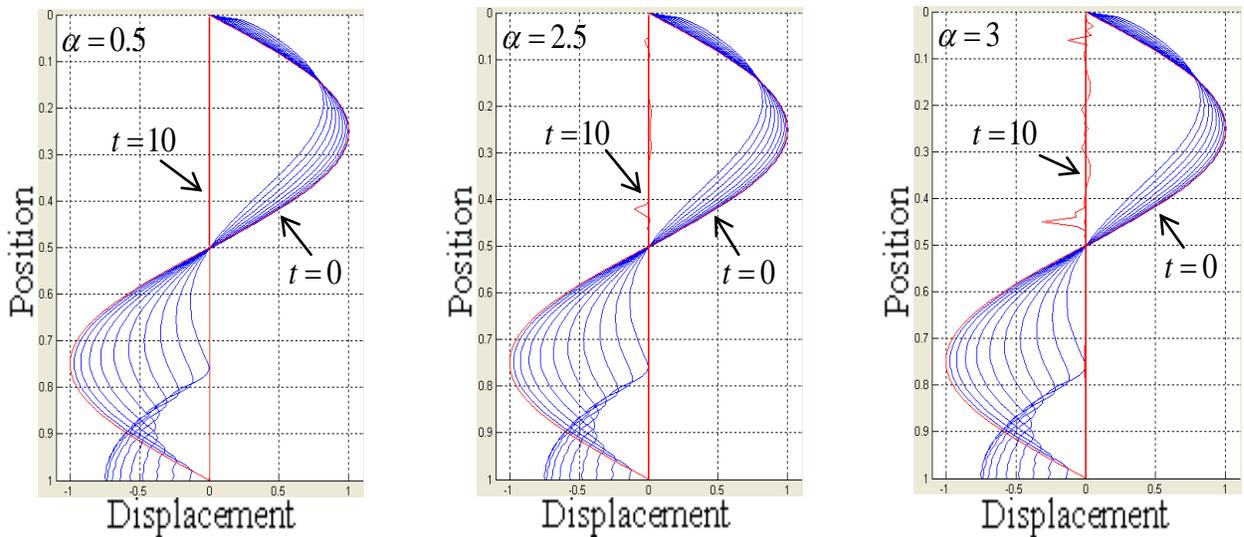
นอกจากนี้ จากรูปที่ 4.2.1- 4.2.5 จะเห็นว่าเมื่อเส้นลวดสั่นมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง เส้นลวดจะสั่นเกือบจะเหมือนกันแม้จะมีความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน ในขณะที่เส้นลวดสั่นที่ไม่มีความหน่วง เส้นลวดจะมีลักษณะการสั่นที่แตกต่างกันเมื่อมีความเร็วเริ่มต้นแตกต่างกัน



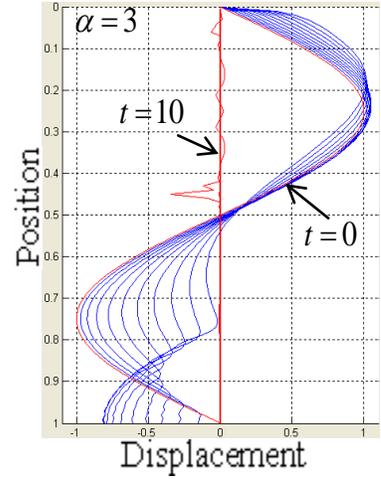
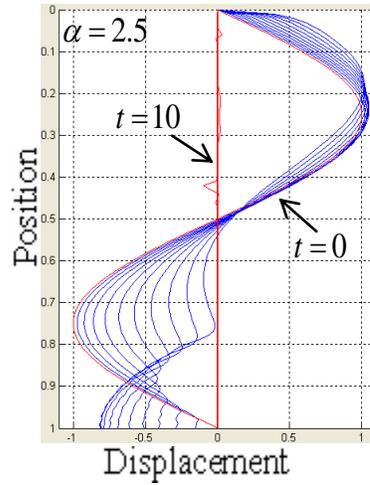
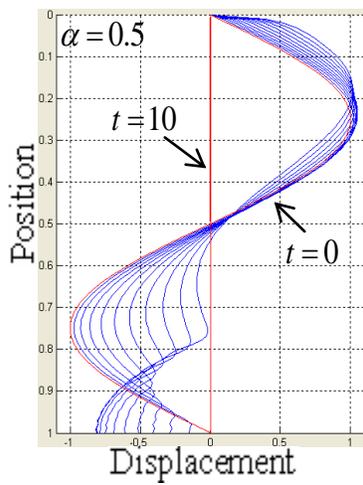
รูปที่ 4.2.1 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ( $\psi(x) = 0$ ) เมื่อ  $\alpha = 0.5, 2.5, 3$  ตามลำดับ



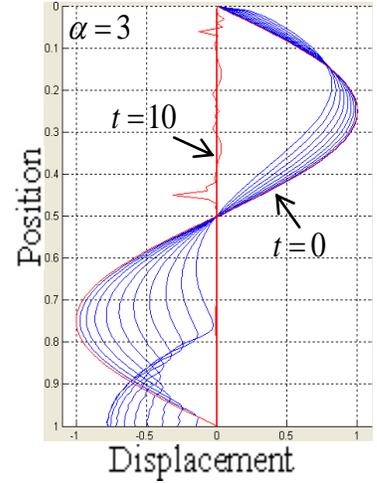
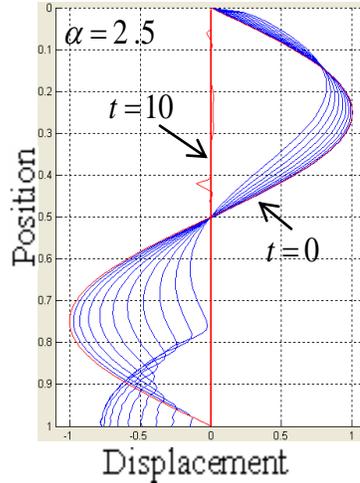
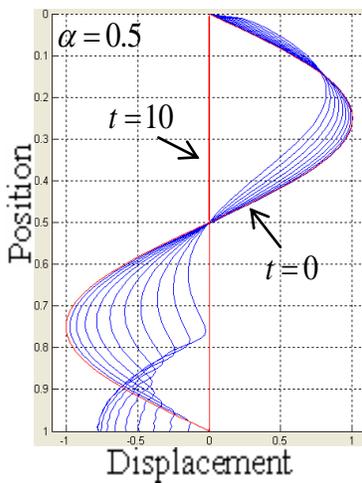
รูปที่ 4.2.2 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x)=1$  เมื่อ  $\alpha = 0.5, 2.5, 3$  ตามลำดับ



รูปที่ 4.2.3 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x)=x$  เมื่อ  $\alpha = 0.5, 2.5, 3$  ตามลำดับ

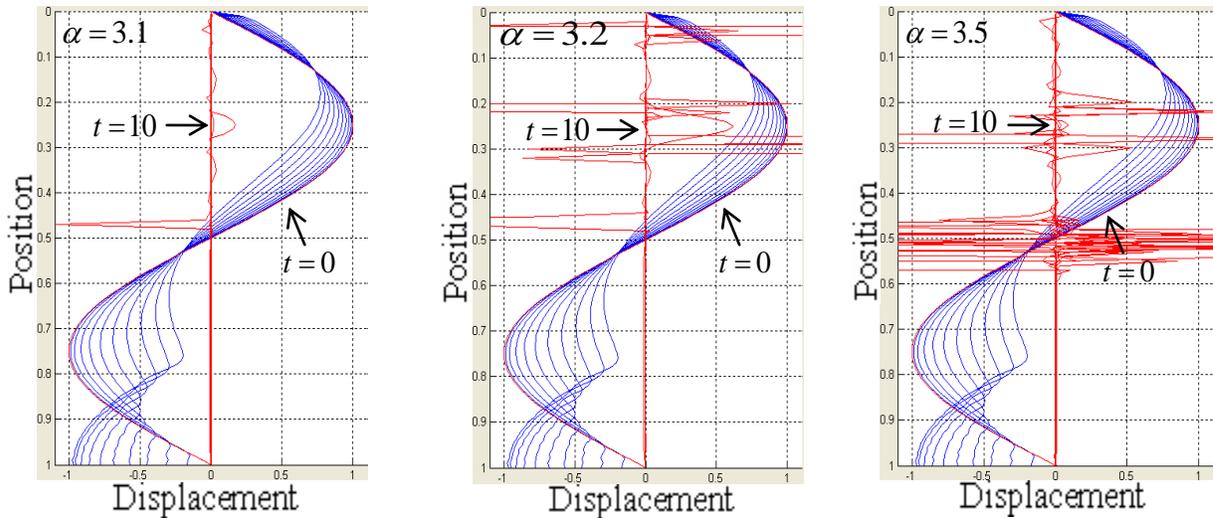


รูปที่ 4.2.4 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = \cos x$  เมื่อ  $\alpha = 0.5, 2.5, 3$  ตามลำดับ

