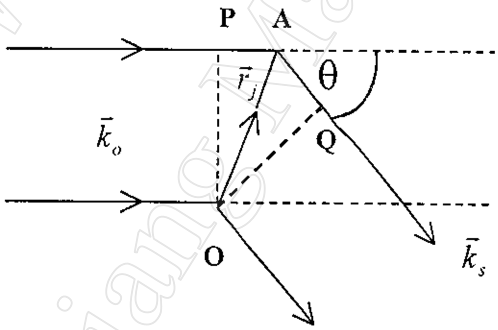
บทที่ 2
ทฤษฎี

2.1 การกระเจิงของแสง

การกระเจิงของแสงเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแสงกับอนุภาค หรือในโมเลกุลที่แสงเคลื่อนที่ผ่าน มีการถ่ายเทพลังงานเกิดขึ้นในการกระเจิง โดยที่โฟตอนแสงจะถ่ายเทพลังงานทั้งหมดหรือเพียงบางส่วนให้กับอนุภาคในตัวกลาง ถ้าค่าพลังงานการถ่ายเทมีค่าน้อยการกระเจิงในลักษณะนี้เรียกว่า การกระเจิงแบบเรเล่ย์ (Rayleigh Scattering)

เมื่อให้ลำแสงขนาน(คลื่นระนาบ)ตกกระทบอนุภาคหรือตัวกระเจิงในตัวกลางและเกิดการกระเจิงของแสง [7,8] ลำแสงกระเจิงทำมุม θ กับลำแสงเดิม ลำแสงที่กระเจิงจากอนุภาค ณ ตำแหน่งใด ๆ ในบริเวณกระเจิงจะมีค่าเฟสของคลื่นที่แตกต่างกัน ค่าเฟส ϕ จะหาได้จากความสัมพันธ์ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงรูปเรขาคณิตที่ใช้ในการคำนวณค่าเฟส ϕ

ลำแสงตกกระทบมีค่าเวคเตอร์คลื่น $\vec{k}_o$ กระเจิงจากอนุภาค j ที่จุด A ซึ่งอยู่ ณ ตำแหน่ง $\vec{r}_j$ เทียบกับจุดกำเนิด Oในตัวกลางที่มีค่าดัชนีหักเหแสง n แสงที่กระเจิงในทิศทางทำมุม θ กับแสงเดิมมีค่าเวคเตอร์คลื่น $\vec{k}_s$ ให้คลื่นกระเจิง ณ จุด O มีค่าเฟส $\phi = 0$ คลื่นกระเจิง ณ ตำแหน่ง $\vec{r}_j$ มีค่าเฟส ϕ_j

จากรูป $$\phi_j = (PA + AQ) \cdot \frac{2n\pi}{\lambda_o}$$

$$= \vec{k}_o \cdot \vec{r}_j - \vec{k}_s \cdot \vec{r}_j$$

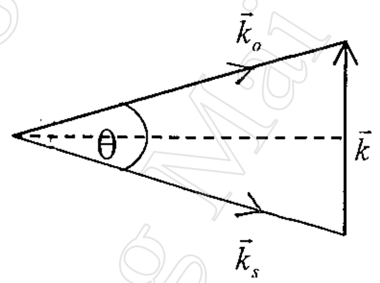
$$= (\vec{k}_o - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}_j$$

$$= \vec{k} \cdot \vec{r}_j \qquad (2.1)$$

เมื่อ $\vec{k} = \vec{k}_o - \vec{k}_s$ คือ เวคเตอร์การกระเจิง (Scattering Vector)

