



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการสัมพรรคภาพไม่เชิงเส้นจากสนามความหนาแน่นนอนเอกาเซียนมหาภาค

โดย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธีรภาพ ฉันทวัฒน์

กรกฎาคม พ.ศ. 2561

สัญญาเลขที่ MRG5580126

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการสัมพรรคภาพไม่เชิงเส้นจากสนามความหนาแน่นนอนเกาเซียนมหาภาค

ผู้วิจัย สังกัด มหาวิทยาลัยนเรศวร

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย และต้นสังกัด

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย

สกว.และต้นสังกัดไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

กิตติกรรมประกาศ

ผู้ทำวิจัยขอขอบคุณเพื่อนร่วมงาน อาจารย์ นักวิจัย ทั้งในและต่างประเทศที่ให้คำแนะนำ ตลอดจนเจ้าหน้าที่ที่วิทยาลัย เพื่อการค้นคว้าระดับรากฐานที่ช่วยสนับสนุนในการทำวิจัยนี้ นอกจากนี้ ผู้ทำวิจัยขอแสดงความขอบคุณอย่างสูงต่อ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา และ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่ให้เงินทุนสนับสนุนในการทำวิจัยนี้

Project Code: MRG5580126
Project Title: Non-linear Correlations from Large-scale non-Gaussianity Density Fields
Investigator: Asst. Prof. Teeraparb Chantavat
The Institute for Fundamental Study, Naresuan University
E-mail Address: teeraparbc@nu.ac.th
Project Period: 2 years + 4 years

Abstract

In this project, we study the third-order Lagrange perturbation theory and found that there are different growth functions for each perturbative order. There are essentially one growth function for first and second order of perturbation. There are three growth functions in the third order of perturbation; however, only two of them independently involve in the growth of non-linear structure. The second and third order of perturbation could be approximately written in terms of the first-order growth function with only 1% variation. This approximation is commonly known in literature as the Einstein-de Sitter approximation.

The calculation of non-linear power spectra with Lagrange perturbation theory show that the variation of the Einstein de-Sitter approximation in the power spectrum could be as high as 10%. This variation is significance and cannot be ignored with the capabilities of the next generation surveys.

The growth functions depends on the amount of matter and energy in the universe. Hence, the growth functions can be used to measure the matter and energy parameters especially the dark energy sector. In addition, the growth functions could be used to distinguish between to models of dark energy; namely, the cosmological constant and the dynamical dark energy, via galaxy redshift surveys. The parameter constraints from redshift survey when combined with the constraints from Planck's CMB will give better and tighter constraints.

Keywords: cosmology, cosmological perturbation theory, dark energy, Lagrange perturbation theory, large-scale structure

รหัสโครงการ: MRG5580126
ชื่อโครงการ: โครงการสัมมนาภาพไม่เชิงเส้นจากสนามความหนาแน่นนอนเอกเซียนมหาภาค
ชื่อนักวิจัย: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อธิภาภ ฉันทวัฒน์
วิทยาลัยเพื่อการค้นคว้าระดับรากฐาน, มหาวิทยาลัยนเรศวร
E-mail Address: teeraparbc@nu.ac.th
ระยะเวลาโครงการ: 2 ปี + 4 ปี

บทคัดย่อ

การจากศึกษาทฤษฎีการรบกวนแบบลากรางจ์ (Lagrange perturbation theory) เราพบว่าฟังก์ชันการเติบโต (growth functions) ของความหนาแน่นในเอกภพมีหลายฟังก์ชันโดยแต่ละฟังก์ชันการเติบโตจะขึ้นการลำดับในการรบกวน ในงานวิจัยนี้ผู้ทำวิจัยได้ศึกษาการรบกวนถึงลำดับที่สาม พบว่าในลำดับที่หนึ่ง และสองมีฟังก์ชันการเติบโตลำดับละหนึ่งฟังก์ชัน ส่วนลำดับที่สามมีฟังก์ชันการเติบโตสามฟังก์ชัน แต่ทว่ามีผลต่อค่าการสำรวจเพียงแค่สองฟังก์ชันเท่านั้น ทั้งนี้ฟังก์ชันการเติบโตในลำดับที่สอง และลำดับที่สามสามารถเขียนในรูปประมาณของฟังก์ชันการเติบโตลำดับที่หนึ่งได้โดยมีการความคลาดเคลื่อนอยู่ที่ประมาณ 1% จากค่าที่แท้จริง ดังนั้นนักวิจัยจึงนิยมการใช้ค่าประมาณนี้ที่เรียกว่า การประมาณแบบ Einstein-de Sitter

เมื่อเราคำนวณค่าสเปกตรัมกำลังโดยใช้การรบกวนแบบลากรางจ์พบว่าความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นสูงได้ถึง 10% ซึ่งมีนัยยะสำคัญในการแปลผลการสำรวจ ประกอบกับเทคโนโลยีการสำรวจที่สามารถให้ค่าได้อย่างแม่นยำทำให้เราไม่สามารถที่จะใช้การประมาณแบบ Einstein-de Sitter ได้อีก

ฟังก์ชันการเติบโตแปรค่าตามองค์ประกอบสสาร และพลังงาน ดังนั้นฟังก์ชันการเติบโตจึงเป็นฟังก์ชันที่เหมาะสมในการวัดค่าความหนาแน่นสสาร และพลังงานมืด ในกรณีของพลังงานมืด เราสามารถใช้ฟังก์ชันการเติบโตในการแยกความต่างแตกต่างระหว่างค่าคงที่จักรวาลวิทยา (cosmological parameter) และ พลังงานมืดแบบพลวัต (dynamical dark energy) จากการสำรวจดาราจักรที่ค่าเรดชิฟต์ต่าง ๆ พบว่า ค่าจำกัดพารามิเตอร์ (parameter constraint) ที่ได้จากการสำรวจดาราจักรเมื่อนำมารวมกับค่าจำกัดพารามิเตอร์จากพลังค์จะให้ค่าที่ดีขึ้นกว่าเดิม

คำหลัก: จักรวาลวิทยา ทฤษฎีการ รบกวนในจักรวาลวิทยา พลังงานมืด ทฤษฎีการรบกวนแบบลากรางจ์ โครงสร้างขนาดใหญ่

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	I
Abstract	II
บทคัดย่อ	III
1 บทนำ	1
2 วัตถุประสงค์	3
3 วิธีการศึกษา	3
3.1 ปัญหาและอุปสรรค	3
3.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	3
3.2.1 ทฤษฎีการเกิดโครงสร้าง (Structure Formation Theory)	3
3.2.2 ทฤษฎีการรบกวนมาตรฐาน (Standard Perturbation Theory)	4
3.2.3 ทฤษฎีการรบกวนแบบลากรางจ์ (Lagrange Perturbation Theory)	7
3.2.4 สเปกตรัมกำลังในปริภูมิจริง (Real-space Power Spectrum)	8
3.2.5 สเปกตรัมกำลังในปริภูมิเรดชิฟท์ (Redshift-space Power Spectrum)	10
4 วิธีการวิเคราะห์ข้อมูล	11
4.1 แบบจำลองพลังงานมืดแบบพลวัต	11
4.2 แบบจำลองค่าไบแอสของดาราจักร	12
4.3 แบบจำลองโครงการสำรวจดาราจักร	12
4.4 การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนโดยเมทริกซ์ฟิชเชอร์	13
5 ผลการศึกษา	15
6 สรุปผลการศึกษา	19
เอกสารอ้างอิง	21
Output ที่ได้	27
ภาคผนวก	28
เอกสารแนบ 1 ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์	29
เอกสารแนบ 2 ผลงานวิจัยที่กำลังอยู่ในระหว่างการพิจารณาตีพิมพ์	48
เอกสารแนบ 3 รายงานสรุปการเงิน	48

รายงานฉบับสมบูรณ์

1 บทนำ

ทฤษฎีแรงโน้มถ่วงเป็นทฤษฎีที่สำคัญในการศึกษาโครงสร้างของเอกภพมหภาค (large-scale structure of the universe) [1, 2] ในสเกลระดับใหญ่นั้นการศึกษาโครงสร้างของเอกภพสามารถศึกษาได้โดยใช้ทฤษฎีการรบกวนเชิงเส้น (linear perturbation theory) [3] ซึ่งผลที่ได้ของทฤษฎีนี้สามารถอธิบายลักษณะเชิงโครงสร้างของเอกภพโดยรวมได้ดีในระดับสเกลมากกว่า 1 กิกะพาร์เซก (~ 1 Gpc) ขึ้นไป แต่ทั้งนี้เมื่อเราต้องการที่จะศึกษาโครงสร้างของเอกภพในระดับสเกลที่เล็กลงไปในระดับเมกะพาร์เซก (~ 1 Mpc) นั้นความถูกต้องของทฤษฎีการรบกวนเชิงเส้นลดลง เนื่องจากความไม่เชิงเส้นของแรงโน้มถ่วงเริ่มมีอิทธิพลมากขึ้นในสเกลที่เล็ก วิธีการศึกษาโครงสร้างของเอกภพในสเกลระดับนี้มีอยู่หลากหลายวิธี ได้แก่ การใช้วิธีแบบเชิงกึ่งวิเคราะห์ (semi-analytical methods) [4, 5] หรือการสร้างแบบจำลองคอมพิวเตอร์ระบบอนุภาคเอ็นตัว (N-body simulations) [6]