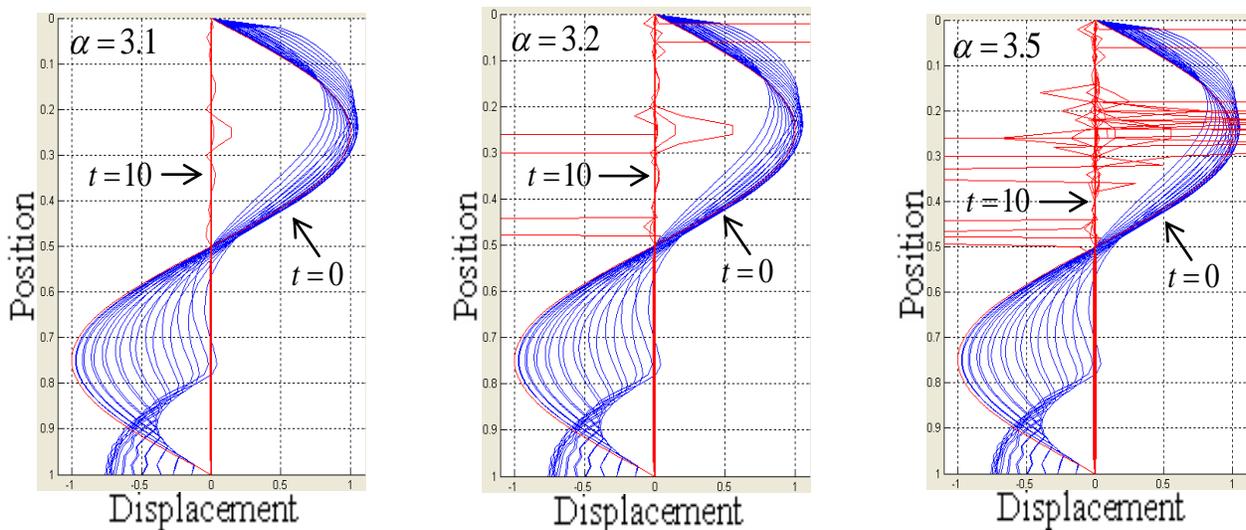


รูปที่ 4.2.5 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = \sin x$  เมื่อ  $\alpha = 0.5, 2.5, 3$  ตามลำดับ

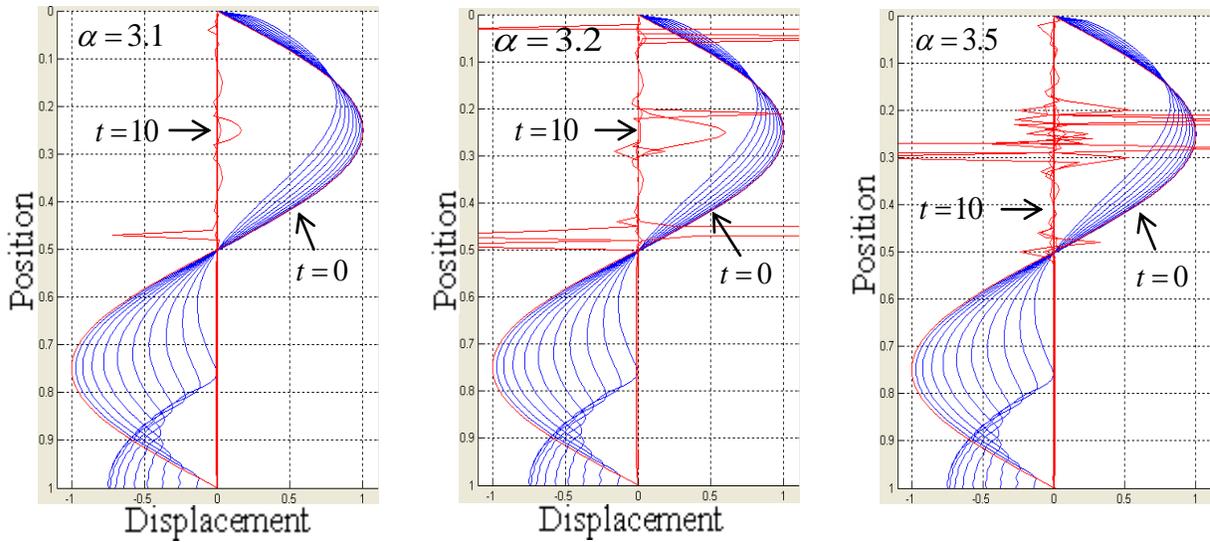
เมื่อค่อยๆ **เพิ่มค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง  $\alpha$**  ในช่วง 3.1 ถึง 3.5 เส้นลวดจะสั้นเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง ลู่ออกดังรูปที่ 4.2.6- 4.2.10 เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน



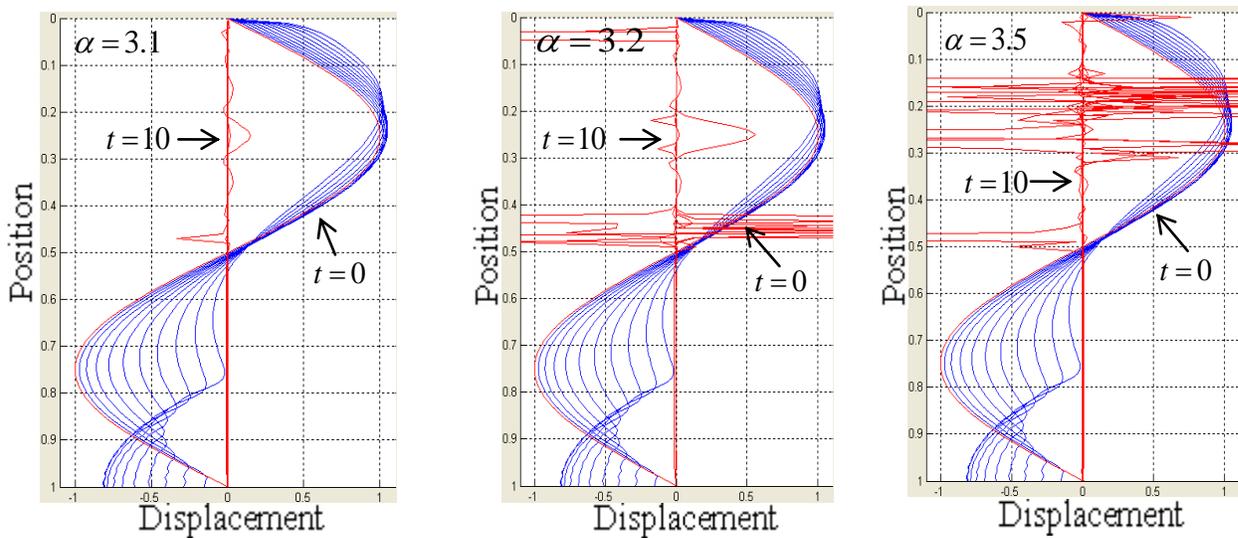
รูปที่ 4.2.6 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั้นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ( $\psi(x)=0$ ) เมื่อ  $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$  ตามลำดับ