λ_o คือ ค่าความยาวคลื่นแสงในสุญญากาศ

ในกรณีการกระเจิงแบบเรเล่ย์ $|\vec{k}_o| \approx |\vec{k}_s|$ ดังนั้น ขนาดของ $\vec{k}$ หาได้จากรูปทรงเรขาคณิต ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงรูปเรขาคณิตเพื่อหาขนาดของ $\vec{k}$

$$|\vec{k}| = 2|\vec{k}_o| \sin(\theta/2)$$

$$= (4\pi n/\lambda_0) \sin(\theta/2) \qquad (2.2)$$

ในการทดลอง ให้แสงเลเซอร์ ซึ่งเป็นคลื่นระนาบและมีความยาวคลื่นเพียงค่าเดียวตกกระทบบนตัวกระเจิงจำนวน N ตัว การกระเจิงเป็นแบบยืดหยุ่น วัดลำแสงกระเจิงในทิศทางทำมุม θ กับแนวลำแสงเดิม ณ ตำแหน่ง R_o จากจุดกำเนิด O ในบริเวณกระเจิง

สมการทั่วไปของคลื่นระนาบ คือ

$$\vec{E}_o(t) = \vec{A}\exp[i(\vec{k}.\vec{r} - \omega_o t)] \qquad (2.3)$$

$\vec{A}$ คือ อัมปริจูดของคลื่นตกกระทบ

พิจารณาคลื่นกระเจิงผลลัพธ์ $\vec{E}_s$ ณ ตำแหน่ง $\vec{R}_o$ เมื่อเวลา t ใด ๆ สมมุติว่าคลื่นที่กระเจิงแต่ละตัวกระเจิง เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างสนามของคลื่นตกกระทบกับตัวกระเจิงแต่ละตัวเท่านั้น ไม่มี multiple scattering เกิดขึ้น ด้วยข้อสมมุติที่ว่านี้ $\vec{E}_s(t)$ เขียนได้ในเทอมผลรวมของคลื่นกระเจิงทั้งหมด

$$\vec{E}_s(t) = \sum_{J=1}^{N} \vec{E}_j(t) = \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j(t) \; e^{i(\phi_j - \omega_o t)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j(t)\, e^{i[\vec{k}.\vec{r}_j(t) - \omega_o t]} \qquad (2.4)$$

$\vec{A}_j$ คือ อัมปริจูดของคลื่นที่กระเจิงจากอนุภาค j ณ ตำแหน่ง $\vec{r}_j$

$\vec{k}$ คือ ค่าเวคเตอร์การกระเจิง โดย $|\vec{k}| = (4n\pi/\lambda_o)\sin(\theta/2)$

$\vec{r}_j$ คือ ตำแหน่งของอนุภาค j ที่จุดกำเนิด O

ω_o คือ ความถี่เชิงมุมของคลื่นแสงตกกระทบ

ฟังก์ชันความสัมพันธ์เชิงเดี่ยว (Autocorrelation Function) ของสนามไฟฟ้ากระเจิง นิยามดังนี้

$$G_s^{(1)}(\tau) = \left\langle E_s^*(t) E_s(t+\tau) \right\rangle \qquad (2.5)$$

เมื่อ τ คือ เวลาหน่วง (delayed time)

ใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ 2.4 เขียนเทอม $G_s^{(1)}(\tau)$ ใหม่

$$
\begin{aligned}
G_s^{(1)}(\tau) &= \; < \; \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j e^{-i[\vec{k}.\vec{r}_j(t)-\omega_o t]} \sum_{k=1}^{N} \vec{A}_k e^{i[\vec{k}.\vec{r}_i(t+\tau)-\omega_o(t+\tau)]} \; > \\
&= \; < \; \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j \; \sum_{k=1}^{N} \vec{A}_k e^{i\vec{k}.[\vec{r}_i(t+\tau)-\vec{r}_j\,(t)]} \; > \; e^{-i\omega_o t} \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

ในกรณีที่ตำแหน่งต่างๆ ของตัวกระเจิงไม่มีความสัมพันธ์ต่อกัน และขนาดของ $\vec{A}_j$ มีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา เมื่อ $j \neq k$ ค่าผลรวมของผลคูณมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$
G_s^{(1)}(\tau) = N\left|\vec{A}^2\right| \; < e^{i\vec{k}.[\vec{r}(t+\tau)-\vec{r}(t)]} > e^{-i\omega_o t} \qquad (2.7)
$$