ข้อมูลการสังเกตการณ์เชิงจักรวาล เช่นการสำรวจข้อมูลของซูเปอร์โนวาชนิดหนึ่งเอ (Type Ia Supernova) [7–9] การสำรวจรังสีไมโครเวฟพื้นหลังเอกภพ (Cosmic Microwave Background – CMB) [10–13] หรือ การสำรวจ Baryonic Acoustic Oscillations (BAOs) [14] และ การวัดค่าฮับเบิลพารามิเตอร์ [15] ได้ข้อสรุปพื้นฐานที่แสดงให้เห็นว่าเอกภพมีการขยายตัวด้วยความเร่ง การขยายตัวของเอกภพด้วยความเร่งไม่สามารถอธิบายได้โดยทฤษฎีสสารทั่วไป แต่สามารถอธิบายได้ด้วยสิ่งที่เรียกว่า พลังงานมืด (dark energy) ซึ่งหนึ่งในทฤษฎีที่ว่าด้วยเรื่องของพลังงานมืดที่ย่างที่สุด คือ ทฤษฎีค่าคงตัวจักรวาลวิทยา (cosmological constant) [16] การที่ทฤษฎีค่าคงตัวจักรวาลวิทยาสามารถนำไปใช้อธิบายปรากฏการณ์การขยายตัวของเอกภพแต่ก็ก่อให้เกิดปัญหาการปรับละเอียด (fine-tuning problem) [17, 18] นอกเหนือไปจากค่าคงตัวทางจักรวาลวิทยาแล้ว ถึงทฤษฎีหนึ่งที่สามารถอธิบายได้ คือ พลังงานมืดแบบพลวัต (dynamical dark energy) โดยการกำหนดให้สมการสถานะ (equation of state) เท่ากับ $P = w\rho c^2$ โดยที่ P แทน ความดัน ρ แทน ความหนาแน่น c แทน ค่าความเร็วแสงในสุญญากาศ และ w แทน พารามิเตอร์สมการสถานะ (equation of state parameter) ค่า w ที่เหมาะสมที่ทำให้เอกภพขยายตัวด้วยความเร่งอยู่ในช่วง $w \leq -\frac{1}{3}$ ในขณะที่ ค่าของ w ที่เป็นไปได้เมื่อพิจารณาพลังงานอยู่ในช่วง $w \geq -1$ กระนั้นก็ตามค่า w ที่สำรวจได้มีค่าใกล้เคียงกับ -1 [13] ซึ่งเป็นค่าเดียวกับกับค่า w ของค่าคงตัวทางจักรวาลวิทยา ดังนั้นการแยกความแตกต่างระหว่างค่าคงตัวทางจักรวาลวิทยาและพลังงานมืดแบบพลวัตจึงเป็นปัญหาที่ท้าทายสำหรับนักฟิสิกส์ การสำรวจดาราจักรในหลายเรดชิฟท์สามารถที่จะจำกัดค่าของพารามิเตอร์ทางจักรวาลวิทยาได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับพลังงานมืด เนื่องจากค่าที่สำรวจได้จะอยู่ในปริภูมิเรดชิฟท์ (redshift space) เราจึงพบกับปัญหาการบิดเบี้ยวในปริภูมิเรดชิฟท์ (redshift-space distortion) การบิดเบี้ยวในปริภูมิเรดชิฟท์ที่มีการตอบสนองที่ไวต่อการเปลี่ยนแปลงฟังก์ชันการเติบโตซึ่งขึ้นกับค่าพารามิเตอร์สมการสถานะ w ดังนั้นการสร้างแบบจำลองทางทฤษฎีของการบิดเบี้ยวในปริภูมิเรดชิฟท์จึงมีความสำคัญในการศึกษาพลังงานมืดแบบพลวัต

การสำรวจยังผลที่สำคัญในการศึกษาโครงสร้างไม่เชิงเส้นในเอกภพ ได้แก่ BAOs ซึ่งเป็นคลื่นเสียงของเอกภพในยุคเริ่มต้นที่เคลื่อนที่ผ่านโปรตอนและแบริออนในสภาพพลาสมา [13] ยังคงร่องรอยหลงเหลืออยู่ในการสำรวจดาราจักรในรูปของคลื่นในสเปกตรัมกำลัง (power spectrum) ใน BAOs สเกลของคลื่นในสเปกตรัมกำลังจะสอดคล้องกับสเกลขอบเสียง (sound horizon scale) BAO สามารถหาได้จากการคำนวณค่าสัมพรรคภาพสองจุด (two-point correlation function) และค่าสเปกตรัมกำลังในปริภูมิเรดชิฟท์ [1, 14, 19–23] ค่าสัมพรรคภาพสองจุดเป็นค่าที่ยังผลที่ใช้ได้ดีสำหรับการศึกษาพารามิเตอร์สมการสถานะที่แปรตามเวลา ซึ่งสามารถเติมเต็มส่วนที่ขาดไปจากการวัดค่ารังสีไมโครเวฟพื้นหลังได้เป็นอย่างดี

ในปัจจุบันและอนาคตในใกล้นี้จะมีเครื่องมือ และโครงการการสำรวจดาราศาสตร์ที่สำคัญเกิดขึ้นมากมายที่มีศักยภาพในการสำรวจดาราศาสตร์ที่ครอบคลุมพื้นที่ท้องฟ้าได้กว้าง และลึกมากกว่าเดิม ได้แก่ Dark Energy Survey (DES)¹ [24], Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS)², Euclid³, Large Synoptic Survey Telescope (LSST)⁴ [25], Square Kilometre Array (SKA)⁵, Wide-Field InfraRed Survey Telescope (WFIRST)⁶ [26] โครงการสำรวจเหล่านี้จะช่วยให้เราเข้าใจโครงสร้างระดับมหภาคของเอกภพมากขึ้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งโครงสร้างในสเกลที่ไม่เชิงเส้น ดังนั้นการศึกษาเชิงทฤษฎีเพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างไม่เชิงเส้นจึงมีความสำคัญอย่างยิ่งในการแปรผลข้อมูลที่ได้จากการสำรวจ โครงการสำรวจที่จะเกิดขึ้นในอนาคตเหล่านี้มีความสำคัญเนื่องจากศักยภาพที่จะสำรวจดารจักร และเทหวัตถุที่ค่าเรดชิฟท์ $z \geq 3$ ซึ่งเป็นระยะห่างที่ดีพอในการสำรวจ BAOs ในสเกลระดับ ~ 150 Mpc แม้แต่ในค่าเรดชิฟท์ต่ำก็ใกล้เคียงที่จะสำรวจ BAOs ได้เช่นกัน

แบบจำลองเชิงวิเคราะห์ของโครงสร้างมหภาคของเอกภพที่ไม่เชิงเส้นมีศักยภาพที่จะให้ช่วยให้ผลตอบแทนที่ได้จากโครงการสำรวจมีความคุ้มค่าโดยการเปรียบเทียบผลการสำรวจที่ได้จากค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ หนึ่งในวิธีการสร้างแบบจำลองที่เป็นที่นิยม คือการรบกวนโหมดที่เข้าสู่สเกลไม่เชิงเส้น และเปรียบเทียบแบบจำลองทางทฤษฎีกับแบบจำลองคอมพิวเตอร์ระบบอนุภาคเอนตัว วิธีนี้สามารถให้เราเข้าใจลักษณะของพลังงานมืดได้เป็นอย่างดี วิธีการรบกวนที่เป็นที่นิยมหลัก ๆ มีสองทฤษฎี คือ ทฤษฎีการรบกวนมาตรฐาน (standard perturbation theory – SPT) [27–29] และ ทฤษฎีการรบกวนแบบลากรางจ์ (Lagrange perturbation theory – LPT) [30–32] สำหรับบทความปริทัศน์สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [33]

SPT ใช้ตัวแปรเชิงเส้นสองตัว ได้แก่ สนามความหนาแน่นเกินของสสาร (matter overdensity field), δ , และ สนามการแผ่ความเร็ว (divergence of the velocity field), \mathbf{v} , แต่กระนั้นก็ตามในสเกลของ BAOs SPT ไม่ได้ให้ผลการคำนวณที่ดีขึ้นเพิ่มเราเพิ่มอันดับการรบกวน ค่าสัมพรรคภาพสองจุดจากอันดับการรบกวนที่สูงสุดไม่ได้ให้ค่าที่ดีขึ้น [34] ดังนั้นผู้ทำวิจัยจึงไปศึกษาและประยุกต์การใช้งาน LPT ในงานวิจัยที่มีความแม่นยำในการคำนวณที่สูงกว่าและใช้ตัวแปรเส้นเดียวเพียงตัวเดียวอีกทั้งยังประยุกต์ใช้กับแบบจำลองคอมพิวเตอร์ระบบอนุภาคเอนตัวได้ง่ายกว่า [35]

ในงานวิจัยนี้จะเน้นการศึกษาโดยใช้ทฤษฎีการรบกวนเชิงโน้มถ่วง (gravitational perturbation theory) [33] แทนเพื่อที่จะอธิบายลักษณะการก่อตัวของโครงสร้างเอกภพ ทั้งนี้วัตถุประสงค์เริ่มต้นของโครงการคือการนำทฤษฎีการรบกวนเชิงโน้มถ่วงไปประยุกต์ใช้กับการศึกษาสัมพรรคภาพไม่เชิงเส้น (non-linear correlation) ที่เกิดจากสนามความหนาแน่นนอนเกาเซียนดั้งเดิม (primordial non-Gaussian density fields) แต่เนื่องจากความห่างที่ดำเนินการทำวิจัยอยู่นั้น ข้อมูลการสำรวจของยานสำรวจแพลงค์ (Planck spacecraft) [36] ได้ทำการวัดค่าพารามิเตอร์นอนเกาเซียนดั้งเดิม (primordial non-Gaussianity) f_{NL} ซึ่งค่าที่วัดไม่ได้แสดงถึงความหนาแน่นนอนเกาเซียนดั้งเดิมอย่างมีนัยยะมากพอที่จะเป็นประเด็นที่น่าศึกษา จึงได้เปลี่ยนการประยุกต์ใช้ทฤษฎีการรบกวนเชิงโน้มถ่วงไปศึกษา BAOs [20] แทน

¹<http://www.darkenergysurvey.org>

²<http://www.sdss.org/surveys/eboss/>

³<http://sci.esa.int/euclid/>

⁴<http://www.lsst.org/>

⁵<https://www.skatelescope.org>

⁶<http://wfirst.gsfc.nasa.gov/>

2 วัตถุประสงค์

- 1) เพื่อศึกษาทฤษฎีการรบกวนเชิงโน้มถ่วง และนำทฤษฎีที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาสร้างลักษณะโครงสร้างของเอกภพขนาดมหภาค
- 2) ประยุกต์ทฤษฎีการรบกวนเชิงโน้มถ่วงในการศึกษาเงื่อนไขเริ่มต้นของเอกภพ และพลังงานมืด

3 วิธีการศึกษา

ตลอดระยะเวลาในการดำเนินงานที่ผ่านมาได้มีการศึกษาทฤษฎีการรบกวนเชิงโน้มถ่วง ซึ่งมีอยู่ด้วยกันหลากหลายวิธีโดยขั้นตอนแรกจะศึกษาทฤษฎีการรบกวนมาตรฐาน แล้วก็ได้ทำการศึกษาสเปกตรัมกำลังไปแล้วเบื้องต้น หลังจากนั้นจึงได้ศึกษาทฤษฎีการรบกวนแบบลากรางจ์ ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้การงานวิจัยในโครงการนี้ได้

3.1 ปัญหาและอุปสรรค

เนื่องจากระหว่างที่ดำเนินการทำวิจัยอยู่นั้น ข้อมูลการสำรวจของยานสำรวจแพลงค์ (Planck spacecraft) ได้ทำการวัดค่าพารามิเตอร์นอนเอกเซียนดั้งเดิม f_{NL} ซึ่งค่าที่วัดไม่ได้แสดงถึงความหนาแน่นนอนเอกเซียนดั้งเดิมอย่างมีนัยยะมากพอที่จะเป็นประเด็นที่น่าศึกษา [36] จึงได้เปลี่ยนการประยุกต์ใช้ทฤษฎีการรบกวนเชิงโน้มถ่วงไปศึกษา BAOs และการบิดเบี้ยวในปริภูมิเรดชิฟท์ แทน โดยทั้งนี้ยังคงใช้ทฤษฎีการรบกวนในการศึกษาเหมือนเดิม ดังจะได้กล่าวในรายงานต่อไป

3.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในหัวข้อนี้ผู้ทำวิจัยได้รวบรวมทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้องานวิจัยไว้

3.2.1 ทฤษฎีการเกิดโครงสร้าง (Structure Formation Theory)

