DOI: 10.14456/mj-math.xxxx.xx วารสารคณิตศาสตร์ ปริมา 65 เล่มที่ 702 กันยายน – ธันวาคม 2563

วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(702) กันยายน – ธันวาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ผลลัพธ์บางอย่างใน $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป

Some results in $\mathcal{LA}^{**}$-semigroups

ชฎารัตน์ ถาปัน[1] และ ไพโรจน์ เยียระยง[2,*]

[1,2]หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม พิษณุโลก 65000

Chadarat Tapan[1] and Pairote Yiarayong[2,*]

[1,2]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,

Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok 65000

Email: [1]n_nstat@hotmail.com [2]pairote0027@hotmail.com

วันที่รับบทความ : 9 ธันวาคม 2562 วันที่แก้ไขบทความ : 17 มกราคม 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 7 เมษายน 2563

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้นำเสนอแนวคิดของสมาชิกตัวแปรในกึ่งกรุปเกือบซ้ายและมีการตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของสิ่งที่กล่าวมาข้างต้น นอกจากนี้ได้พิสูจน์ว่า ถ้า $(S,*)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปปรกติ และ $a \in S$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $a \in \mathcal{R}(S)$
2. $(S*a)*b = S*b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$

คำสำคัญ: กึ่งกรุปเกือบซ้าย $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป สมาชิกตัวแปร อินเวอร์ทีฟซ้าย กึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

---

[*] ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

In this paper, the notions of variant elements in left almost semigroups are investigated. Moreover, we prove that the following conditions are equivalent.

1. $a \in \mathcal{R}(S)$,
2. $(S * a) * b = S * b$ for any element b of an $\mathcal{LA}^{**}$-semigroup S.

Keywords: Left almost semigroup, $\mathcal{LA}^{**}$-semigroup, Variant element, Left invertive, Regular left almost semigroup

1. บทนำ

ในบทความนี้เป็นการศึกษากึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีลักษณะพิเศษบางประการ เช่น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป และกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย เป็นต้น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปถูกพัฒนามาจากทฤษฎีบทของกึ่งกรุปเกือบซ้ายและกึ่งกรุปสลับที่ โครงสร้างพีชคณิต “$\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป” ได้รับการนิยามครั้งแรกโดย Protić and Božinović [13] ในปี ค.ศ.1995 ซึ่งได้อธิบายว่ากึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S,*)$ จะเรียกว่า $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป ถ้าสำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S ซึ่ง $x*(y*z) = y*(x*z)$ นอกจากนี้ยังได้อธิบายกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีลักษณะพิเศษบางอย่างที่กล่าวมาข้างต้น ยิ่งไปกว่านั้นยังมีนักคณิตศาสตร์อีกมากมายที่ได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอย่างแพร่หลายซึ่งได้อธิบายถึงทฤษฎีบท สมบัติและตัวอย่างต่าง ๆ ของ $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปและกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ เช่น

ในปี ค.ศ.2008 Boinovic และคณะ [3] ได้กำหนดบทนิยามของกึ่งกรุปย่อยเกือบซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วในกึ่งกรุปเกือบซ้ายระบบเคอร์เนลปรกติของ $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปผกผัน (kernel normal system of inverse $\mathcal{LA}^{**}$-semigroup) ในปี ค.ศ.2012 Yaqoob [14] สร้างบทนิยามของกึ่งกรุปย่อยเกือบซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วในกึ่งกรุปเกือบซ้าย นอกจากนี้ได้ศึกษาสมบัติบางประการของไอดีล (ขวา, ไบ-, ภายใน) ซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้ว (bipolar-valued fuzzy left (right, bi-, interior) ideal) ของกึ่งกรุปเกือบซ้าย ยิ่งไปกว่านั้น Faisal และคณะ [6] ได้แนะนำแนวคิดของฟัซซิฟิเคชันค่าสองขั้วในกึ่งกรุปเกือบซ้าย อันดับ ในปีเดียวกัน Aslam และคณะ [2] ได้นำเสนอแนวความคิดของเซตย่อยวิภัชนัยสองขั้วในกึ่งกรุปเกือบซ้ายและได้อธิบายลักษณะเฉพาะบางประการของไอดีล (ขวา) ซ้ายวิภัชนัยสองขั้วของกึ่งกรุปเกือบซ้าย ต่อมาในปี ค.ศ.2013 Dudek และ Gigon [5] ได้ให้ความหมายของ $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปผกผันสมบูรณ์ (completely inverse $\mathcal{LA}^{**}$-semigroup) ว่าเป็นกรุปพอยด์ที่มีสมบัติ