$G_s^{(1)}(\tau)$ มีค่าเป็น N เท่าของฟังก์ชันความสัมพันธ์เชิงเดี่ยวของสนามไฟฟ้าของตัวกระเจิงแต่ละตัว ค่าเฉลี่ยในสมการที่ 2.7 เขียนแทนได้ด้วย

$$
\begin{aligned}
< e^{i\vec{k}.[\vec{r}(t+\tau)-\vec{r}(t)]} > &= \int G_s(R,\tau) e^{i\vec{k}.\vec{R}} d^3R \\
&= G_s(k,\tau) \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $G_s(R,\tau)$ คือเงื่อนไขความเป็นไปได้ร่วม (Joint Probability) ที่จะพบอนุภาคหรือตัวกระเจิง ณ ตำแหน่ง $\vec{R}$ ณ เวลา $t + \tau$ ในขณะที่เมื่อเวลา t อนุภาคอยู่ที่จุดกำเนิด O $G_s(k,\tau)$ คือ ค่าที่ได้จากการแปรรูปแบบฟูเรียร์ (Fourier Transform) ของ $G_s(R,\tau)$

สำหรับโมเลกุลที่มีการแพร่กระจาย อย่างอิสระ $G_s(R,\tau)$ จะเป็นไปตามสมการของการแพร่กระจาย[9] ดังนี้

$$
\frac{\partial}{\partial t} G_s(R,\tau) = \mathrm{D}\nabla^2 G_s(R,\tau) \qquad (2.9)
$$

เมื่อ D คือ ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจายของการเคลื่อนที่ (Translational Diffusion Coefficient) ของโมเลกุล การหาผลลัพธ์ของสมการที่ 2.9 ทำโดยการแยก $G_s(R,\tau)$ ออกเป็น 2 เทอม เทอมหนึ่งขึ้นกับค่าตำแหน่งและอีกเทอมหนึ่งขึ้นกับเวลา จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$G_s(R,\tau) = (4\pi D\tau)^{-3/2} \exp(-R^2/4D\tau) \qquad (2.10)$$

จากการแปรรูปแบบฟูเรียร์ของ

$$f(r) = A_f e^{-a^2 r^2}$$

ได้ผลลัพธ์เป็น

$$F(k) = \frac{(A_f \pi^{3/2})}{a^3} e^{-k^2/4a^2}$$

ดังนั้น

$$G_s(k,\tau) = e^{-Dk^2\tau} \qquad (2.11)$$

ใช้ความสัมพันธ์สมการที่ 2.7 และ 2.8

$$G_s^{(1)}(\tau) = N\left|\vec{A}\right|^2 e^{-Dk^2\tau} e^{-i\omega_0\tau} \qquad (2.12)$$

เมื่อนอร์มอลไลซ์ (normalized) ฟังก์ชันความสัมพันธ์เชิงเดี่ยว $G_s^{(1)}(\tau)$ จะได้

$$g_s^{(1)}(\tau) = \frac{\left\langle E_s^*(t)E_s(t+\tau)\right\rangle}{\left\langle E_s^*(t)E_s(t)\right\rangle} \qquad (2.13)$$

จากทฤษฎีของ Wienner – Khintchine ค่าสเปคตรัมอัมปลิจูดแสงกระเจิง I(ω_s) เป็นการแปรรูปฟูเรียร์ของ $G_s^{(1)}(\tau)$ นั่นคือ

$$I(\omega_s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_s(\tau)\exp(j\omega_s\tau)d\tau \qquad (2.14)$$