โครงสร้างมหภาคที่เราพบเห็นในเอกภพนั้นเกิดจากความไม่สม่ำเสมอ (inhomogeneities) ที่เกิดจากการกระเพื่อมของสนามความหนาแน่นของสสาร $\rho(\mathbf{x}, t)$ ซึ่งเราสามารถนิยามได้ ดังนี้

$$\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad (1)$$

โดยที่ $\delta(\mathbf{x}, t)$ เรียกว่า ความหนาแน่นเกิน \mathbf{x} แทนเวกเตอร์ตำแหน่งในพิกัดโคมูฟวิงค์ (comoving) $\bar{\rho}(t)$ แทนความหนาแน่นเฉลี่ยในพิกัดโคมูฟวิงค์ พลศาสตร์ของสนามความหนาแน่นเกินขึ้นอยู่กับสมการความต่อเนื่อง (continuity equation)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (2)$$

และสมการของออยเลอร์

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + 2H(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

โดยที่ \mathbf{u} แทน ความเร็วพิกล (peculiar velocity) และ $\nabla \equiv \partial_{\mathbf{x}}$ แทน ตัวดำเนินการกราเดียนในพิกัดโคมูฟวิงค์ $H(t) \equiv \dot{a}/a$ แทนค่าคงที่ฮับเบิล และ Φ ศักย์โน้มถ่วงในพิกัดโคมูฟวิงค์

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2} \Omega_M(t) H^2(t) \delta(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

โดยที่ Ω_M แทนพารามิเตอร์ความหนาแน่นของสสาร (matter density parameter) เราจะนิยาม ศักย์ความเร็ว (velocity potential) θ ดังนี้

$$\theta(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (5)$$

ในทฤษฎีการรบกวนเชิงเส้น สมการการวิวัฒนาการของความหนาแน่นเกิน และศักย์ความเร็วเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{x}, t) + \theta(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (6)$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) + 2H\theta(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2} \Omega_M(t) H^2(t) \delta(\mathbf{x}, t). \quad (7)$$

จากสมการ (6) และ สมการ (7) เราจะได้สมการอนุพันธ์สามัญอันดับสองของการวิวัฒนาการความหนาแน่นเกินได้ ดังนี้

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta(\mathbf{x}, t) + 2H(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2} \Omega_M(t) H^2(t) \delta(\mathbf{x}, t). \quad (8)$$

เราจะสมมติให้ เขียนฟังก์ชันของความหนาแน่นเกินในรูปที่แยกเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาได้ดังนี้

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D_1(t) \delta_0(\mathbf{x}), \quad (9)$$

เราเรียก $D_1(t)$ ว่า ฟังก์ชันการเติบโตเชิงเส้น (linear growth function) โดยที่ $\delta_0(\mathbf{x})$ แทนความหนาแน่นเกินจำเพาะช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง โดยทั่วไปเราจะแทน $\delta_0(\mathbf{x})$ ความหนาแน่นเกินที่เวลาปัจจุบันซึ่งจะทำให้ $D_1 = 1$ ที่เวลาปัจจุบัน จากสมการ (8)-(9) เราจะได้สมการอนุพันธ์การวิวัฒนาการของ D_1 ดังนี้

$$\ddot{D}_1 + 2H(t)\dot{D}_1 - \frac{3}{2} \Omega_M(t) H^2(t) D_1(t) = 0. \quad (10)$$

สมการข้างต้นเป็นสมการที่แสดงถึงการเติบโตของความหนาแน่นเกินที่มีส่วนสำคัญเป็นอย่างยิ่งในทฤษฎีวิวัฒนาการของโครงสร้างเอกภพมหภาค

3.2.2 ทฤษฎีการรบกวนมาตรฐาน (Standard Perturbation Theory)

ในทฤษฎีการรบกวน (perturbation theory) และ จากนิยามของความหนาแน่นเกิน และ ศักย์ความเร็วเราสามารถเขียนพจน์ในรูปผลรวมของพจน์ต่อไปนี้ได้

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}, t) &\equiv \delta_1(\mathbf{x}, t) + \delta_2(\mathbf{x}, t) + \delta_3(\mathbf{x}, t) + \dots, \\ \Phi(\mathbf{x}, t) &\equiv \Phi_1(\mathbf{x}, t) + \Phi_2(\mathbf{x}, t) + \Phi_3(\mathbf{x}, t) + \dots, \\ \theta(\mathbf{x}, t) &\equiv \theta_1(\mathbf{x}, t) + \theta_2(\mathbf{x}, t) + \theta_3(\mathbf{x}, t) + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

โดยที่ เทอมอันดับที่ n จะแปรผันตรงกับ D_1^n ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว D_1 มีค่าน้อยกว่า 1 ดังนั้นเทอมอันดับที่สูงจะมีนัยยะที่น้อยลงตามลำดับ จากสมการ (11) เราจะได้สมการอนุพันธ์สามมิติที่เนื่องด้วยฟังก์ชันการเติบโตในแต่ละอันดับของการรบกวนได้ ดังนี้

$$\ddot{D}_2 + 2H\dot{D}_2 - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_2 = \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_1^2, \quad (12)$$

$$\ddot{D}_{3a} + 2H\dot{D}_{3a} - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_{3a} = \frac{3}{2}\Omega_M H^2 (D_1^3 + D_1 D_2), \quad (13)$$

$$\ddot{D}_{3b} + 2H\dot{D}_{3b} - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_{3b} = \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_1^3. \quad (14)$$

โดยที่เราจะนิยาม $D_2(t)$ แทนฟังก์ชันการเติบโตอันดับสอง $D_{3a}(t)$ และ $D_{3b}(t)$ แทนฟังก์ชันการเติบโตอันดับสาม เราจะเห็นว่า $D_2(t) \propto D_1^2(t)$ และ $D_{3a}(t), D_{3b}(t) \propto D_1^3(t)$ ดังนั้นเพื่อความสะดวก เราจึงนิยาม $d_2(t) \equiv D_2(t)/D_1^2(t)$, $d_{3a}(t) \equiv D_{3a}(t)/D_1^3(t)$ และ $d_{3b}(t) \equiv D_{3b}(t)/D_1^3(t)$ สำหรับเอกภพแบบ Einstein-de Sitter (EdS) $d_2 = 3/7$, $d_{3a} = 5/21$ และ $d_{3b} = 1/6$

ในทฤษฎีการรบกวนมาตรฐาน มีการกระจายเทอมของสนามความหนาแน่นเกินของสสาร, δ และ สนามศักย์ความเร็ว θ ในปริภูมิฟูรีเยร์ (Fourier space) ได้ดังนี้

$$\delta(z, \mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} D_1^n \delta_n(\mathbf{k}), \quad \theta(z, \mathbf{k}) = -aHf \sum_{n=1}^{\infty} D_1^n \theta_n(\mathbf{k}), \quad (15)$$

โดยที่ z , H และ a คือ เรดชิฟท์ (redshift) ค่าคงตัวฮับเบิล (the Hubble parameter) และ ค่าสเกลแฟกเตอร์ (scale factor) ตามลำดับ โดยที่ สนามศักย์ความเร็วมีการแปรผันตามค่าสเกลแฟกเตอร์ตาม $f = d \ln D / d \ln a \simeq \Omega_M^{0.55}$ โดยที่ เทอมการรบกวนอันดับที่ n เท่ากับ

$$\begin{aligned} \delta_n(\mathbf{k}) &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}_{[1,n]}) F_n([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n]) \delta_{\text{lin}}(\mathbf{p}_1) \dots \delta_{\text{lin}}(\mathbf{p}_n), \\ \theta_n(\mathbf{k}) &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}_{[1,n]}) G_n([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n]) \delta_{\text{lin}}(\mathbf{p}_1) \dots \delta_{\text{lin}}(\mathbf{p}_n), \end{aligned} \quad (16)$$

โดยที่ $F_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = F_n([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n])$, $\mathbf{p}_{[1,n]} \equiv \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n$ และ $\delta_1(\mathbf{k}) \equiv \delta_{\text{lin}}(\mathbf{k})$. ภายใต้งานของโมเมนตัมในโหมดฟูรีเยร์ $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ ดังนี้

$$|\mathbf{p}_{m+1}|, \dots, |\mathbf{p}_n| d_{3a} |\mathbf{p}_1|, \dots, |\mathbf{p}_m| \rightarrow 0, \quad (17)$$

เราสามารถประมาณค่าของฟังก์ชัน F_n และ G_n ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F_n([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n])|_{p_1, \dots, p_m \rightarrow 0} &\rightarrow \frac{(n-m)!}{n!} \left(\frac{\mathbf{p}_{[m+1,n]} \cdot \mathbf{p}_1}{p_1^2} \right) \dots \left(\frac{\mathbf{p}_{[m+1,n]} \cdot \mathbf{p}_m}{p_m^2} \right) \times F_{n-m}([\mathbf{p}_{m+1}, \mathbf{p}_n]), \\ G_n([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n])|_{p_1, \dots, p_m \rightarrow 0} &\rightarrow \frac{(n-m)!}{n!} \left(\frac{\mathbf{p}_{[m+1,n]} \cdot \mathbf{p}_1}{p_1^2} \right) \dots \left(\frac{\mathbf{p}_{[m+1,n]} \cdot \mathbf{p}_m}{p_m^2} \right) \times G_{n-m}([\mathbf{p}_{m+1}, \mathbf{p}_n]). \end{aligned} \quad (18)$$

เราสามารถที่จะแยกเทอมของสนามความหนาแน่นเกินออกเป็นสองเทอม คือเทอมที่เกี่ยวข้องคลื่นยาว (long wavelength mode) และ เทอมที่เกี่ยวข้องกับคลื่นสั้น (short wavelength mode) ดังนี้

$$\delta_{\text{lin}}(\mathbf{k}) = \delta_{\text{lin}}^{(L)}(\mathbf{k}) + \delta_{\text{lin}}^{(S)}(\mathbf{k}), \quad (19)$$

โดยที่ $\delta_{\text{lin}}^{(L)}(\mathbf{k})$ และ $\delta_{\text{lin}}^{(S)}(\mathbf{k})$ แทนเทอมที่มาจากคลื่นยาว และคลื่นสั้น ตามลำดับ เทอมที่มาจากคลื่นสั้นจะมีความเกี่ยวข้องกับความไม่เชิงเส้นที่เราจะได้ศึกษาต่อไป โดยผลที่ได้จากการศึกษาพบว่าเทอมคลื่นยาวมีอิทธิพลต่อคลื่นสั้นเมื่อทำการแก้สมการ (16), (18) และ (19) ได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\delta(z, \mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} D^n \int d^3x e^{-ik \cdot x} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} e^{-ip_{[1,n]} \cdot (x - D\Xi_{\text{lin}}^{(L)}(x))} \times F_n([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n]) \delta_{\text{lin}}^{(S)}(\mathbf{p}_1) \cdots \delta_{\text{lin}}^{(S)}(\mathbf{p}_n). \quad (20)$$