$$(x*y)*z=(z*y)*x,\ x*(y*z)=y*(x*z)$$

และ $x*x^{-1}=x^{-1}*x$ สำหรับทุกสมาชิก x,y และ z ใน S โดยที่ x^{-1} เป็นตัวผกผันเพียงตัวเดียวของ x นอกจากนี้ Khan และคณะ [8] ได้ให้บทนิยามของของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับวิภัชนัยค่าช่วงและได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับปรกติภายใน (intra-regular ordered $\mathcal{LA}$-semigroup) ในพจน์ของไอดีล (ขวา) ซ้ายวิภัชนัยค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับ ยิ่งไปกว่านั้น Yaqoob และคณะ [14 - 16] ได้ให้ความหมายของกึ่งกรุปย่อยเกือบซ้ายวิภัชนัยค่าช่วง ไอดีลซ้าย ไอดีลขวาและไบ-ไอดีลในกึ่งกรุปเกือบซ้าย แนวคิดของเซตวิภัชนัยสหัชญาณนิยมค่าช่วง (interval valued intuitionistic fuzzy set) ในกึ่งกรุปเกือบซ้ายถูกนำเสนอโดย Yaqoob ในปี ค.ศ.2013 และได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติในพจน์ของไอดีลซ้ายวิภัชนัยสหัชญาณนิยมค่าช่วง ในปี ค.ศ.2014 Khan, Shum และ Iqbal [9] ได้ศึกษาและอธิบายสมบัติบางประการของไอดีลเล็กสุด (minimal ideal) ของ $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป ($\mathcal{LA}^{**}$-semigroup) นอกจากนี้ Abdullah และคณะ [1] ได้กำหนดบทนิยามของไอดีลวิภัชนัย (α,β) ค่าช่วงในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ในปี ค.ศ.2016 Khan, Yousafzai และ Khan [11] ได้ศึกษาความหมายของ (m,n)-ไอดีล ((m,n)-ideal) ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย (LA-semigroup) และได้หาลักษณะเฉพาะของ (m,n)-ไอดีลในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ยิ่งไปกว่านั้นได้พิสูจน์ว่าเซตย่อย A ของกึ่งกรุปเกือบซ้ายจะเป็น $(0,2)$-ไอดีลก็ต่อเมื่อ A เป็นไอดีลซ้ายของบางไอดีลซ้ายในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ในปี ค.ศ.2018 Khan, Yousafzai และ Hila [10] ได้แนะนำแนวคิดของ $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปผกผันซ้ายสมบูรณ์ (completely left inverse $\mathcal{LA}^{**}$-semigroup) และได้ศึกษาสมบัติพื้นฐานของสมภาค (congruence) ใน $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปผกผันซ้ายสมบูรณ์

ในบทความนี้ได้ศึกษาและแนะนำแนวความคิดของสมาชิกตัวแปร (variant element) ใน $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปตามแนวทางของ Chinram และ Yonthanthum [4] นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของ $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป ยิ่งไปกว่านั้นได้พิสูจน์ว่า ถ้า $(S,*)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปปรกติและ $a\in S$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $a\in\mathcal{R}(S)$
2. $(S*a)*b=S*b$ สำหรับทุกสมาชิก $b\in S$

2. ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้เราได้ศึกษาบทนิยามและผลลัพธ์บางอย่างที่จำเป็นสำหรับวัตถุประสงค์และการศึกษาในหัวข้อต่อไปของเรา

บทนิยาม 2.1 [7] กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก $(S,*)$ ว่า **กึ่งกรุปเกือบซ้าย (left almost semigroup)** ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน $*: S\times S \to S$ โดยที่ $(x,y)\mapsto x*y$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใด ๆ ใน S ที่มีสมบัติ $(x*y)*z=(z*y)*x$ สำหรับทุกสมาชิก x,y และ z ใด ๆ ใน S และเรียกสมบัตินี้ว่า **อินเวอร์ทีฟซ้าย (left invertive)**

บทตั้ง 2.2 [7] ถ้า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายแล้ว $(a*b)*(c*d)=(a*c)*(b*d)$ สำหรับทุกสมาชิก a,b,c และ d ใด ๆ ใน S

กำหนดให้ $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย จะเรียก $(S,*)$ ว่า มีสมบัติ**เอกลักษณ์ซ้าย (left identity)** ถ้ามีสมาชิก e ใน S ซึ่งทำให้ $e*x=x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใด ๆ ใน S และจะเรียก “ e ” ว่า **เอกลักษณ์ซ้าย (left identity)**