ในทางปฏิบัติค่าสนามไฟฟ้าไม่สามารถวัดได้โดยตรงจากการวัดความเข้มแสงกระเจิงโดยใช้หลอดโฟโตมัลติพลายเออร์ (Photomultiplier Tube หรือ PMT) ดังนั้นจึงนิยามความสัมพันธ์เชิงเดี่ยวลำดับที่ 2

$$G_s^{(2)}(\tau) = \langle I(t)I(t+\tau)\rangle \qquad (2.15)$$

เมื่อนิยามในเทอมของสนามไฟฟ้า

$$G_s^{(2)}(\tau) = \langle E_s^*(t)E_s(t)E_s^*(t+\tau)E_s(t+\tau)\rangle \qquad (2.16)$$

และนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชัน

$$g_s^{(2)}(\tau) = \langle E_s^*(t)E_s(t)E_s^*(t+\tau)E_s(t+\tau)\rangle / \langle I\rangle^2 \qquad (2.17)$$

กรณีที่ปริมาณความเข้มของแสงกระเจิงมีความสัมพันธ์อย่างอิสระแบบเกาเซียน (Gaussian Distribution) ความสัมพันธ์ของ $g^{(1)}(\tau)$ และ $g^{(2)}(\tau)$ เป็นไปตามความสัมพันธ์ของซีเกิร์ท (Siegert Relation)

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \left|g^{(1)}(\tau)\right|^2 \qquad (2.18)$$

เขียนในเทอมของค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย D ได้

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2DK^2\tau} \qquad (2.19)$$

2.2 การสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์ของโฟตอน

ในการทดลองจะวัดค่าฟังก์ชันความสัมพันธ์ของความเข้ม $G^{(2)}(\tau)$ โดยใช้เครื่องมือสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์ของโฟตอน (Digital Correlator) จากเครื่องมือสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์ของโฟตอน

$$G^{(2)}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n(iT)n(iT+\tau) \qquad (2.20)$$

$n(iT)$ คือ จำนวนโฟตอนที่นับได้เมื่อเวลา t = iT

$n(iT+\tau)$ คือ จำนวนโฟตอนที่นับได้เมื่อเวลา $t+\tau$

T คือ ช่วงเวลาที่เก็บข้อมูลแต่ละครั้ง

N คือ จำนวนการทดลองทั้งหมด

เนื่องจากขบวนการสร้างฟังชันความสัมพันธ์เชิงเดี่ยวเป็นขบวนการแบบคงที่(Stationary Process) ค่าเฉลี่ยของการประมาณ คือ

$$G^{(2)}(\tau) = \langle n(0)n(\tau)\rangle \qquad (2.21)$$

ในกรณีที่ $\tau = \infty$

$$G^{(2)}(\tau) = \bar{n}^2 \qquad (2.22)$$

$\bar{n}$ คือ ค่าเฉลี่ยของจำนวนโฟตอนในช่วงเวลา T นอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันความสัมพันธ์ $g^{(2)}(\tau)$ คือ

$$g^{(2)}(\tau) = \langle n(0)n(\tau)\rangle / \bar{n}^2 \qquad (2.23)$$

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \left|g^{(1)}(\tau)\right|^2$$

หรือ

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + A\, e^{-2DK^2\tau} \qquad (2.24)$$

A คือ ค่าคงที่ที่เหมาะสม

จากฟังก์ชันในสมการที่ 2.24 นำข้อมูลไปวิเคราะห์หาค่า D ได้

การทดลองนี้ใช้ชุดเครื่องมือสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์ของโฟตอนที่มีขั้นตอนการทำงานกล่าวโดยสังเขปดังนี้

สัญญาณจากหัววัด PMT จะถูกขยายโดยวงจรขยายสัญญาณ (Amplifier) แล้วส่งสัญญาณไปยังวงจร กลั่นกรองแยกสัญญาณรบกวนออกไปแล้ว สัญญาณนี้จะถูกส่งไปยังวงจรที่ทำหน้าที่ปรับปรุงรูปร่างของสัญญาณ เข้าสู่วงจรตรวจนับสัญญาณ ตรวจนับจำนวนโฟตอนและส่งไปยังหน่วยสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์ ซึ่งมีขั้นตอนการทำงานดังนี้