โดยที่ เวกเตอร์การกระจัดเชิงเส้นนิยามโดย $\Xi_{\text{lin}}^{(L)}(\mathbf{p}) \equiv \frac{\mathbf{v}_{\text{lin}}^{(L)}}{DaH} = \frac{i\mathbf{p}}{p^2} \delta_{\text{lin}}^{(L)}(\mathbf{p})$ ซึ่งเป็นเทอมที่มาจากคลื่นช่วงยาว ดังนั้นเราจะพบว่าทฤษฎีการรบกวนนั้นเราไม่สามารถที่จะตัดเทอมที่มาจากคลื่นช่วงยาวได้เลยเนื่องจากมีอิทธิพลต่อคลื่นช่วงสั้นอย่างมีนัยยะ โดยสมการทั้งหมดที่ได้ยกมานี้ได้กล่าวถึงภาพคร่าว ๆ ของการรบกวนสนามความหนาแน่นสสาร และ สนามการแผ่ของความเร็วของสสารมืด สมการที่ซึ่งสามารถเอาไปใช้คำนวณสเปกตรัมกำลังได้ต่อไป

ค่าสเปกตรัมกำลัง คือ การคำนวณหาสัมพรรคภาพ (correlation) ของสนามความหนาแน่นในฟูรีเยร์สเปซ ดังนี้

$$\langle \delta^{(m)}(\mathbf{k}) \delta^{(n)}(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{mn}(k), \quad (21)$$

โดยที่ $P_{mn}(k)$ คือสเปกตรัมกำลังของสัมพรรคภาพสนามความหนาแน่นอันดับที่ m และ n ตามลำดับ $\delta_D^3(\mathbf{k})$ คือ ฟังก์ชันเดลต้าดีเรก (Dirac's delta function) ในปริภูมิสามมิติ $\langle \dots \rangle$ คือ ค่าเฉลี่ยของซองเบิล (ensemble average) เรานิยาม 1-loop กับ 2-loop สเปกตรัมกำลังดังนี้

$$\begin{aligned} P_{1\text{-loop}} &\equiv P_{22}(k) + P_{13}(k) \\ P_{2\text{-loop}} &\equiv P_{15}(k) + P_{24}(k) + P_{33a}(k) + P_{33b}(k) \end{aligned} \quad (22)$$

$P_{1\text{-loop}}$ และ $P_{2\text{-loop}}$ มีความสัมพันธ์กับ bispectrum และ trispectrum ตามลำดับ สเปกตรัมกำลังในลำดับต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน 1-loop และ 2-loop เทอมมีดังนี้

$$\begin{aligned} P_{13}(k) &\equiv 6P_{\text{lin}}(k) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}, -\mathbf{p}) P_{\text{lin}}(p), \\ P_{22}(k) &\equiv 2 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{[1,2]}) [F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)]^2 P_{\text{lin}}(k_1) P_{\text{lin}}(k_2), \end{aligned} \quad (23)$$

และ

$$\begin{aligned} P_{15}(k) &\equiv 30P_{\text{lin}}(k) \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} F_5(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, -\mathbf{p}_2) P_{\text{lin}}(p_1) P_{\text{lin}}(p_2), \\ P_{24}(k) &\equiv 24 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{[1,2]}) \\ &\quad \times F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) F_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}, -\mathbf{p}) P_{\text{lin}}(p) P_{\text{lin}}(k_1) P_{\text{lin}}(k_2), \end{aligned} \quad (24)$$

และ

$$\begin{aligned} P_{33a}(k) &\equiv \frac{(P_{13}(k))^2}{4P_{\text{lin}}(k)}, \\ P_{33b}(k) &\equiv 6 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{[1,3]}) \cdot [F_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)]^2 P_{\text{lin}}(k_1) P_{\text{lin}}(k_2) P_{\text{lin}}(k_3). \end{aligned} \quad (25)$$

โดยที่ $P_{\text{lin}}(k) \equiv P_{11}(k) = \langle \delta_{\text{lin}}(\mathbf{k}) \delta_{\text{lin}}(\mathbf{k}) \rangle$ แทนสเปกตรัมกำลังเชิงเส้นของสสาร (linear matter power spectrum)

3.2.3 ทฤษฎีการรบกวนแบบลากรางจ์ (Lagrange Perturbation Theory)

ในงานวิจัยนี้จะดำเนินการตามกระบวนการวิธีคำนวณการรบกวนแบบลากรางจ์ของ [32] ในระบบลากรางจ์ตำแหน่งของอนุภาค \mathbf{x} จะถูกแทนที่ด้วยพิกัดแบบลากรางจ์ \mathbf{q} และ สนามการกระจัด (displacement field) Ψ

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{q}, t), \quad (26)$$

โดย \mathbf{x} แทนเวกเตอร์ตำแหน่งในระบบพิกัดโคมพวริงค์ ความหนาแน่นเกินในระบบพิกัดแบบลากรางจ์เขียนได้ ดังนี้

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \int d^3q \delta_D^3(\mathbf{x} - \mathbf{q} - \Psi(\mathbf{q})) - 1, \quad (27)$$

สมการการเคลื่อนที่ของสนามการกระจัดเป็นดังนี้

$$\frac{d^2}{dt^2} \Psi(\mathbf{q}, t) + 2H(t) \frac{d}{dt} \Psi(\mathbf{q}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}, t). \quad (28)$$

โดยหลักการรบกวน เราสามารถกระจายพจน์สนามการกระจัดได้ ดังนี้

$$\Psi(\mathbf{q}, t) = \Psi_1(\mathbf{q}, t) + \Psi_2(\mathbf{q}, t) + \Psi_3(\mathbf{q}, t) + \dots \quad (29)$$

เราสามารถเขียนสนามการกระจัดในรูปฟังก์ชันของโมเมนต์คลื่นในอนุกรมฟูรีเยร์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_n(\mathbf{k}, t) &= \frac{iD_1^n(t)}{n!} \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta_D^3 \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i - \mathbf{k} \right) \\ &\times L_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n, t) \left(\prod_{i=1}^n \tilde{\delta}_0(\mathbf{k}_i) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

โดยที่ $\tilde{\Psi}_n(\mathbf{k}, t)$ แทน พจน์การรบกวนลำดับที่ n ของสนามการกระจัดในปริภูมิฟูรีเยร์ และ $L_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}, t)$ แทน เคอร์เนลการรบกวนลากรางจ์ (Lagrangian perturbative kernels) นิยามการแปลงฟูรีเยร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นดังนี้

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^3x f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (31)$$

และ

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (32)$$

พจน์เคอร์เนลการรบกวนลากรางจ์ในแต่ละอันดับการรบกวนที่ขึ้นกับเวลาเป็นดังนี้

$$L_1(\mathbf{k}_1, t) = \frac{\mathbf{k}}{k^2}, \quad (33)$$

$$L_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t) = d_2(t) \frac{\mathbf{k}}{k^2} \left[1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right], \quad (34)$$

$$\begin{aligned} L_{3a}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, t) &= 3d_{3a}(t) \left(\frac{\mathbf{k}}{k^2} \right) \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right) \left(1 - \frac{((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_3)^2}{1} \right) \\ &- 2d_{3b}(t) \left(\frac{\mathbf{k}}{k^2} \right) \left[1 - 3 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} + 2 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3) (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1)}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

โดยที่ $\mathbf{k} = \sum_i \mathbf{k}_i$ จำเป็นที่ต้องทำให้สมมาตร (symmetrized) ภายหลัง

3.2.4 สเปกตรัมกำลังในปริภูมิจริง (Real-space Power Spectrum)

สเปกตรัมกำลังนิยามได้จากการแปลงฟูรีเยร์สัมพรรคภาพสองจุดของความหนาแน่นเกิน

$$P(k) \equiv \int d^3x \xi(x) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (36)$$

โดยที่ ξ แทน สัมพรรคภาพสองจุดของความหนาแน่นเกิน ความสัมพันธ์ของสเปกตรัมกำลังกับความหนาแน่นเกินเป็นดังนี้

$$\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k), \quad (37)$$

โดยที่ $P(k)$ แทนสเปกตรัมกำลัง และ $\tilde{\delta}(\mathbf{k})$ แทนความหนาแน่นเกินในปริภูมิฟูรีเยร์ (สมการ (27)) สเปกตรัมกำลังในปริภูมิฟูรีเยร์ขึ้นอยู่กับขนาดของเวกเตอร์ $k = |\mathbf{k}|$ เท่านั้น จากกระบวนการวิธีการคำนวณใน [32] ค่าสเปกตรัมกำลังเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(k, z) = & \exp \left[-\frac{k^2}{6\pi^2} \int dp P_L(p, z) \right] \\ & \times \left\{ P_L(k, z) + \left(\frac{d_2^2(z)}{2} Q_1(k) + d_2(z) Q_2(k) + \frac{1}{2} Q_3(k) \right) \right. \\ & \left. + 2 \left(d_{3a}(z) R_1(k) + d_2(z) R_2(k) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

โดยที่ $P_L(k)$ แทน สเปกตรัมกำลังเชิงเส้น $Q_n(k)$ และ $R_n(k)$ เป็นฟังก์ชันอินทิกรัลในรูป

$$\begin{aligned} Q_n(k) = & \frac{k^3}{4\pi^2} \int_0^\infty dr P_L(kr) \int_{-1}^1 dx \\ & \times P_L \left[k(1+r^2-2rx)^{1/2} \right] \frac{\tilde{Q}_n(r, x)}{(1+r^2-2rx)^2}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$R_n(k) = \frac{1}{48} P_L(k) \frac{k^3}{4\pi^2} \int_0^\infty dr P_L(kr) \tilde{R}_n(r), \quad (40)$$