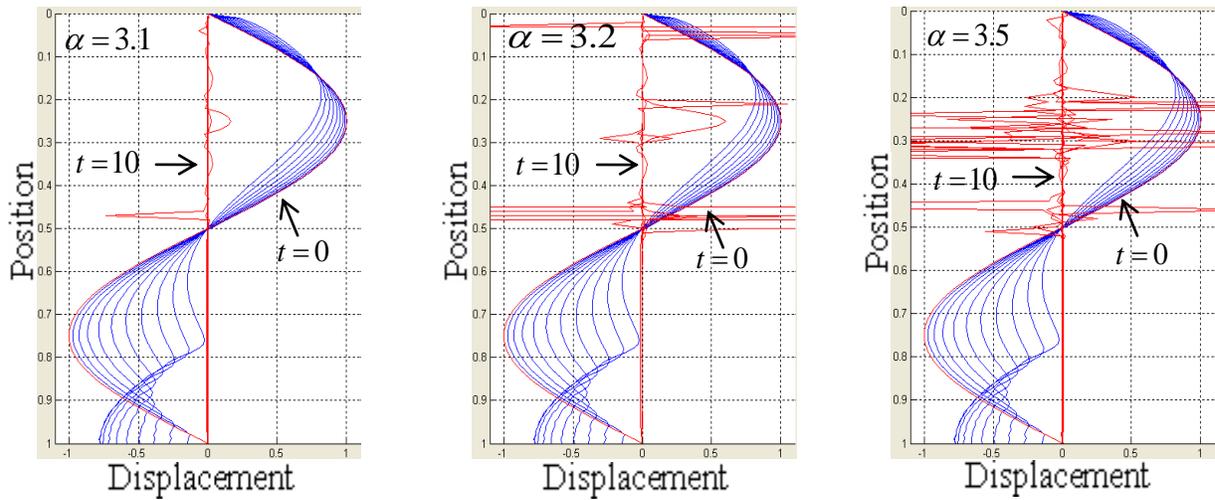
รูปที่ 4.2.7 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั้นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x)=1$  เมื่อ  $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$  ตามลำดับ



รูปที่ 4.2.8 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $v(x) = x$  เมื่อ  $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$  ตามลำดับ



รูปที่ 4.2.9 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $v(x) = \cos x$  เมื่อ  $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$  ตามลำดับ



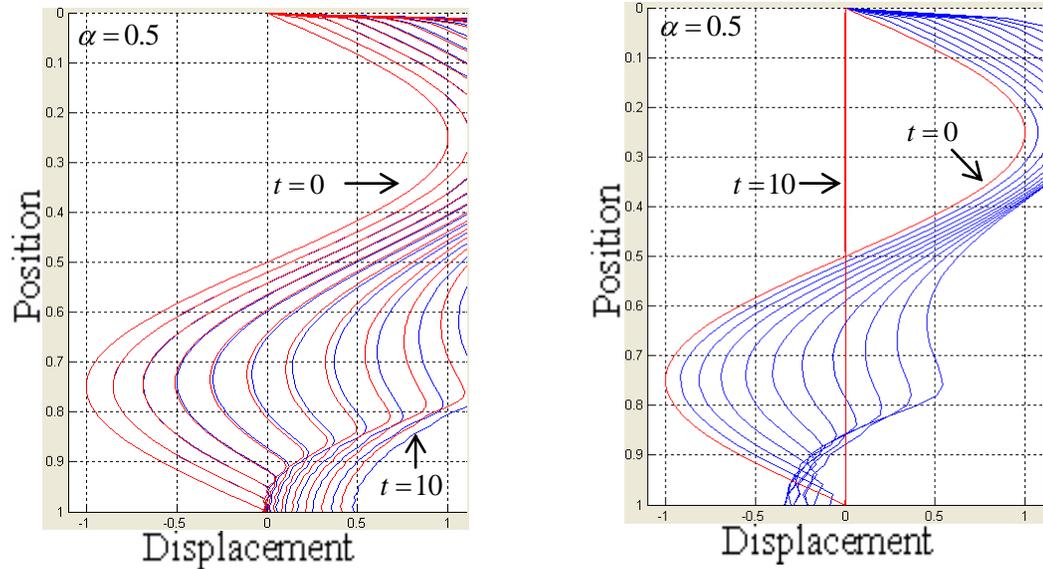
**รูปที่ 4.2.10** กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง (เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = \sin x$  เมื่อ  $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$  ตามลำดับ

จากผลการเปรียบเทียบตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.2.1-4.2.5 เราจะเห็นว่า การสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองมีผลทำให้เส้นลวดสั่นลดลงมากกว่าการสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น โดยการสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้นนั้น แอมพลิจูดของการสั่นจะแปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง ( $\alpha$ ) กล่าวคือ แอมพลิจูดของการสั่นจะลดลงเมื่อ  $\alpha$  มีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะที่การสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองนั้น แอมพลิจูดของการสั่นจะแปรผันตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง ( $\alpha$ ) กล่าวคือแอมพลิจูดของการสั่นจะลดลงเมื่อ  $\alpha$  มีค่าลดลง

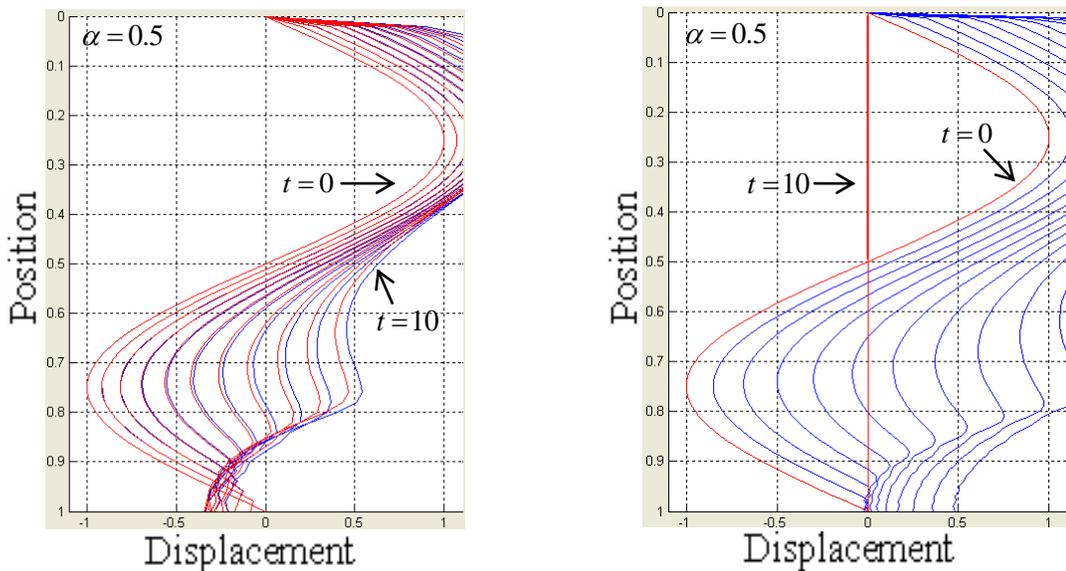
นอกจากนี้ เรายังพบว่า สำหรับการสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น ลักษณะของการสั่นยังคงรักษารูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดไว้ ในงานวิจัยนี้เรากำหนดให้รูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดคือ  $\phi(x) = \sin 2\pi x$  จากรูปที่ 4.1.1- 4.1.5 จะเห็นว่าเมื่อมีความหน่วงแบบเชิงเส้น เส้นลวดจะค่อยๆ สั่นลดลงแบบขึ้นอยู่กับรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดเมื่อเวลาผ่านไป ในขณะที่การสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ลักษณะของการสั่น ไม่ขึ้นอยู่กับรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด จากรูปที่ 4.2.1- 4.2.5 ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองมีผลทำให้เส้นลวดสั่นลดลงอย่างรวดเร็ว และมีลักษณะการสั่นที่แตกต่างจากรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดอย่างมากเมื่อเวลาผ่านไป