บทตั้ง 2.3 [12] ถ้า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้ายแล้ว $x*(y*z)=y*(x*z)$ สำหรับทุกสมาชิก x,y และ z ใด ๆ ใน S

บทตั้ง 2.4 [12] ถ้า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย แล้ว
$(a*b)*(c*d)=(d*c)*(b*a)$ สำหรับทุกสมาชิก a,b,c และ d ใด ๆ ใน S

บทนิยาม 2.5 [13] กึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S,*)$ จะเรียกว่า $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป ถ้าสำหรับทุกสมาชิก x,y และ z ใน S ซึ่ง $x*(y*z)=y*(x*z)$

กำหนดให้ $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย จะเรียก $(S,*)$ ว่า **กึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ (regular left almost semigroup)** ถ้าสำหรับแต่ละสมาชิก x ใด ๆ ใน S แล้วจะมีสมาชิก a ใน S ซึ่ง $x=(x*a)*x$

ข้อสังเกต เห็นได้ชัดเจนว่า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติก็ต่อเมื่อ $x\in(x*S)*x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใด ๆ ใน S

3. ผลการวิจัย

ในหัวข้อต่อไปนี้จะแนะนำแนวความคิดของสมาชิกตัวแปรในกึ่งกรุปเกือบซ้าย นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของ $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป โดยเริ่มต้นจากการกำหนดบทนิยามของสมาชิกตัวแปรในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ดังนี้

กำหนดให้ a เป็นสมาชิกใด ๆ ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S,*)$ นิยามการดำเนินการ “ $\circ_a$ ” โดยที่

$$x \circ_a y = (x * a) * y$$

สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน S เห็นได้ชัดเจนว่า $\circ_a$ เป็นดำเนินการทวิภาคบน S จะเรียกสมาชิก a ว่า **ตัวแปร (variant)** ของ S

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $(S,*)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป แล้ว $(S,\circ_a)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป

บทพิสูจน์ เริ่มต้นจะแสดงว่า $(S,\circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย

ให้ x, y และ z เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(x \circ_a y) \circ_a z &= ((x*a)*y) \circ_a z \\
&= (((x*a)*y)*a)*z \\
&= ((a*y)*(x*a))*z \\
&= (x*((a*y)*a))*z \\
&= (z*((a*y)*a))*x \\
&= ((a*y)*(z*a))*x \\
&= (((z*a)*y)*a)*x \\
&= ((z \circ_a y)*a)*x \\
&= (z \circ_a y) \circ_a x
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(S,\circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย

ต่อไปจะแสดงว่า $(S,\circ_a)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป

กำหนดให้ x, y และ z เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} x\circ_a(y\circ_a z) &= (x*a)*(y\circ_a z) \\ &= (x*a)*((y*a)*z) \\ &= (y*a)*((x*a)*z) \\ &= (y*a)*(x\circ_a z) \\ &= y\circ_a(x\circ_a z) \end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $(S,\circ_a)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป □

บทแทรก 3.2 ถ้า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้ายแล้ว $(S,\circ_a)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป

บทพิสูจน์ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.1 □

บทแทรก 3.3 ถ้า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย แล้ว $(S,\circ_e)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย

บทพิสูจน์ กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S เนื่องจาก

$$\begin{aligned} e\circ_e x &= (e*e)*x \\ &= e*x \\ &= x \end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $(S,\circ_e)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย □

กำหนดให้ $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย
นิยามเซต $\mathcal{R}(S)$ โดยที่ $\mathcal{R}(S)=\{a\in S \mid (S,\circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ$\}$

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ $(S,*)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป ถ้า $\mathcal{R}(S)\neq\varnothing$ แล้ว $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\mathcal{R}(S)\neq\varnothing$ ดังนั้นจะมีสมาชิก a ใน S ซึ่ง $a\in\mathcal{R}(S)$
จะได้ว่า $(S,\circ_a)$เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ
กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= (x\circ_a y)\circ_a x \\ &= ((x*a)*y)\circ_a x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\left(\left(x*a\right)*y\right)*a\right)*x \\ &= \left(\left(a*y\right)*\left(x*a\right)\right)*x \\ &= \left(x*\left(\left(a*y\right)*a\right)\right)*x \in \left(x*S\right)*x \end{aligned}$$

สำหรับบางสมาชิก y ใน S

จึงสรุปได้ว่า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ □

บทแทรก 3.5 กำหนดให้ $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย

ถ้า $\mathcal{R}(S)\neq\varnothing$ แล้ว $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