โดยที่ $P_L(k) \equiv P_L(k, z=0)$ แทนสเปกตรัมกำลังในยุคปัจจุบัน

$$\tilde{Q}_1(r, x) = r^2 (1-x^2)^2, \quad (41)$$

$$\tilde{Q}_2(r, x) = (1-x^2)rx(1-rx), \quad (42)$$

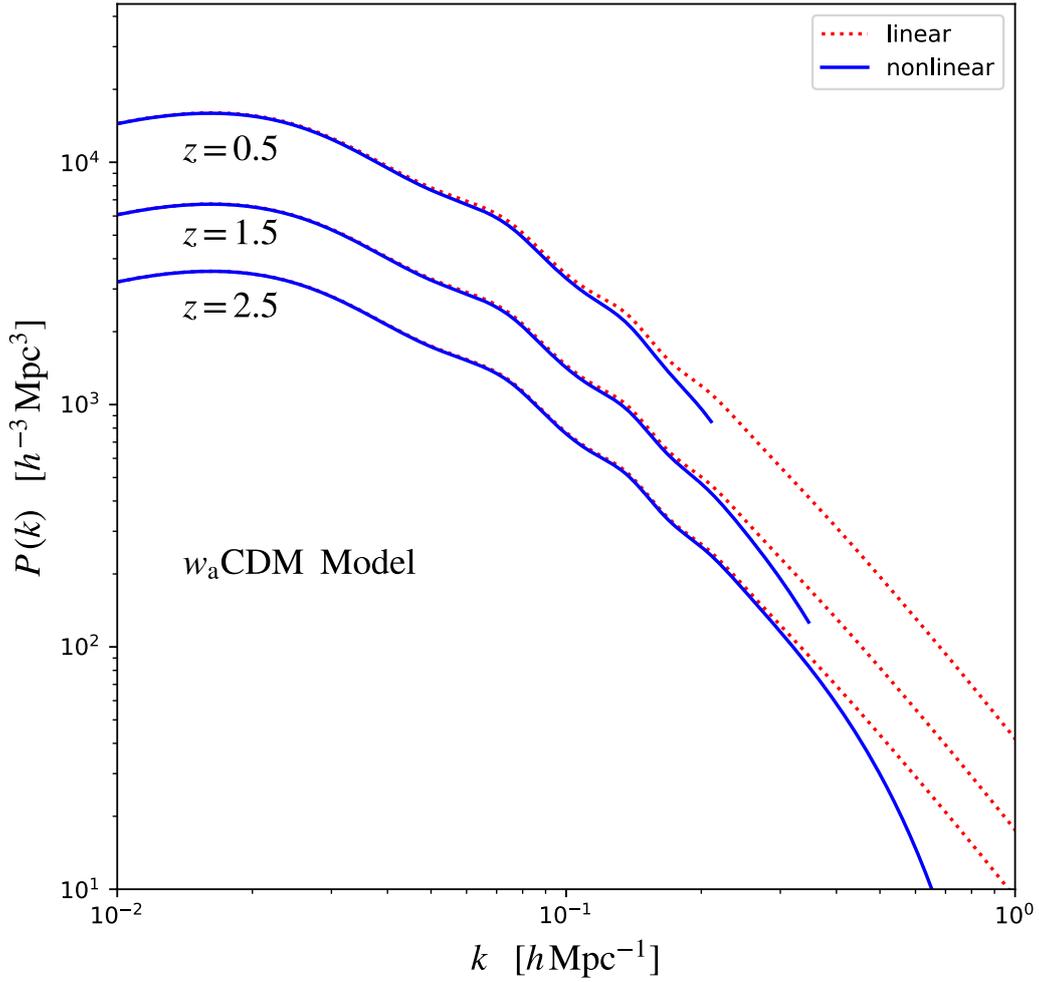
$$\tilde{Q}_3(r, x) = x^2(1-rx)^2, \quad (43)$$

$$\tilde{Q}_4(r, x) = 1-x^2, \quad (44)$$

และ

$$\tilde{R}_1(r) = -\frac{2}{r^2} (1+r^2)(3-14r^2+3r^4) + \frac{3}{r^3} (r^2-1)^4 \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|, \quad (45)$$

$$\tilde{R}_2(r) = \frac{2}{r^2} (1-r^2)(3-2r^2+3r^4) + \frac{3}{r^3} (r^2-1)^3 (1+r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|. \quad (46)$$



รูปที่ 1: กราฟแสดงสเปกตรัมกำลังเชิงเส้น (จุด) และ สเปกตรัมกำลังไม่เชิงเส้น (เส้นทึบ) แสดงความแตกต่างในแต่
 ละเรดชิฟท์ของแบบจำลองเอกภพ w_a CDM (ดูตาราง 1) กราฟสำหรับแบบจำลองอื่น ๆ มีลักษณะคล้ายคลึงกัน จาก
 บนลงล่าง $z = 0.5, 1.5$ and 2.5 ค่าสเปกตรัมกำลังไม่เชิงเส้นแสดงถึงแค่ $k_{nl}/2$

เราจะเขียนค่าที่วัดได้ (observables) เป็นฟังก์ชันของเรดชิฟท์ z สำหรับเอกภพแบบ Einstein de-Sitter ผลที่ได้สอดคล้อง
 กับ [32] ค่านำเชื่อถือของกระบวนการนี้จะขึ้นกับเทอมเอกซ์โพเนนเชียลในสมการ (38) จะต้องมีค่าประมาณไม่เกินหนึ่งหน่วย
 (order of unity) ด้วยเหตุนี้เราจึงนิยาม สเกลไม่เชิงเส้นไว้ที่

$$k_{nl} \equiv \left[\frac{1}{6\pi^2} \int dk' P_L(k') \right]^{-1/2}. \quad (47)$$

เราจะตัดการคำนวณทิ้งที่ $k > k_{nl}/2$ ค่าสเปกตรัมกำลังสำหรับแบบจำลองเอกภพ w_a CDM แสดงในรูปที่ 1 ไว้เป็น
 ตัวอย่าง

3.2.5 สเปกตรัมกำลังในปริภูมิเรดชิฟท์ (Redshift-space Power Spectrum)

ค่าของสเปกตรัมในปริภูมิเรดชิฟท์มีลักษณะแอนไอโซทรอปิก (anisotropic) ดังนั้นจะขึ้นกับทิศทางเมื่อเทียบกับทิศในแนวเล็ง \hat{z} จากกระบวนการคำนวณใน [32] ค่าสเปกตรัมกำลังในปริภูมิเรดชิฟท์เขียนได้ ดังนี้

$$P_s(\mathbf{k}, \mu, z) = \exp\left\{-k^2 \left[1 + f(f+2)\mu^2\right] A\right\} \times \left[(1 + f\mu^2)^2 P_L(k, z) + \sum_{n,m} \mu^{2n} f^m E_{nm}(k) \right], \quad (48)$$

โดยที่ $\mu = \hat{z} \cdot \mathbf{k}/k$ แทนค่าโคไซน์ของ \mathbf{k} เมื่อเทียบกับแนวเล็ง

$$A = \frac{1}{6\pi^2} \int dk P_L(k), \quad (49)$$

และ

$$f = \frac{d \ln D_1}{d \ln a}. \quad (50)$$

ฟังก์ชันอินทิกรัล $E_{nm}(k)$ เป็นฟังก์ชันนักรังสีในรูปของ $Q_n(k)$ และ $R_n(k)$

$$E_{00}(k) = \frac{d_2^2(t)}{2} Q_1(k) + d_2(t) Q_2(k) + \frac{1}{2} Q_3(k) + 2d_{3a}(t) R_1(k) + 2d_2(t) R_2(k), \quad (51)$$

$$E_{11}(k) = 4E_{00}(k), \quad (52)$$

$$E_{12}(k) = -\frac{d_2(t)}{2} Q_1(k) - \frac{3}{2} Q_2(k) + \frac{1}{4} Q_4(k) - 2d_2(t) R_1(k), \quad (53)$$

$$E_{22}(k) = \left(2d_2^2(t) + \frac{d_2(t)}{2}\right) Q_1(k) + \left(5d_2(t) + \frac{3}{2}\right) Q_2(k) + 3Q_3(k) - \frac{1}{4} Q_4(k) + \left(2d_2(t) + 6d_{3a}(t)\right) R_1(k) + 10d_2(t) R_2(k), \quad (54)$$

$$E_{23}(k) = -d_2(t) Q_1(k) - 3Q_2(k) + \frac{1}{2} Q_4(k) - 2d_2(t) R_1(k), \quad (55)$$

$$E_{24}(k) = \frac{3}{16} Q_1(k), \quad (56)$$

$$E_{33}(k) = d_2(t) Q_1(k) + \left(2d_2(t) + 3\right) Q_2(k) + 2Q_3(k) - \frac{1}{2} Q_4(k) + 2d_2(t) R_1(k) + 4d_2(t) R_2(k), \quad (57)$$

$$E_{34}(k) = -\frac{3}{8} Q_1(k) - \frac{3}{2} Q_2(k) + \frac{1}{4} Q_4(k), \quad (58)$$

$$E_{44}(k) = \frac{3}{16} Q_1(k) + \frac{3}{2} Q_2(k) + \frac{1}{2} Q_3(k) - \frac{1}{4} Q_4(k). \quad (59)$$

สำหรับเอกภพแบบ Einstein-de Sitter $d_2 = 3/7$, $d_{3a} = 5/21$ และ $d_{3b} = 1/6$ ผลลัพธ์ที่ได้จะตรงกับ [32]

ตารางที่ 1: ค่าพารามิเตอร์ของเอกภพในแต่ละแบบจำลอง

	Λ CDM	w CDM	w_a CDM
$\Omega_B h^2$		0.0223	
$\Omega_M h^2$		0.1401	
Ω_Λ		0.7019	
$\Delta_R^2 \times 10^9$		2.2061	
τ		0.0956	
n_s		0.9695	
w_0	-1.0	-0.8	-1.0
w_a	0.0	0.0	0.1

4 วิธีการวิเคราะห์ข้อมูล

สำหรับโครงการสำรวจดาราจักร ความเร็วพิกลของดาราจักรจะทำให้เกิดการบิดเบี้ยวในค่าสเปกตรัมกำลัง (หรือ ค่าสัมพรรคภาพ) ในแนวเล็งและแนวตั้งฉากของผู้สังเกต การบิดเบี้ยวนี้เป็นปรากฏการณ์ที่สามารถทำนายผลว่าล่วงหน้า และสามารถนำมาใช้ในการตรวจสอบทฤษฎีจักรวาลวิทยาซึ่งเรียกว่า การทดสอบอัลคอคค-แพคซิงกี (Alcock-Paczynski (AP) test) [37] AP test สามารถที่จะใช้วัดคุณสมบัติของพลังงานมืดแบบพลวัตได้โดยการผลที่ได้จากโครงสร้างสำรวจดาราจักรที่เรดชิฟต์ต่าง ๆ กันมาเปรียบเทียบกัน ในหัวข้อนี้ผู้ทำวิจัยจะกล่าวถึงแบบจำลองต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในการศึกษา

4.1 แบบจำลองพลังงานมืดแบบพลวัต

ผู้ทำวิจัยได้ใช้วิธีกำหนดพารามิเตอร์ (parametrization) ของสมการสถานะพลังงานมืดแบบพลวัตโดยการกระจายเทย์เลอร์ (Taylor expansion) แบบ Chevallier-Polarski-Linder (CPL) [38, 39]

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a), \quad (60)$$

หรือ

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}, \quad (61)$$

โดยที่ w_0 และ w_a เป็นค่าคงที่ ในกรณีของค่าคงตัวจักรวาลวิทยาจะได้ $w_0 = -1.0$ and $w_a = 0.0$ แต่ในกรณีทั่วไปค่าพารามิเตอร์สมการสถานะเป็นค่าใดก็ได้ที่สอดคล้องกับข้อมูลการสำรวจ ค่าจำกัดของ w_0 และ w_a จากข้อมูลสำรวจในปัจจุบัน⁷ เราจะใช้สาย MCMC จาก planck_lowL_lowLike_highL_BAO ในฐานข้อมูล base_w_wa ซึ่งมีพารามิเตอร์ที่ต้องการ รวมถึงข้อมูลการสำรวจ BAO จาก DR11LOWZ, DR11CMass [41], MGS และ 6DF [42] เราจึงได้ค่าจำกัดพารามิเตอร์ ดังนี้

$$w_0 = -1.030 \pm 0.361, \quad w_a = -0.334 \pm 0.909. \quad (62)$$

ผู้ทำวิจัยได้แบ่งแบบจำลองเอกภพเป็นสามแบบ ได้แก่ แบบจำลอง Λ CDM ที่มีต้นแบบมาจากเอกภพที่มีค่าคงตัวจักรวาลวิทยา ($w_0 = -1.0$ and $w_a = 0.0$) แบบจำลอง w CDM ที่ $w_0 = -0.8$, $w_a = 0.0$ และ แบบจำลอง w_a CDM