ยิ่งไปกว่านั้น สำหรับกรณีของความหน่วงแบบเชิงเส้น จากรูปที่ 4.1.1- 4.1.10 จะเห็นว่าขอบเขตของค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง ( $\alpha$ ) จะเริ่มจาก 1 ถึง 10,000 ยิ่ง  $\alpha$  มีค่ามากขึ้นๆ เส้นลวดจะสั่นลดลงจะกระทั่งไม่สั่นเลย ส่วนกรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง จากรูปที่ 4.2.1- 4.2.5 จะเห็นว่า

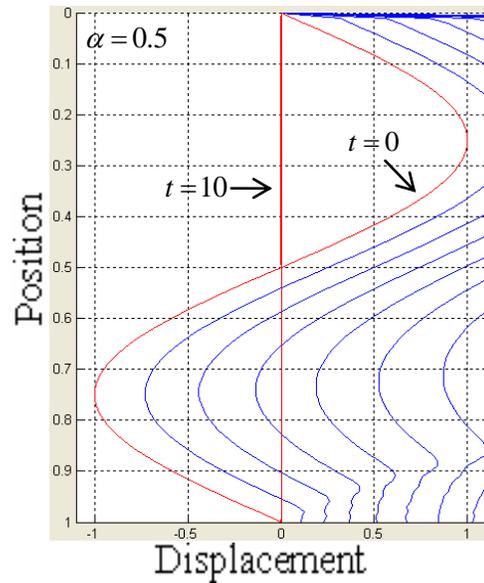
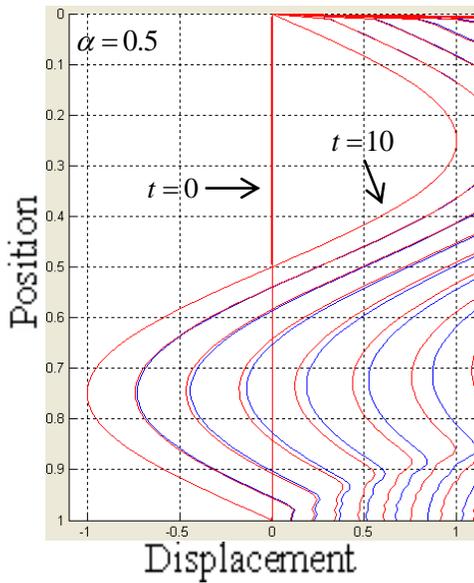
ขอบเขตของค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง ( $\alpha$ ) จะเริ่มจาก 0.5 ถึง 3 ซึ่งจะเห็นว่าการเพิ่มค่า  $\alpha$  ในช่วงดังกล่าว มีผลต่อการลดลงของการสั่นอย่างรวดเร็วกว่าๆ กัน โดยไม่ขึ้นอยู่กับความเร็วเริ่มต้น แต่เมื่อ  $\alpha$  มีค่ามากกว่า 3 การสั่นจะลู่ออกดังรูปที่ 4.2.6- 4.2.10



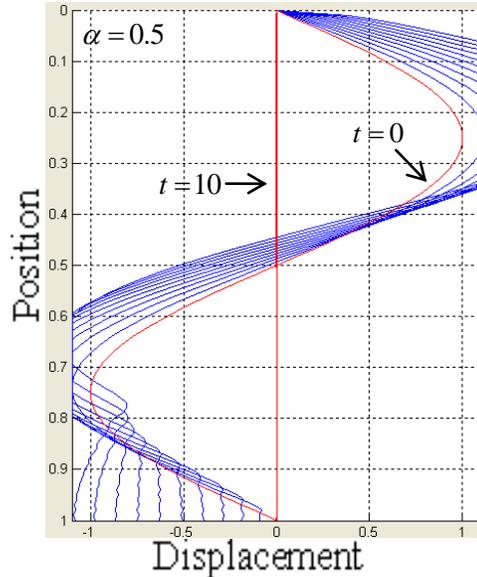
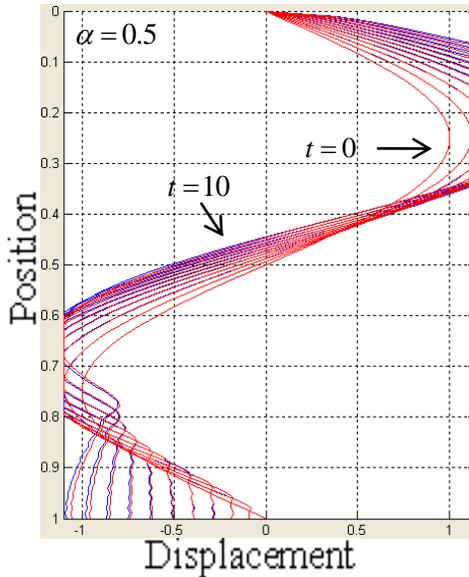
รูปที่ 4.2.11 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = 3$



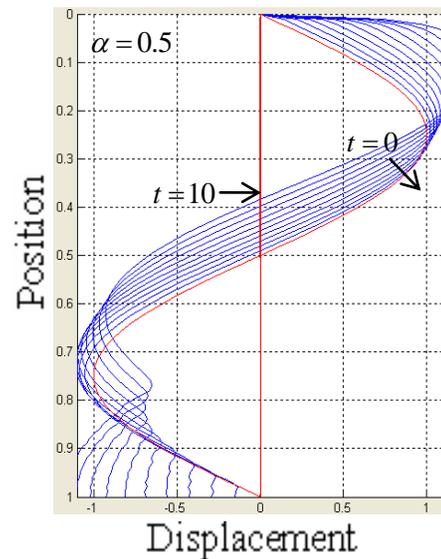
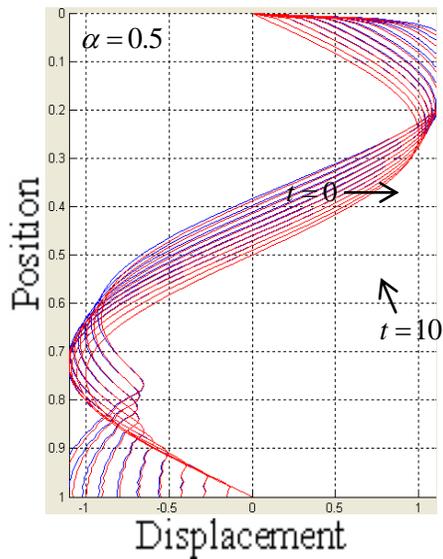
รูปที่ 4.2.12 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = x^2 + 5$



รูปที่ 4.2.13 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง (เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = x^3 + 10$



รูปที่ 4.2.14 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง (เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = 5\sin 7x$



รูปที่ 4.2.15 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x) = 3\cos 5x$