บทพิสูจน์ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.4 □

ทฤษฎีบท 3.6 กำหนดให้ $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย

ถ้า $a\in\mathcal{R}(S)$ แล้ว $(S*a)*S=S$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนว่า $(S*a)*S\subseteq S$ ต่อไปจะแสดงว่า $S\subseteq(S*a)*S$

กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

เนื่องจาก $a\in\mathcal{R}(S)$ จะได้ว่า $(S,\circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

ดังนั้น จะมีสมาชิก s ใน S โดยที่ $x=(x\circ_a s)\circ_a x$ เพราะว่า

$$\begin{aligned} x &= \left(x\circ_a s\right)\circ_a x \\ &= \left(\left(x*a\right)*s\right)\circ_a x \\ &= \left(\left(\left(x*a\right)*s\right)*a\right)*x \in \left(S*a\right)*S \end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $(S*a)*S=S$ □

ทฤษฎีบท 3.7 กำหนดให้ $(S,*)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุป และ $a,b\in S$ ซึ่ง $a\in\mathcal{R}(S)$

ถ้า $a\in S*b$ แล้ว $b\in\mathcal{R}(S)$

บทพิสูจน์ จาก $a\in S*b$ จะได้ว่า จะมี $s\in S$ โดยที่ $a=s*b$

กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

เนื่องจาก $a\in\mathcal{R}(S)$ จะได้ว่า $(S,\circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

ดังนั้น จะมี $w\in S$ โดยที่ $x=(x\circ_a w)\circ_a x$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
x &= (x \circ_a w) \circ_a x \\
&= ((x*a)*w) \circ_a x \\
&= (((x*a)*w)*a)*x \\
&= (((x*a)*w)*(s*b))*x \\
&= ((b*s)*(w*(x*a)))*x \\
&= (((w*(x*a))*s)*b)*x \\
&= (((w*(((((x*a)*w)*a)*x)*a))*s)*b)*x \\
&= (((w*(((x*a)*((x*a)*w))*a))*s)*b)*x \\
&= (((w*((a*((x*a)*w))*(x*a)))*s)*b)*x \\
&= (((w*((a*((x*a)*w))*(x*(s*b))))*s)*b)*x \\
&= (((w*((a*((x*a)*w))*(s*(x*b))))*s)*b)*x \\
&= (((w*(((x*b)*s)*(((x*a)*w)*a)))*s)*b)*x \\
&= (((((x*b)*s)*(w*(((x*a)*w)*a)))*s)*b)*x \\
&= (((s*(w*(((x*a)*w)*a)))*((x*b)*s))*b)*x \\
&= (((x*b)*((s*(w*(((x*a)*w)*a)))*s))*b)*x
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x \in (((x*b)*S)*b)*x$ ทำให้ได้ว่า จะมี $z \in S$ โดยที่

$$
\begin{aligned}
x &= (((x*b)*z)*b)*x \\
&= ((x \circ_b z)*b)*x \\
&= (x \circ_b z) \circ_b x
\end{aligned}
$$

จึงได้ว่า $(S, \circ_b)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $b \in \mathcal{R}(S)$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.8 ถ้า $(S,*)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปปรกติและ $a \in S$ แล้ว เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $a \in \mathcal{R}(S)$
2. $(S*a)*b = S*b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$

บทพิสูจน์

สมมติให้ $a \in \mathcal{R}(S)$ จะได้ว่า $(S,\circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ
กำหนดให้ b เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S เห็นได้ชัดเจนว่า $(S*a)*b \subseteq S*b$
ต่อไปจะแสดงว่า $S*b \subseteq (S*a)*b$
เนื่องจาก $(S,\circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ ดังนั้น จะมี $s \in S$ โดยที่

$$\begin{aligned} b &= (b \circ_a s) \circ_a b \\ &= ((b*a)*s) \circ_a b \\ &= (((b*a)*s)*a)*b \end{aligned}$$

ต่อไปกำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S โดยที่ $x \in S*b$
จึงได้ว่าจะมี $t \in S$ โดยที่ $x = t*b$ พิจารณา