⁷ในช่วงเวลาที่ดำเนินการวิจัยนี้ ข้อมูลล่าสุดของค่าจำกัดพารามิเตอร์ของ PLANCK 2018 ได้ถูกเผยแพร่ [40]

ตารางที่ 2: ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการจำลองโครงการสำรวจดาราจักร

	Survey	z	\bar{n}_g ($\text{Mpc}^{-3}h^3$)	V_s (Mpc^3h^{-3})	b_1
ΛCDM	SKA1	0.0 - 1.0	0.278	3.80×10^{10}	1.052
	SKA2	1.0 - 2.0	1.80×10^{-3}	1.09×10^{11}	2.091
	DESI	2.0 - 3.0	2.06×10^{-5}	5.79×10^{10}	3.703
$w\text{CDM}$	SKA1	0.0 - 1.0	0.300	3.34×10^{10}	1.049
	SKA2	1.0 - 2.0	2.07×10^{-3}	9.49×10^{10}	2.093
	DESI	2.0 - 3.0	2.32×10^{-5}	5.79×10^{10}	3.701
$w_a\text{CDM}$	SKA1	0.0 - 1.0	0.279	3.34×10^{10}	1.051
	SKA2	1.0 - 2.0	1.83×10^{-3}	1.07×10^{11}	2.091
	DESI	2.0 - 3.0	2.09×10^{-5}	5.71×10^{10}	3.703

ที่ $w_0 = -1$, $w_a = 0.1$ ในแบบจำลอง ΛCDM ที่มีค่าคงตัวจักรวาลวิทยาโดยทั่วไปค่าพารามิเตอร์สมการสถานะ w_0 และ w_a เป็นค่าคงที่ แต่เนื่องจากผู้จัดทำเล็งเห็นประโยชน์ในการศึกษาจึงได้ให้ค่า w_0 และ w_a ทั้งสองค่าแปรค่าได้ ตารางที่ 1 ได้รวบรวมค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลองเอกภพทั้งสามแบบ

4.2 แบบจำลองค่าไบแอสของดาราจักร

ค่าสเปกตรัมกำลังที่วัดได้ขึ้นอยู่กับชนิดของตัวตรวจจับ (tracers) แต่การกระจายตัวของตัวตรวจจับในบางครั้งไม่ได้สะท้อนการกระจายตัวของสสารอย่างตรงไปตรงมา ดังนั้นค่าคงตัวการแปรผันของความหนาแน่นเกินตัวตรวจจับเมื่อเทียบกับสสาร เราเรียกว่า ค่าไบแอส (bias) เราจะพิจารณาไบแอสเชิงเส้น [43, 44] ดังนี้

$$\delta_g(\mathbf{k}) \equiv b_1 \delta(\mathbf{k}), \quad (63)$$

โดยที่ $\delta_g(\mathbf{k})$ แทน ความหนาแน่นเกินของดาราจักร ค่าสเปกตรัมกำลังที่มาจากตัวตรวจจับสามารถคำนวณได้จากการแปลงสเปกตรัมเชิงเส้นของสสาร $P_L(k) \rightarrow b_1^2 P_L(k)$ ในสมการที่ (48)

$$P_{s,g}(\mathbf{k}, \mu, z) \equiv P_s(\mathbf{k}, \mu, z) \Big|_{P_L(k) \rightarrow b_1^2 P_L(k)}. \quad (64)$$

ค่าของ b_1 ขึ้นกับโครงการสำรวจดาราจักรดังที่จะกล่าวในหัวข้อถัดไป

4.3 แบบจำลองโครงการสำรวจดาราจักร

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงโครงการสำรวจดาราจักรที่น่าสนใจ และเป็นต้นแบบในการสร้างแบบจำลองการสำรวจดาราจักรที่ใช้ในงานวิจัยขั้นนี้

Square Kilometre Array (SKA) เป็นโครงการสำรวจดาราจักร และเอกภพภายใต้คลื่นวิทยุโดยที่แหล่งติดตั้งงานรับสัญญาณอยู่ที่ประเทศแอฟริกาใต้ และประเทศออสเตรเลีย ที่ประเทศแอฟริกาใต้เป็นสถานที่ตั้งสำหรับอุปกรณ์ตรวจวัดคลื่นความถี่ในช่วง (350 MHz – 15.3 GHz) ในขณะที่ประเทศออสเตรเลียเป็นสถานที่ตั้งสำหรับอุปกรณ์ตรวจวัดคลื่นความถี่ในช่วง (50 MHz – 350 MHz) ⁸ การศึกษาเชิงปฏิบัติการในเฟสแรกจะเริ่มในปีค.ศ. 2020 เฟสที่สองที่มีกำลังใน

⁸ข้อมูลจาก SKA's Baseline Design document version2 (October 2015) ที่ <https://www.skatelescope.org>

การรับสัญญาณมากกว่าเฟสแรกสลับเท่าจะเริ่มดำเนินการในประมาณปีค.ศ. 2025 หนึ่งในเป้าหมายทางวิทยาศาสตร์หลักของ SKA คือการศึกษาลักษณะทางธรรมชาติของพลังงานมืด ด้วยความสามารถของ SKA ที่สามารถตรวจจับดาราจักร HI ได้จำนวนมากโดยใช้คลื่นวิทยุความยาว 21-cm การกระบวนการปลดปล่อยพลังงานจากการพลิกกลับของสปิน (spin-flip transition) เนื่องจากความถี่ของการปลดปล่อยพลังงานในกรอบหนึ่งเท่ากับ 1420 MHz กล้องวิทยุที่มีพิสัยความถี่ในช่วง ~ 100 MHz ถึง 1420 MHz เช่น SKA สามารถที่จะตรวจจับดาราจักร HI ได้ไกลถึง $z \sim 10$ หรือยุคปฐมดารา (epoch of reionization)

สำหรับแบบจำลองการสำรวจดาราจักรแบบเสมือน SKA เราจะใช้ค่าไบแอส และค่าฟังก์ชันความหนาแน่นดาราจักรของ SKA จาก [45] ที่ได้จากการจำลอง [46] ความหนาแน่นดาราจักรต่อเรดชิฟท์ dn/dz และค่าไบแอสเชิงเส้นในรูปฟังก์ชันของเรดชิฟท์เป็น ดังนี้

$$dn/dz = 10^{6.7767} z^{2.1757} \exp(-6.6374 z), \quad (65)$$

และ

$$b_1(z) = 0.5887 \exp(0.813 z), \quad (66)$$

โดยที่ค่าพารามิเตอร์ได้จำลองให้ใกล้เคียงกับ SKA ในเฟสที่สอง

Dark Energy Spectroscopic Instrument (DESI) เป็นโครงการสำรวจดาราจักรที่ใช้กล้องโทรทรรศน์ที่ติดตั้งบนพื้นดินที่มุ่งเน้นไปในการศึกษาพลังงานมืด BAO และ การศึกษาฟังก์ชันการเติบโตผ่านการบิดเบี้ยวในปริภูมิเรดชิฟท์ ทั้งนี้โครงการ DESI เป็นโครงการที่ต่อยอดมาจากโครงการ Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) ที่ประสบความสำเร็จ [47] โครงการสำรวจจะเริ่มปฏิบัติการในปีค.ศ. 2019 โดยมีการคาดการณ์ว่าจะตรวจพบดาราจักรและควอซาร์มากกว่าหนึ่งล้านดวง ตลอดระยะเวลาห้าปีเต็มของโครงการ DESI จะครอบคลุมพื้นที่ท้องฟ้ามากกว่า 14,000 ตารางองศา โดยที่ DESI จะตรวจจับควอซาร์ผ่านดงไลแมนอัลฟา (Ly- α forest) ในช่วงเรดชิฟท์ $2.1 \lesssim z \lesssim 3.5$ สำหรับการวิเคราะห์เมทริกซ์ฟิชเชอร์ เราจะใช้ฟังก์ชันความหนาแน่นดาราจักรของ DESI baseline (ในรูปที่ 3.17 ใน [47]) และประมาณค่าไบแอสของควอซาร์จาก BOSS $b_1(z) = 3.6D_1(z = 2.4)/D_1(z = 0)$ โดยที่ $D_1(z)$ แทนฟังก์ชันการเติบโตเชิงเส้น [48]

4.4 การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนโดยเมทริกซ์ฟิชเชอร์

ผู้ทำวิจัยได้แบ่งช่วงของเรดชิฟท์สำหรับแบบจำลองการสำรวจดาราจักรออกเป็นสามช่วงที่มีพิสัยเท่ากัน ดังที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2 จากตารางได้แสดงความหนาแน่นของตัวตรวจจับดาราจักร \bar{n}_g และปริมาตรการสำรวจในสมการที่ (69) โดยเราจะเรียกเรดชิฟท์สองช่วงแรกว่า SKA1 และ SKA2 ตามลำดับ ซึ่งเป็นแบบจำลองการสำรวจที่ออกแบบมาจาก SKA เฟสที่สองโดยที่ได้นำพารามิเตอร์จากการสำรวจของ SKA ในเฟสที่สองมาคำนวณหา \bar{n}_g และ V_s ในทำนองเดียวกันช่วงเรดชิฟท์สุดท้ายออกแบบมาใกล้เคียงกับโครงการ DESI การไบแอสสำหรับแบบจำลองโครงการสำรวจคล้าย SKA และ แบบจำลองโครงการสำรวจคล้าย DESI ได้คำนวณไว้ในตารางเดียวกัน ช่วงเรดชิฟท์สองช่วงแรกเทียบเคียงกับโครงการสำรวจดาราจักรที่กินพื้นที่กว้างแต่ไม่ลึกมากนัก ส่วนช่วงเรดชิฟท์สุดท้ายเทียบเคียงกับโครงการสำรวจดาราจักรที่กินพื้นที่ไม่กว้างแต่เป็นเชิงลึก เราจะใช้ค่ากลางของเรดชิฟท์แทนค่าเรดชิฟท์ของช่วงได้แก่ $z = 0.5, 1.5$ และ 2.5 ในการคำนวณฟังก์ชันการเติบโต

ในการทำนายค่าจำกัดที่ได้จากการสำรวจเราจะใช้กระบวนการเมทริกซ์ฟิชเชอร์ [49, 50] โดยที่เมทริกซ์ฟิชเชอร์เขียนได้ ดังนี้

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} [C_{,\alpha} C^{-1} C_{,\beta} C^{-1}], \quad (67)$$

โดยที่ $F_{\alpha\beta}$ แทนองค์ประกอบของเมทริกซ์ฟิชเชอร์ \mathbf{F} \mathbf{C} แทน เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (covariance matrix) และ $C_{,\alpha} \equiv \partial C / \partial \theta_\alpha$ โดยที่ θ_α แทนพารามิเตอร์ สำหรับสเปกตรัมกำลังในปริภูมิเรดชิฟท์ $P_s(k, \mu)$ องค์ประกอบของ

เมทริกซ์ฟิชเชอร์เขียนได้ ดังนี้ [51, 52]