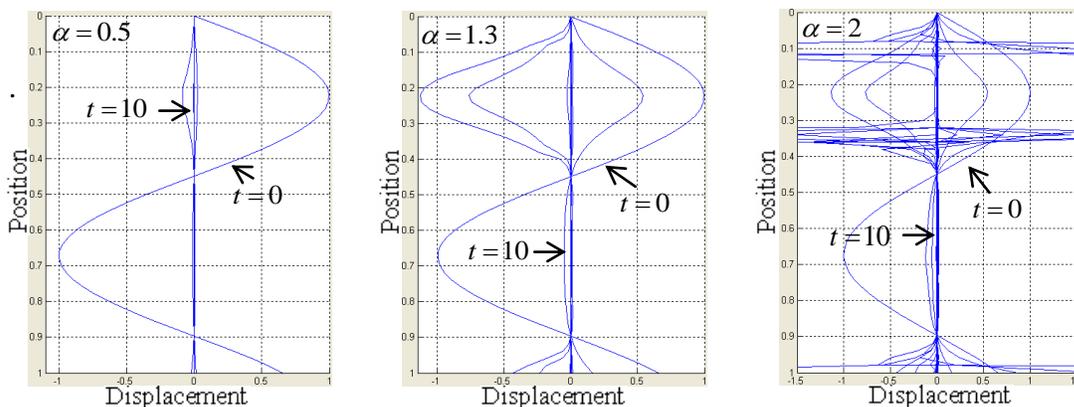
จากรูปที่ 4.2.11-4.2.15 จะเห็นว่าเมื่อกำหนดให้ความเร็วต้นคือ  $\psi(x) = 3, x^2 + 5, x^3 + 10, 5\sin 7x, 3\cos 5x$  ตามลำดับ จะทำให้เกิดการสั่นแบบลู่ออก(เส้นสีฟ้า) และเมื่อเพิ่มความหน่วงแบบเชิงเส้นให้กับเส้นลวด เส้นลวดจะสั่นลดลงเล็กน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับลักษณะการสั่นแบบไม่มีความหน่วง ซึ่งยังคงลู่ออกดังเส้นกราฟสีแดงในรูปทางซ้ายมือ แต่เมื่อเพิ่มความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสองให้กับเส้นลวด เส้นลวดจะสั่นลดลงทันทีหลังจากเวลาเริ่มต้น ซึ่งทำให้การกำทอนไม่เกิดขึ้นดังเส้นกราฟสีแดงในรูปทางขวามือ ดังนั้นการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง สามารถช่วยป้องกันการเกิดการกำทอนได้

### 4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม

ในหัวข้อที่ 4.2 เราได้ทำการศึกษาถึงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ( $c = 2$ ) เราจะเห็นว่าแอมพลิจูดของการสั่นลดลงอย่างรวดเร็ว โดยไม่ขึ้นกับความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด ในหัวข้อนี้ เราจะทำการศึกษาถึงลักษณะการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม ( $c = 3$ ) และนำผลของกราฟมาเปรียบเทียบกับกรณีการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง จากผลที่ได้ในหัวข้อ 4.2 ภายใต้รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วต้นเดียวกัน ผลการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่า สำหรับการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม แอมพลิจูดของการสั่นแปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง ซึ่งแตกต่างจากการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองที่แอมพลิจูดของการสั่นมีค่าแปรผันตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง

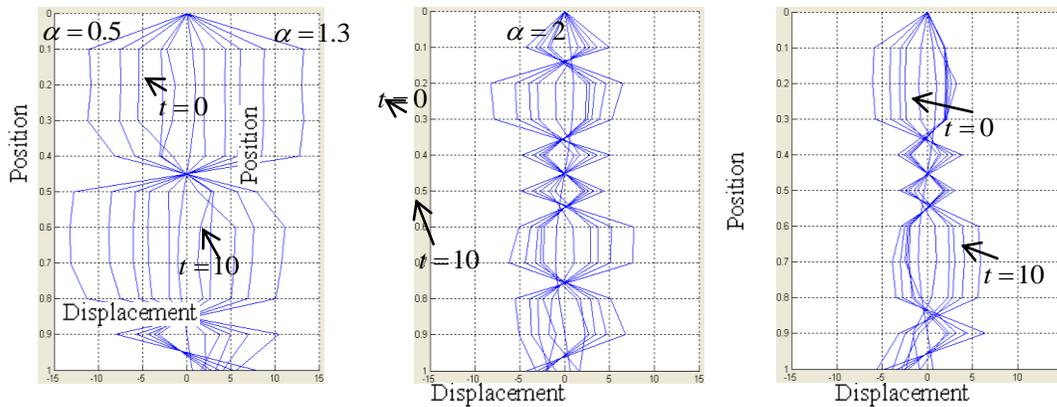
The numerical simulation of the vibrating suspended string equation accounting for the second and third power nonlinear damping cases under the same initial shape; i.e.  $\sin(7x)$ , and the various values of  $\alpha$ ; i.e.  $\alpha = 0.5, 1.3, 2$  are illustrated in Figs. 1 and 2, respectively. We have found that the amplitude of vibration decreases rapidly in case of the second power nonlinear damping accounted for especially when alpha is less than 1.2. It can be seen from Fig. 1 that the frequency of the vibration is the same as the frequency of the initial shape. In addition, the amplitude of vibration is greater than an interval of -1 to 1 when alpha is larger than 1.3.

The solution of the vibration equation is quite different if the third power nonlinear damping is considered as shown in Fig. 2. That is, the amplitude of vibration increases gradually with time for every value of alpha, while the frequency of oscillation demonstrates both decrease and increase when compared with the frequency of an initial shape. Moreover, the amplitude of vibration decreases when alpha increase as shown in Fig. 2. To investigate how initial velocity affects the solution, the initial velocity has been varied and assigned to equal to its position; i.e.  $\psi(x) = 0, 1$  and  $x$ . The numerical solution shows that the vibration shape of the suspended string with the third power nonlinear damping barely change as illustrated in Figs. 2-5.

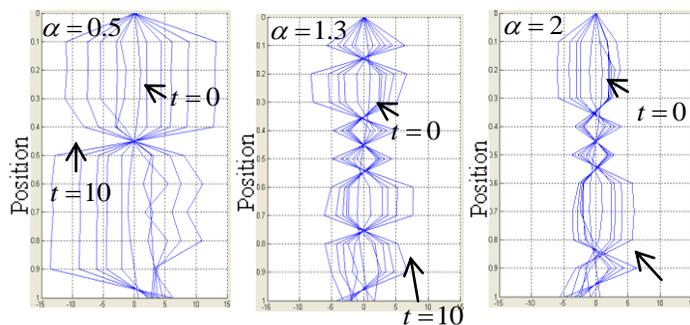


รูปที่ 4.3.1 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น  $\psi(x)=0$  เมื่อ  $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$  ตามลำดับ

**Fig.2** Graphical comparison of the vibration displacements with the third power nonlinear damping term for different values of  $\alpha$  and time (without the initial velocity;  $\psi(x)=0$  m/s).



**Fig.3** Graphical comparison of the vibration displacements with the third power nonlinear damping term for different values of  $\alpha$  and time (with the initial velocity  $\psi(x)=1$  m/s).



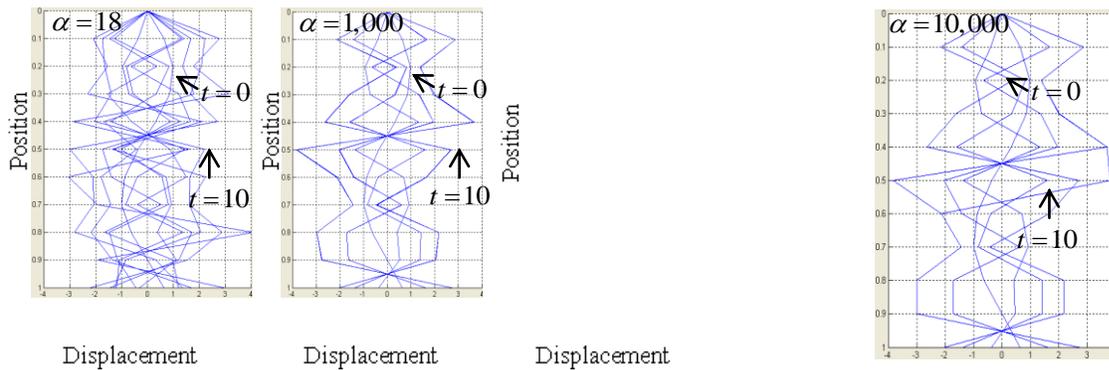
Displacement

Displacement

Displacement

**Fig.4** Graphical comparison of the vibration displacements with the third power nonlinear damping term for different values of  $\alpha$  and time (with the initial velocity  $\psi(x) = x$  m/s).