$$\begin{aligned} x &= t*b \\ &= t*((((b*a)*s)*a)*b) \\ &= (((b*a)*s)*a)*(t*b) \\ &= (b*t)*(a*((b*a)*s)) \\ &= ((a*((b*a)*s))*t)*b \\ &= ((t*((b*a)*s))*a)*b \in (S*a)*b \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $S*b \subseteq (S*a)*b$ นั่นคือ $(S*a)*b = S*b$
สมมติให้ 2 เป็นจริง กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S
โดยสมมติฐาน จะได้ว่า $(x*a)*S = x*S$ และ $(S*a)*x = S*x$
เนื่องจาก $(S,*)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปปรกติ
ดังนั้นจะมี $s \in S$ โดยที่ $x = (x*s)*x \in S*x$
จะได้ว่า $x \in (S*a)*x$ นั่นคือ จะมี $t \in S$ ซึ่ง $x = (t*a)*x$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
x &= (x*s)*x \\
&= (((t*a)*x)*s)*((t*a)*x) \\
&= ((s*x)*(t*a))*((t*a)*x) \\
&= ((a*t)*(x*s))*((t*a)*x) \\
&= (x*((a*t)*s))*((t*a)*x) \\
&= (((t*a)*x)*((a*t)*s))*x \\
&= (((t*a)*(a*t))*(x*s))*x \\
&= ((a*((t*a)*t))*(x*s))*x \\
&= (((x*s)*((t*a)*t))*a)*x \\
&= (((t*a)*((x*s)*t))*a)*x \\
&= (((t*a)*((t*s)*x))*a)*x \\
&= (((t*s)*((t*a)*x))*a)*x \\
&= (((t*s)*((x*a)*t))*a)*x \\
&= (((x*a)*((t*s)*t))*a)*x \in (((x*a)*S)*a)*x
\end{aligned}
$$

จึงได้ว่า จะมี $w \in S$ โดยที่

$$
\begin{aligned}
x &= (((x*a)*w)*a)*x \\
&= ((x \circ_a w)*a)*x \\
&= (x \circ_a w) \circ_a x
\end{aligned}
$$

ทำให้ได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $a \in \mathcal{R}(S)$ □

เอกสารอ้างอิง

[1] Abdullah, S., Aslam, S. and Amin, N. (2014). LA-semigroup characterized by the properties of interval valued (α, β)-fuzzy ideal. *J. Appl. Math. & Informatics,* 32 (3-4), p. 405 - 426.

[2] Aslam, M., Abdullah, S. and Masoo, M. (2012). Bipolar fuzzy Ideals in LA-semigroups. *World Applied Sciences* Journal, 17 (12), p. 1769 - 1782.

[3] Boinovic, M., Protic, P.V. and Stevanovic, N. (2008). Kernel normal system of inverse AG**-groupoids. *Quasigroups and Related Systems*, 17, p. 1 – 8.

[4] Chinram, R. and Yonthanthum, W. (2019). On the regularity-preserving elements in regular ordered semigroups. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 14 (3), p. 729 – 736.

[5] Dudek, W.A. and Gigon, R.S. (2013). Completely inverse AG**-groupoids. *Semigroup Forum*, 87, p. 201 – 229.

[6] Faisal, Yaqoob, N. and Saeid, A.B. (2012). Some results in bipolar-valued fuzzy ordered AG-groupoids. *Discussiones Mathematica General Algebra and Applications*, 32, p. 55 – 76.

[7] Kazim, M. A. and Naseerudin, M. (1972). On almost-semigroup. *Aligarh Bull. Math.*, 2, p. 1 - 7.

[8] Khan, A., Faisal, Khan, W. and Yaqoob, N. (2013). Ordered LA-semigroups in terms of interval valued fuzzy ideals. *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, 5 (1), p. 100 – 117.

[9] Khan, M., Shum, K.P. and Iqbal, M.F. (2014). On minimal ideals of AG**-groupoids. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 38, 389 - 399.

[10] Khan, W., Yousafzai, F. and Hila, K. (2018). Congruences and decompositions of AG**-groupoids. *Miskolc Mathematical Notes*, 19 (2), p. 931 - 944.

[11] Khan, W., Yousafzai, F. and Khan, M. (2016). On generalized ideals of left almost semigroups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9 (3), p. 277 - 291.

[12] Mushtaq, Q. and Yusuf, S.M. (1979). On locally associative LA-semigroups. *J. Nat. Sci. Math.*, 19, p. 57 - 62.

[13] Protic, P.V. and Boinovic, M. (1995). S ome congruences on an AG**-groupoid. *Filomat*, 9, p. 879 - 886.

[14] Yaqoob, N. (2012). Bipolar-valued fuzzy ideals in LA-semigroups. *Journal of Advanced Studies in Topology*, 3 (1), p. 60 - 71.

[15] Yaqoob, N. (2013). Interval valued intuitionistic fuzzy ideals of regular LA-semigroups. *Thai Journal of Mathematics*, 11 (3), p. 683 – 695.

[16] Yaqoob, N., Chinram, R. and Ghareeb, A. (2013). Left almost semigroups characterized by their interval valued fuzzy ideals. *Afr. Mat.,* 24, p. 231 - 245.