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk k^2 \int_0^1 d\mu \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \ln P_{s,g}(k, \mu) \times \frac{\partial}{\partial\theta_\beta} \ln P_{s,g}(k, \mu) V_{\text{eff}}(k, \mu). \quad (68)$$

ปริมาตรประสิทธิภาพการสำรวจเท่ากับ

$$V_{\text{eff}}(k, \mu) = V_s \left(\frac{\bar{n}_g P_{s,g}(k, \mu)}{1 + \bar{n}_g P_{s,g}(k, \mu)} \right)^2, \quad (69)$$

โดยที่ V_s แทนปริมาตรของการสำรวจ และ \bar{n}_g แทน ค่าเฉลี่ยความหนาแน่นดาราจักร การประมาณความคลาดเคลื่อนหาได้ในหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ฟิชเชอร์ซึ่งจะให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่เหมาะสมที่สุด σ_α ของพารามิเตอร์ θ_α โดยขอบเขต Cramé-Rao

$$\sigma_\alpha^2 \geq F_{\alpha\alpha}^{-1}. \quad (70)$$

ในกระบวนการวิธีเมทริกซ์ฟิชเชอร์จะให้ค่าคลาดเคลื่อนที่ไม่น้อยเกินจากความเป็นจริงที่สามารถทำได้ในเชิงปฏิบัติ สำหรับสเปกตรัมกำลังเชิงเส้นของสสารคำนวณจากโปรแกรม CAMB⁹ [53]

ในการทำวิจัยนี้ผู้ทำวิจัยจะมุ่งเน้นการศึกษาค่าจำกัดของพารามิเตอร์ความหนาแน่น ได้แก่ $\Omega_B h^2, \Omega_M h^2, \Omega_\Lambda$ และพารามิเตอร์สมการสถานะ ได้แก่ w_0, w_a ซึ่งพารามิเตอร์เหล่านี้มีผลกับฟังก์ชันการเติบโต (Eq. (12)-(14)) พารามิเตอร์ $\Delta_{\mathcal{R}}^2, \tau$ และ n_s เป็นพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับเฉพาะสเปกตรัมกำลังเชิงเส้นเท่านั้น และไม่มีเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันการเติบโตใด ๆ แต่เราจำเป็นที่จะต้องรวมพารามิเตอร์กลุ่มนี้เอาไว้เนื่องจากค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จากการวัด CMB ของ PLANCK เกี่ยวข้องกัน ซึ่งเราจะรวบรวมไว้เป็นค่าความคลาดเคลื่อนเบื้องต้น (prior) สำหรับการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนต่อไป นอกจากนี้ไบแอส b_1 ในสมการที่ (63) ก็จัดว่าเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญที่จำเป็นต้องนำมาคิด ทั้งนี้ผู้ทำวิจัยได้ประมาณค่าความคลาดเคลื่อนของไบแอสไว้ที่ 20% โดยการนำเอาความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากสัญญาณรบกวนต่าง ๆ และความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากอุปกรณ์ตรวจวัดรวมเข้าไปด้วย โดยท้ายที่สุดพารามิเตอร์ไบแอสจะนำไปผ่านกระบวนการมาร์จินัลไลเซชัน (marginalization) ดังนั้นพารามิเตอร์ที่เป็นองค์ประกอบของเมทริกซ์ฟิชเชอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์หาความคลาดเคลื่อนในการวิจัยนี้เป็น ดังนี้

$$\theta \equiv \{\Omega_B h^2, \Omega_M h^2, \Omega_\Lambda, w_0, w_a\}. \quad (71)$$

ค่าของพารามิเตอร์ทดลอง (fiducial parameter) สรุปลงไว้ในตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ไบแอสสำหรับแบบจำลองโครงการสำรวจดาราจักรที่แตกต่างกันสรุปลงไว้ในตารางที่ 2 ทั้งนี้เราจะสมมติในเอกภพในแต่ละแบบจำลองเอกภพเป็นแบบเรียบทั้งหมด

ค่าพารามิเตอร์ทดลองที่ใช้ในสำหรับเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเกี่ยวกับ PLANCK มาจากชุดข้อมูล planck_lowL_lowLike_highL_BAO ในฐาน base_w_wa ทั้งนี้ในชุดข้อมูลนี้มีค่า w_0 และ w_a (สมการที่ (62)) ที่แตกต่างจากค่าทดลองในงานนี้แต่ทั้งนี้เราจะสมมุติให้การแปรปรวนของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเกี่ยวกับค่าน้อยมาก ๆ สำหรับตำแหน่งที่ใกล้เคียงกันในปริภูมิพารามิเตอร์

⁹<https://camb.info/>

ตารางที่ 3: ค่าจำกัดพารามิเตอร์ที่ลดลงที่ความเชื่อมั่น 68% โดยที่ $\omega_B \equiv \Omega_B h^2$ และ $\omega_M \equiv \Omega_M h^2$ จากกระบวนการมาร์จิ้นัลไลเซนซ์

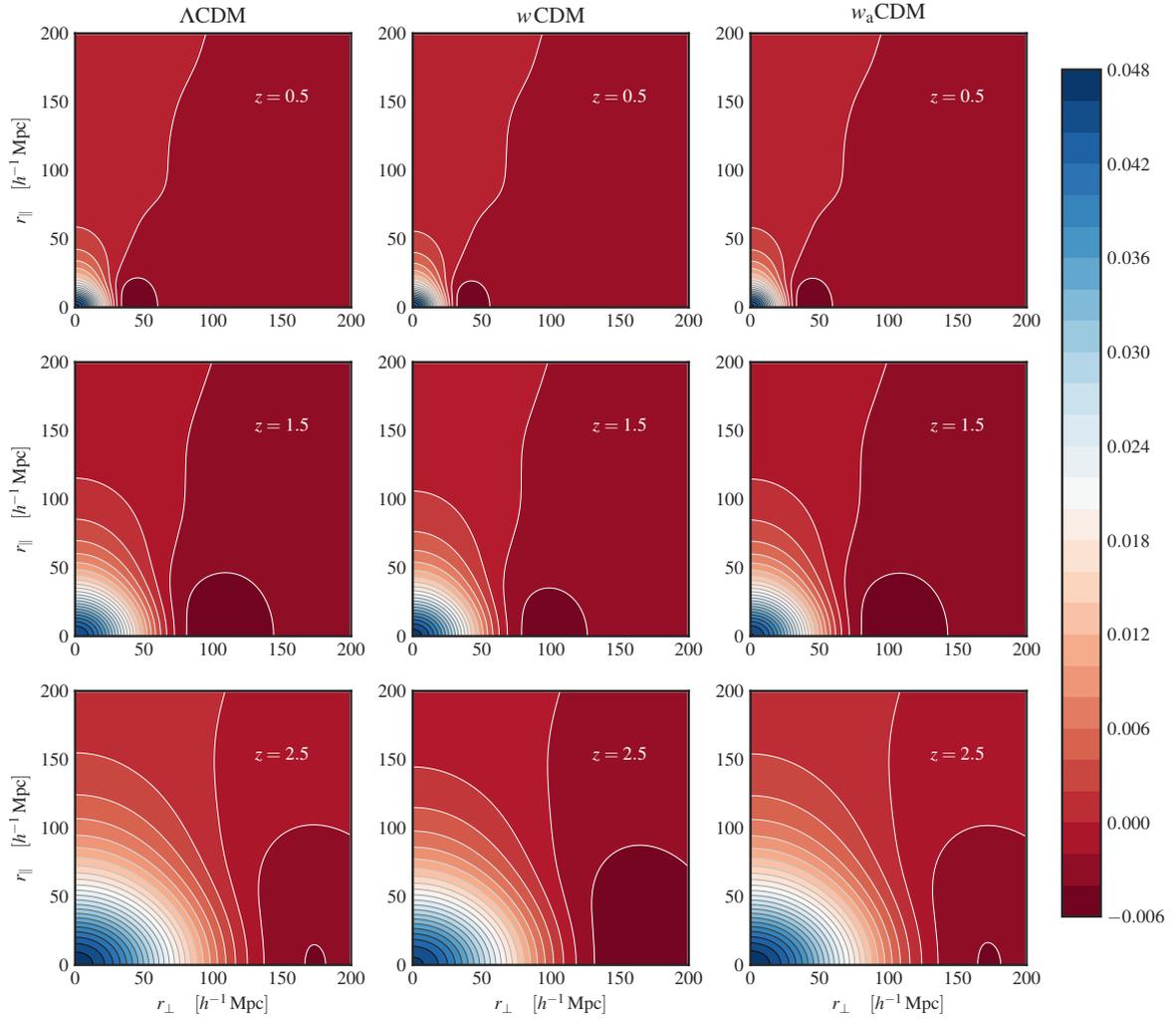
		$\sigma_{\omega_B} \times 100$	σ_{ω_M}	σ_{Ω_Λ}	σ_{w_0}	σ_{w_a}
Λ CDM	SKA1	0.1162	0.00358	0.00248	0.1764	0.6074
	SKA2	0.1689	0.00571	0.00240	0.3693	1.2106
	DESI	1.7792	0.05812	0.04672	5.0634	16.111
	All Bins	0.0780	0.00233	0.00150	0.1498	0.5080
	All Bins + PLANCK	0.0192	0.00058	0.00104	0.0918	0.3179
w CDM	SKA1	0.1180	0.00362	0.00255	0.2815	0.4355
	SKA2	0.1645	0.00545	0.00230	0.7768	1.1567
	DESI	1.5174	0.05137	0.03998	9.4672	13.988
	All Bins	0.0731	0.00220	0.00152	0.2402	0.3671
	All Bins + PLANCK	0.0193	0.00064	0.00119	0.0359	0.0636
w_a CDM	SKA1	0.1259	0.00387	0.00052	0.3519	0.6101
	SKA2	0.1691	0.00570	0.00048	0.7394	1.2328
	DESI	1.7552	0.05785	0.00936	10.640	17.789
	All Bins	0.0825	0.00248	0.00031	0.2979	0.5121
	All Bins + PLANCK	0.0194	0.00064	0.00025	0.0361	0.0778