รูปที่ 4.3. แสดงการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อ  $\alpha = 18, 1,000$  and  $10,000$  จากรูป จะเห็นว่าการสั่นจะมีความถี่ลดลงเมื่อ  $\alpha$  เพิ่มขึ้น โดยเราได้ทดลองเปลี่ยนค่า  $\alpha$  ในช่วง 18 ถึง 10,000 เราพบว่าแอมพลิจูดของการสั่นจะอยู่ในช่วง -4 ถึง 4 เสมอ นอกจากนี้ เรายังพบว่าค่า  $\alpha$  ในช่วง 1,000 ถึง 10,000 ไม่มีผลต่อลักษณะการสั่น นั่นคือการสั่นคงมีลักษณะเหมือนเดิม



**Fig.5** Graphical comparison of the vibration displacements with the third power nonlinear damping term for different values of  $\alpha$  (without the initial velocity;  $\psi(x) = 0$  m/s).

Unlike the second power nonlinear damping term, the third power results in a increase in the amplitude of vibration. As a consequence, the resonance can not be minimized by adding the third power nonlinear damping force while the second power nonlinear damping term prevents resonance from occurring under the defined coefficient of the damping term.

The stability condition of the finite difference scheme is given by  $2mp < 1$  where  $p = k^2/h$ ,  $h = 0.1$  and  $k = 0.05$ . The study can be further carried out by investigating various nonlinear damping cases i.e.  $c > 3$  and the external forces are added to the string equation.

## บทที่ 5

### สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

#### 5.1 สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ระเบียบวิธีผลต่างอันตะถูกนำมาใช้เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองและกำลังสาม ผลการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงและกำลังของพจน์ความหน่วงมีบทบาทสำคัญต่อการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดของการสั่น ส่งผลให้ลักษณะการสั่นทั้งสามแบบมีความแตกต่างกันอย่างมาก เมื่อกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นและรูปร่างเริ่มต้นเหมือนกัน โดยการสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น เส้นลวดจะค่อยๆ สั่นลดลงแบบขึ้นอยู่กักรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด เมื่อเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงให้อยู่ระหว่าง 1 ถึง 10,000 ในขณะที่การสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง เส้นลวดจะสั่นลดลงอย่างรวดเร็วแบบไม่ขึ้นอยู่กักรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด เมื่อลดค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงให้อยู่ระหว่าง 1 ถึง 3 ส่วนการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสามนั้น เส้นลวดจะสั่นลดลงแต่ลักษณะการสั่นจะถู้ออก เมื่อเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงระหว่าง ถึง

นอกจากนี้ จากผลการเปรียบเทียบลักษณะการสั่นทั้งสามแบบ ยังพบว่าการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองนั้น สามารถช่วยป้องกันการเกิดการกำทอน หรือการถู้ออกของการสั่นได้

จากตัวอย่างทั้งหมดในบทที่ 4 กำหนด  $h=0.1$  และ  $k=0.05$  เพื่อทำให้เห็นความแตกต่างของเส้นกราฟผลเฉลยที่เวลา  $t$  ต่างๆ กันและช่วยให้วิเคราะห์กราฟได้ง่ายขึ้น แต่ถ้ากำหนดให้ค่าของ  $k$  มีความละเอียดมากขึ้นกว่านี้ เช่น กำหนด  $k=0.02$  จะทำให้เส้นกราฟของผลเฉลยที่เวลา  $t$  ต่างๆ มีความใกล้เคียงกันมากขึ้น ทำให้วิเคราะห์กราฟได้ยากขึ้น แต่อย่างไรก็ตามในความเป็นจริงแล้ว ควรจะกำหนดค่าของ  $h$  และ  $k$  ให้มีความละเอียดพอสมควรเพื่อให้เห็นลักษณะของกราฟการสั่นที่ใกล้เคียงกับความจริง และเพิ่มขอบเขตของเวลาด้วย

ในงานวิจัยนี้ เราใช้ช่วงย่อยของตำแหน่งและเวลาคือ  $h = 0.001$  และ  $k = 0.0025$  ตามลำดับ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขของความเสถียรของระเบียบวิธีผลต่างอันตะ  $2mp < 1$  โดย  $p = \frac{k^2}{h}$

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

เราสามารถศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวดิ่ง ในกรณีของความหน่วงไม่เชิงเส้นแบบอื่นๆ เช่น  $c > 3$  และกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นแทนด้วยฟังก์ชันที่ซับซ้อนขึ้น นอกจากนี้ยังสามารถนำแรงภายนอกมาพิจารณาร่วมกับความหน่วงแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกรณีต่างๆ ว่ามีผลต่อลักษณะการสั้นของเส้นลวดอย่างไร

## บรรณานุกรม

- [1] N. S. Koshlyakov, E. V. Gliner and M. M. Smirnov, *Differential Equations of Mathematical Physics*, Moscow, 1962 (in Russian). English Translation: North-Holland Publ. Co, 1964.
- [2] กนต์ธร ชำนิประศาสน์. 2538. การสั่นสะเทือนทางกล, พิมพ์ครั้งที่ 3 กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- [3] นับเดือน สอระสัน, สิทธิชัย มาละเงิน และจุฑามาศ แซ่เบ๊. 2552. “การหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น และค่าขอบเขตของสมการเส้นลวดในแนวตั้งโดยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม.” ปัญหาพิเศษวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [4] คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย. 2555. “การจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง.” ปัญหาพิเศษวิทยาศาสตร์ มหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [5] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **30**, No.2 (2007), 543-556.
- [6] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Classical Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **31**, No.2 (2008), 351-373.
- [7] J. Kasemsuwan, *Exponential Decay for Nonlinear Damped Equation of Suspended String*, Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication, and Control, 2009, 308-312.
- [8] M. Yamaguchi, *Almost Periodic Oscillations of Suspended String Under Quasiperiodic Linear Force*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **303**, No.2 (2005), 643-660.
- [9] M. Yamaguchi, T. Nagai and K. Matsukane, *Forced Oscillations of Nonlinear Damped Equation of Suspended String*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **342**, No.1 (2008), 89-107
- [10] M. Yamaguchi, *Global Smooth Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **342**, No.2 (2008), 798-815.
- [11] M. Yamaguchi, *Infinitely Many Periodic Solutions of Nonlinear Equations of Suspended Strings*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA **51**, No.2 (2008), 245-267.
- [12] M. Yamaguchi, *Existence and Regularity of Periodic Solutions of Nonlinear Equation of a Suspended String*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA **52**, No.2 (2009), 281-300.
- [13] ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2553. “การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง” วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย 30, 3: 101-111.
- [14] J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of Suspended String Equation*, The 3<sup>rd</sup> Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.
- [15] คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย, ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2554. “แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง” การประชุมวิชาการ ครั้งที่ 8 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน, 1486-1491.
- [16] **J. Kasemsuwan**, *Numerical Solution of the Damped Vibration of Suspended String*, University of the Thai Chamber of Commerce Journal, 2012, [peer-review](#).
- [17] **J. Kasemsuwan**, *The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the Nonlinear Damping Term*, International Conference on Applied Physics and Mathematics, 2012, 566-568.

ภาคผนวก ก.