1.บันทึกข้อมูล (Register)

1.1 บันทึกข้อมูลในอดีต (delayed register)

1.2 บันทึกข้อมูลในปัจจุบัน (undelayed register)

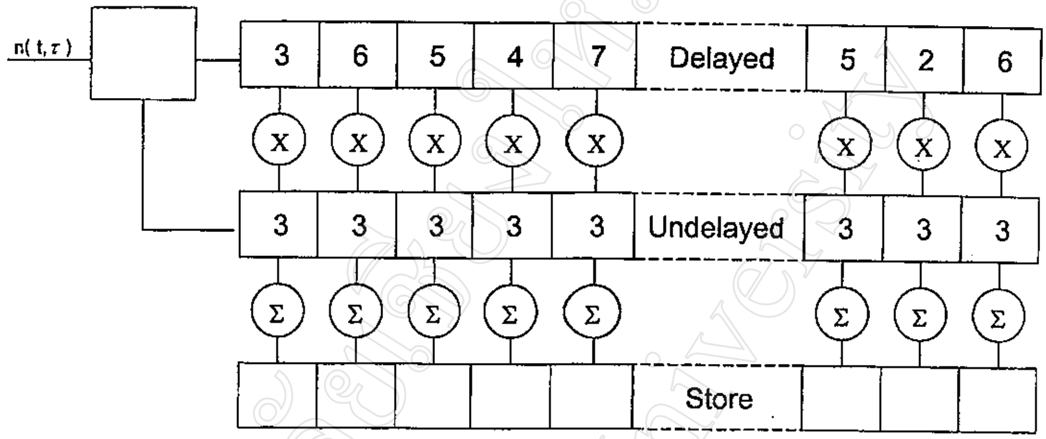
2. การคำนวณ

2.1 เก็บผลลัพธ์การคำนวณ

การสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์ของโฟตอนมี 2 รูปแบบ คือ การสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์แบบสมบูรณ์ (Full Correlation) และการสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์แบบกำหนดค่า (Clipped Correlation) โดยการทดลองนี้จะกล่าวเฉพาะการสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์แบบสมบูรณ์

การสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์แบบสมบูรณ์ แสดงแผนผังการทำงานในรูปที่ 2.3 โดยจำนวนโฟตอนที่นับได้ในช่วงเวลา T (ในที่นี้คือ 3) จะปรากฏในทุกหน่วยที่บันทึกข้อมูลในปัจจุบัน และในหน่วยแรกที่บันทึกข้อมูลในอดีต (สำหรับหน่วยถัดไปที่บันทึกข้อมูลในอดีตจะเป็นจำนวนโฟตอนที่นับได้ในช่วง iT ก่อนหน้านั้น) เมื่อช่วงเวลา T สิ้นสุดลง จะมีการคูณและการบวกพร้อมทั้งการเก็บผลลัพธ์สะสมไว้ในหน่วยเก็บแต่ละหน่วย ในขณะเดียวกันก็จะเลื่อนจำนวนนับที่บันทึกในส่วนของข้อมูลในอดีตไปบันทึกในหน่วยที่อยู่ถัดไป ช่วงเวลาต่อมาจำนวนโฟตอนจะปรากฏในทุกหน่วย ที่บันทึกข้อมูลในปัจจุบัน

และในหน่วยแรกที่บันทึกข้อมูลในอดีต การคำนวณ การเก็บผลลัพธ์ และการเลื่อนข้อมูลในอดีตจะเกิดขึ้นอีกครั้งหนึ่ง ฉะนั้นในแต่ละหน่วยเก็บจะให้ค่า $n(iT)\,n(iT+\tau)$ สะสมไว้



รูปที่ 2.3 แสดงการสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์แบบสมบูรณ์