## วิธีการเปิดไฟล์โปรแกรม MATLAB

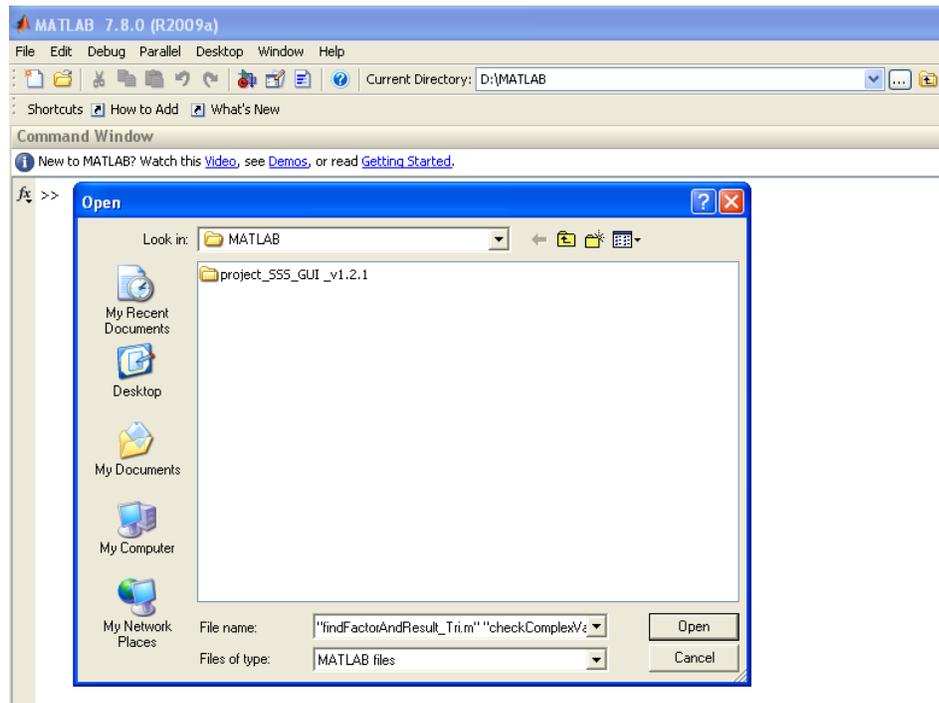
ขั้นที่ 1 สำเนาไฟล์ directory “project\_SSS\_GUI\_v1.2.1” จากแผ่น CD ลงใน directory ของ MATLAB ในเครื่อง

ขั้นที่ 2 คลิกที่ปุ่ม Start มุมล่างซ้ายมือที่หน้าจอ window

ขั้นที่ 3 เลือกเข้าโปรแกรม MATLAB

ขั้นที่ 4 คลิกปุ่มเปิดไฟล์  แล้วเข้า directory ของ MATLAB แล้วเปิดไฟล์ project\_SSS\_GUI\_v1.2.1

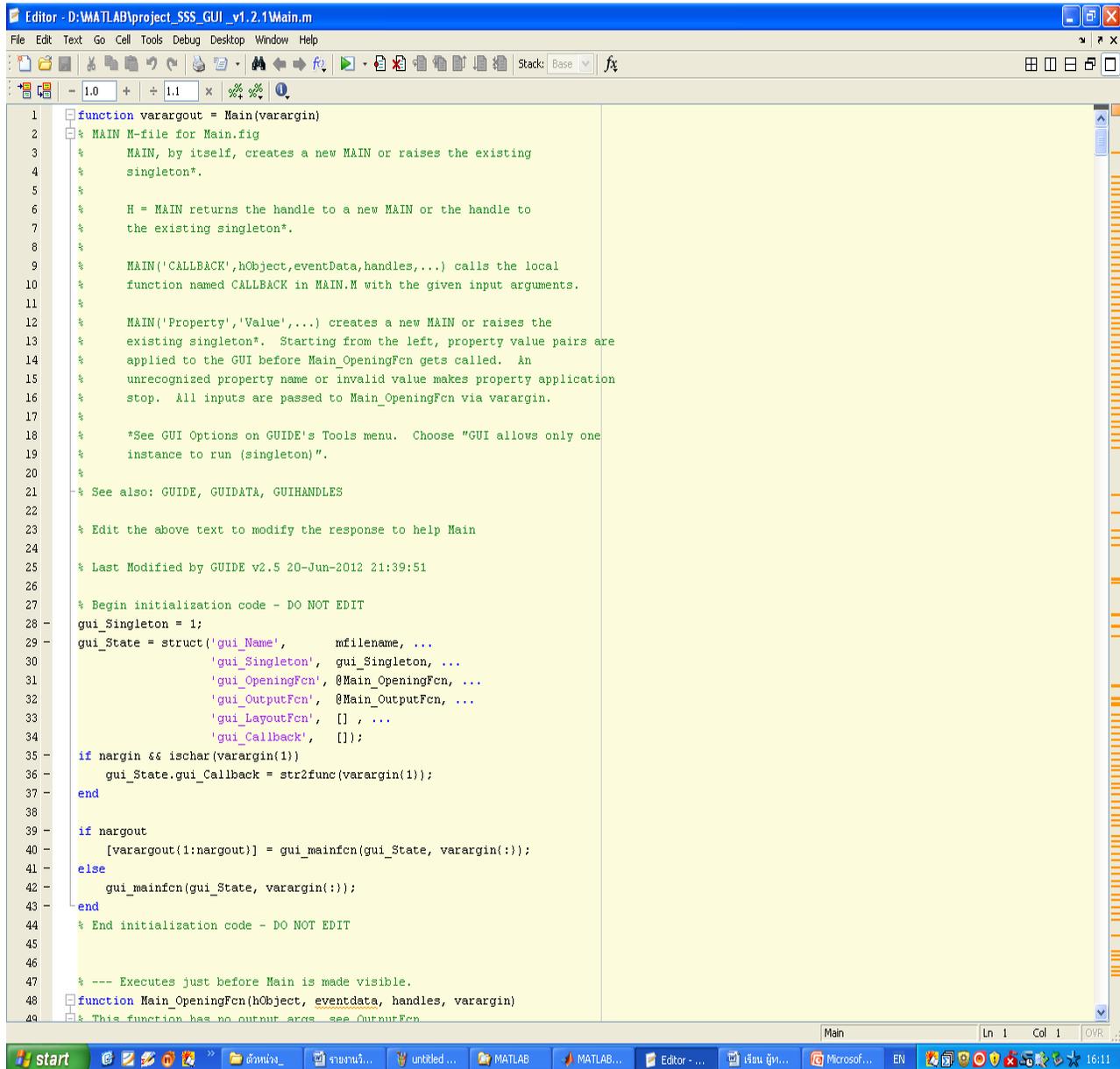
ผังรูป



รูปที่ 1 รูปแสดงหน้าจอการเปิดไฟล์ในโปรแกรม MATLAB

ขั้นที่ 5 ดับเบิลคลิกที่ไฟล์ “project\_SSS\_GUI\_v1.2.1”

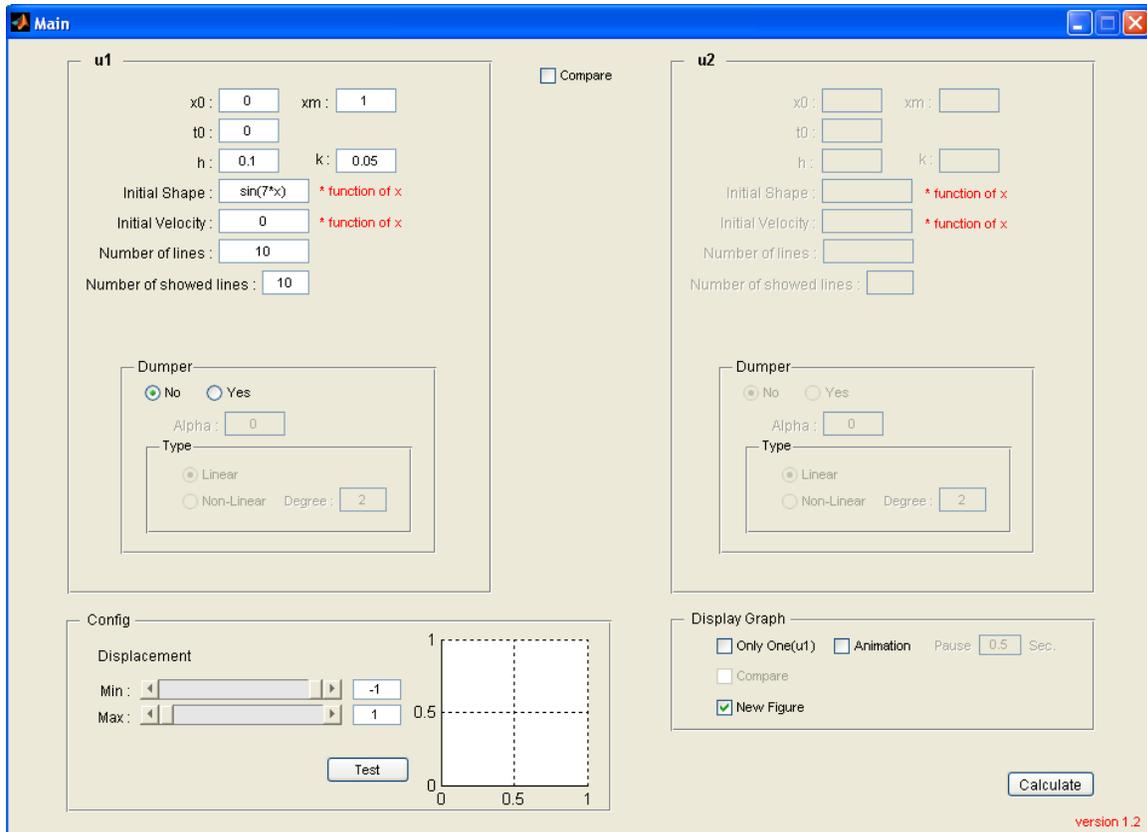
## ขั้นที่ 6 ดับเบิลคลิกที่ไฟล์ “Main.m” จะปรากฏหน้าจอของ source code ดังนี้



```
1 function varargout = Main(varargin)
2 % MAIN M-file for Main.fig
3 % MAIN, by itself, creates a new MAIN or raises the existing
4 % singleton*.
5 %
6 % H = MAIN returns the handle to a new MAIN or the handle to
7 % the existing singleton*.
8 %
9 % MAIN('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the local
10 % function named CALLBACK in MAIN.M with the given input arguments.
11 %
12 % MAIN('Property','Value',...) creates a new MAIN or raises the
13 % existing singleton*. Starting from the left, property value pairs are
14 % applied to the GUI before Main_OpeningFcn gets called. An
15 % unrecognized property name or invalid value makes property application
16 % stop. All inputs are passed to Main_OpeningFcn via varargin.
17 %
18 % *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows only one
19 % instance to run (singleton)".
20 %
21 % See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES
22 %
23 % Edit the above text to modify the response to help Main
24 %
25 % Last Modified by GUIDE v2.5 20-Jun-2012 21:39:51
26 %
27 % Begin initialization code - DO NOT EDIT
28 gui_Singleton = 1;
29 gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
30                  'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
31                  'gui_OpeningFcn', @Main_OpeningFcn, ...
32                  'gui_OutputFcn',  @Main_OutputFcn, ...
33                  'gui_LayerFcn',   [], ...
34                  'gui_Callback',    []);
35 if nargin && ischar(varargin{1})
36     gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
37 end
38
39 if nargin
40     [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
41 else
42     gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
43 end
44 % End initialization code - DO NOT EDIT
45
46
47 % --- Executes just before Main is made visible.
48 function Main_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
49 % This function has no output args - see OutputFcn
```

รูปที่ 2 รูปแสดงหน้าจอของ Source Code

ขั้นที่ 7 คลิกปุ่ม  บนแถบเครื่องมือเพื่อ run program จะปรากฏหน้าจอ GUI ดังนี้



รูปที่ 3 รูปแสดงหน้าจอของ GUI

## ภาคผนวก

ตัวอักษรตัวหนา ขนาด 22  
จัดกึ่งกลางหน้ากระดาษ

เป็นส่วนที่ช่วยให้ผู้อ่านเข้าใจเนื้อหาของงานวิจัยได้ละเอียดชัดเจนยิ่งขึ้น หรือได้รับความรู้เพิ่มขึ้น จากตัวเนื้อเรื่อง ซึ่งได้แก่ แบบสัมภาษณ์ แบบสอบถาม เวลาที่ใช้ในการวิจัย งบประมาณเพื่อการวิจัย ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการทำโครงการวิจัยและได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่หรือข้อมูลเอกสารที่เกี่ยวข้อง ภาคผนวกอาจจะมีมากกว่า 1 ภาคก็ได้ โดยกำหนดเป็น ภาคผนวก ก ภาคผนวก ข หรือ ภาคผนวก ค เป็นต้น

## ข้อมูลประวัติคณะผู้วิจัย

### ประวัติส่วนตัว

ชื่อ-สกุล นางใจปอง เกษมสุวรรณ

เพศ  ชาย  หญิง วันเดือนปีเกิด 3 มกราคม 2519 อายุ 36 ปี

สถานภาพ  โสด  สมรส

ตำแหน่งปัจจุบัน

### ประวัติการศึกษา

ชื่อย่อปริญญา	สาขา	สถาบันที่จบ	ปีที่จบ
วท.บ.	คณิตศาสตร์ประยุกต์	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าฯ ลาดกระบัง	2540
วท.ม.	คณิตศาสตร์ประยุกต์	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าฯ ลาดกระบัง	2545
D.Sc.	Mathematics and Mathematical Sciences	Tokai University Japan	2550

สาขาวิจัยที่มีความชำนาญพิเศษ (แตกต่างจากวุฒิการศึกษา)

Partial Differential Equation

### ทุนการศึกษาและทุนวิจัยที่เคยได้รับ

ปี พ.ศ.	ทุนการศึกษาและทุนวิจัย	สถาบันที่ให้
2541	ระดับปริญญาตรี ทุนพัฒนาอาจารย์ (สาขาขาดแคลน)	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ ทหารลาดกระบัง
2542-2545	ระดับปริญญาโท ทุนพัฒนาอาจารย์ (สาขาขาดแคลน)	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ ทหารลาดกระบัง
2546-2550	ระดับปริญญาเอก ทุนสกอ. (เงินนอกงบประมาณ)	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ ทหารลาดกระบัง
2554	ทุนการสนับสนุนผู้ช่วยวิจัยประจำปีการศึกษา 2554	ศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์
2555	ทุนประเภทส่งเสริมนักวิจัย ประจำปี 2555	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ ทหารลาดกระบัง

## ผลงานวิจัย/งานสร้างสรรค์ที่ตีพิมพ์เผยแพร่ (ระดับชาติและนานาชาติ)

- [1] **J. Wongsawasdi** and M. Yamaguchi, *Global solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string*, Tokyo Journal of Mathematics **30**, No.2 (2007), 543-556.
- [2] **J. Wongsawasdi** and M. Yamaguchi, *Global classical solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string*, Tokyo Journal of Mathematics **31**, No.2 (2008), 351-373.
- [3] **J. Kasemsuwan**, *Exponential decay for nonlinear damped equation of suspended string*, Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication, and Control, 2009, 308-312.
- [4] **J. Kasemsuwan**, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of suspended string equation*, The 3<sup>rd</sup> Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.
- [5] P. Chitsakul, **J. Kasemsuwan** and P. Chaisanit, *A mathematical model for studying outflow from the dam*, The 3<sup>rd</sup> Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 46-47.
- [6] **ใจปอง เกษมสุวรรณ**. 2553. “การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” วารสารวิชาการมหาวิทยาลัย หอการค้าไทย 30, 3: 101-111.
- [7] คณาจัตติ ทรัพย์คล้าย, **ใจปอง เกษมสุวรรณ** . 2554. “แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” การประชุมวิชาการ ครั้งที่ 8 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน, 1486-1491.
- [8] **J. Kasemsuwan**, *Numerical Solution of the Damped Vibration of Suspended String*, University of the Thai Chamber of Commerce Journal, 2012, [peer-review](#).
- [9] **J. Kasemsuwan**, *The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the Nonlinear Damping Term*, International Conference on Applied Physics and Mathematics, 2012, 566-568.

## การเสนอผลงานวิชาการ

1. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง The finite difference scheme for the suspended string Equation with the nonlinear damping term ประเทศ สาธารณรัฐสิงคโปร์
2. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง Simulation of suspended string equation ณ เมือง Osaka ประเทศ ญี่ปุ่น
3. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง Exponential decay for nonlinear damped equation of suspended string ณ เมือง Nanyang ประเทศ สาธารณรัฐสิงคโปร์