5 ผลการศึกษา

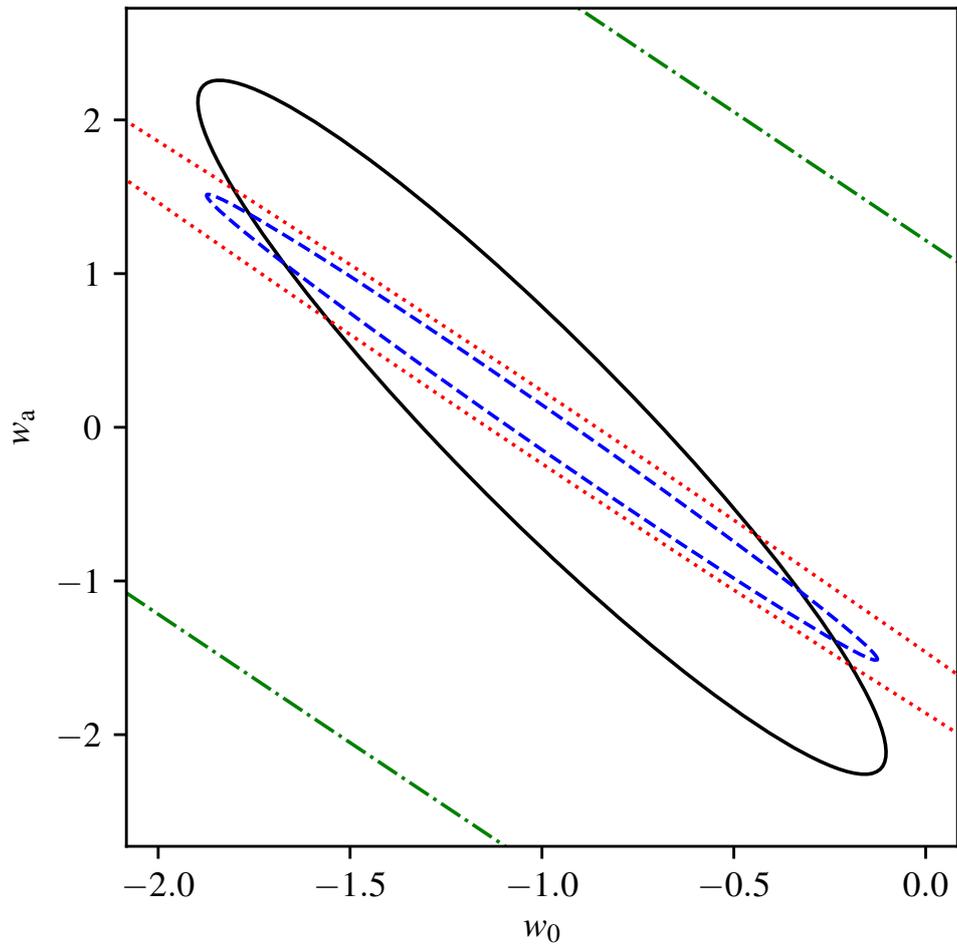
ผลที่ได้จากการศึกษาในงานวิจัยครั้งนี้ เราได้แสดงค่าสเปกตรัมกำลังเชิงเส้น เปรียบเทียบกับค่าสเปกตรัมกำลังไม่เชิงเส้นในรูปที่ 1 รูปที่ 2 แสดงค่าสัมพรรคภาพสองจุดในปริภูมิเรดชิฟท์ที่ได้จากการแปลงฟูริเยร์ของค่าสเปกตรัมกำลังไม่เชิงเส้นในปริภูมิเรดชิฟท์ในสมการที่ (48)

ในการทดสอบแบบจำลองพลังงานมืดแบบต่าง ๆ ผู้ทำวิจัยได้ประยุกต์เมทริกซ์กับค่าพารามิเตอร์ที่ลดลง ค่าจำกัดที่ความเชื่อมั่น 68% (68% confident level) หลังจากกระบวนการมาร์จิ้นัลไลเซนซ์แสดงในตารางที่ 3 ผู้ทำวิจัยได้แบ่งแบบจำลองโครงการสำรวจดารารัจกรออกเป็นสามกลุ่มเรียงตามเรดชิฟท์ ได้แก่ SKA1, SKA2 และ DESI รายละเอียดของแบบจำลองการสำรวจอยู่ในตารางที่ 1 รวมถึงแสดงค่าจำกัดที่ได้จากการรวมผลก่อนหน้าของ PLANCK และทุกเรดชิฟท์ (All bins + PLANCK)

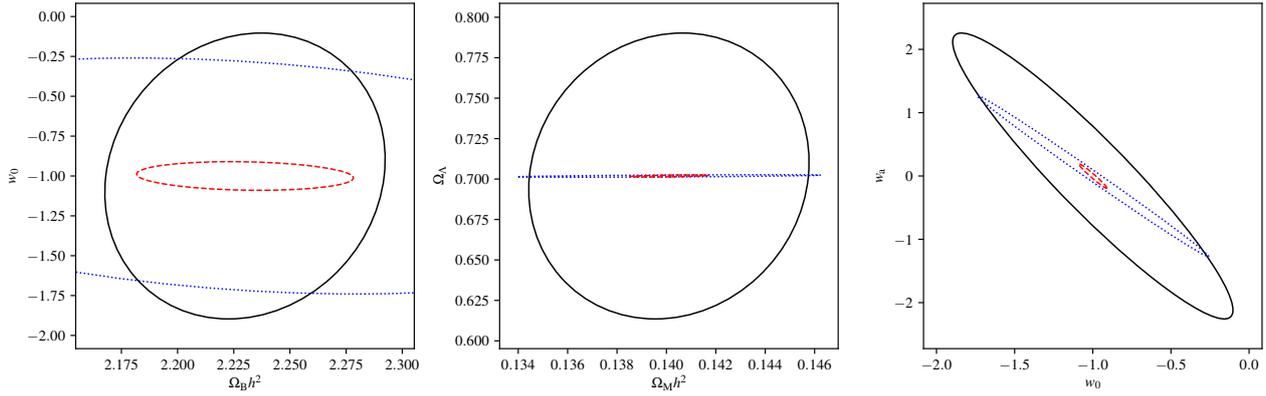
ค่าสเปกตรัมกำลังไม่เชิงเส้นโดยวิธีการ LPT โดยกระบวนการวิธีของ [32] แสดงในรูปที่ 1 จากรูปสเกลตัด (cut-off scale) ที่เกินกว่านี้จะทำให้ค่าสเปกตรัมกำลังไม่แม่นยำ มีขนาดเพิ่มขึ้นตามเรดชิฟท์ (ในปริภูมิ k) ทั้งนี้สืบเนื่องมาจากการเติบโตของสเกลไม่เชิงเส้น สเกลขนาดเล็กสามารถตรวจจับได้โดยการสำรวจที่เรดชิฟท์ที่มีค่าสูง ปริมาณข้อมูลที่ได้ไม่ได้มากขึ้นกว่าเดิมเนื่องจากจำนวนดารารัจกรที่ลดลงที่เรดชิฟท์สูง การลดลงของจำนวนดารารัจกรนั้นสืบเนื่องมาจากปัจจัยสองประการ ได้แก่ การลดลงตามธรรมชาติ และการลดความสามารถของอุปกรณ์ตรวจวัด จากรูปที่ 3 เราจะเห็นได้ว่าตำแหน่งเรดชิฟท์ที่ต่ำสุดจะให้ค่าจำกัดที่ดีที่สุด ($z = 0.0 - 1.0$) จะลดลงเรื่อย ๆ อย่างมีนัยยะเมื่อเรดชิฟท์มีค่ามากยิ่งขึ้น (ดูตารางที่ 2 ประกอบ) เนื่องจากเรดชิฟท์ในแต่ละช่วงเป็นอิสระต่อกัน เราจะได้ค่าจำกัดที่เพิ่มขึ้นการจากรอบข้อมูลในทุกเรดชิฟท์ ดังที่แสดงให้เห็นในรูปที่ 4 จากรูปเราจะเห็นได้ว่าค่าจำกัดพารามิเตอร์จากโครงการสำรวจดารารัจกรมีค่าที่ใกล้เคียง หรือดีกว่าค่าจำกัดพารามิเตอร์ที่ได้จาก PLANCK



รูปที่ 2: ค่าสหสัมพันธ์กำลังไม่เชิงเส้นในปริภูมิเรตซีฟท์แบบ LPT โดยที่ r_{\perp} แทนองค์ประกอบที่ตั้งฉากกับแนวเล็ง และ r_{\parallel} แทนองค์ประกอบที่ขนานกับแนวเล็งของเวกเตอร์ระยะทาง แบบจำลองเอกภพจากซ้ายไปขวา Λ CDM, w CDM และ w_a CDM ตามลำดับ (ดูตารางที่ 1 ประกอบ) แบบจำลองโครงการสำรวจดาราศาสตร์จากบนลงล่าง SKA1, SKA2 และ DESI ตามลำดับ



รูปที่ 3: ตัวอย่างค่าจำกัดพารามิเตอร์ w_0 และ w_a ที่ค่าความเชื่อมั่น 95% จากแบบจำลองเอกภพ w_a CDM ทั้งสามเรดชิฟต์ เส้นทึบสีดำเป็นค่าจำกัดที่ได้จาก PLANCK เท่านั้น เส้นในสุดสีน้ำเงินเป็นค่าจำกัดจาก SKA1 ที่เรดชิฟต์ต่ำสุด เส้นจุดสีแดงเป็นค่าจำกัดจาก SKA2 และ เส้นประสลัจุดนอกสุดเป็นค่าจำกัดจาก DESI ที่เรดชิฟต์สูงสุด



รูปที่ 4: ค่าจำกัดพารามิเตอร์เอกภพที่ค่าความเชื่อมั่น 95% $\Omega_B h^2$ กับ w_0 (ซ้าย) Ω_M กับ Ω_Λ (กลาง) w_0 กับ w_a (ขวา) สำหรับแบบจำลองเอกภพ w_a CDM เส้นทึบสีดำเป็นค่าจำกัดพารามิเตอร์จากสาย MCMC planck_lowL_lowLike_highL_BAO ของ PLANCK เส้นจุดสีน้ำเงินเป็นค่าจำกัดพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจดารารัจกรที่รวมทุกเรดชิฟต์ เส้นประสีแดงเป็นค่าจำกัดพารามิเตอร์ที่ได้จากการรวมการสำรวจดารารัจกรเข้ากับ PLANCK

จากรูปที่ 4 และ ตารางที่ 3 ค่าจำกัดพารามิเตอร์ของ Ω_Λ , w_0 , w_a มีการตอบสนองที่กับข้อมูลการสำรวจดารารัจกร ในขณะที่ค่าจำกัดพารามิเตอร์ของ $\Omega_M h^2$ มีการตอบสนองเพียงเล็กน้อยกับข้อมูลการสำรวจดารารัจกร ทั้งนี้เนื่องมาจากพารามิเตอร์กลุ่มที่กล่าวถึงเป็นพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันการเติบโตที่เป็นผลอย่างมากสำหรับเอกภพในยุคหลัง ในขณะที่ค่าจำกัดพารามิเตอร์ของ $\Omega_B h^2$ แทบไม่มีการตอบสนองต่อข้อมูลการสำรวจดารารัจกรเลยเมื่อเปรียบเทียบกับค่าจำกัดที่ได้จาก PLANCK (ดูกราฟด้านซ้ายมือในรูปที่ 4) แต่เมื่อพิจารณาค่าจำกัดที่ได้จากข้อมูลการสำรวจดารารัจกรรวมกับ PLANCK เราจะได้ค่าจำกัดที่ดีขึ้นสำหรับทุกพารามิเตอร์ เมื่อเปรียบเทียบค่าจำกัดที่ได้จากแบบจำลองเอกภพที่ต่างกัน จะเห็นได้ว่าค่าจำกัดที่ได้โดยส่วนใหญ่ไม่แตกต่างกันมากนัก ยกเว้นเฉพาะค่าจำกัดของ w_0 และ w_a ที่แบบจำลองเอกภพแบบ w CDM และ w_a CDM

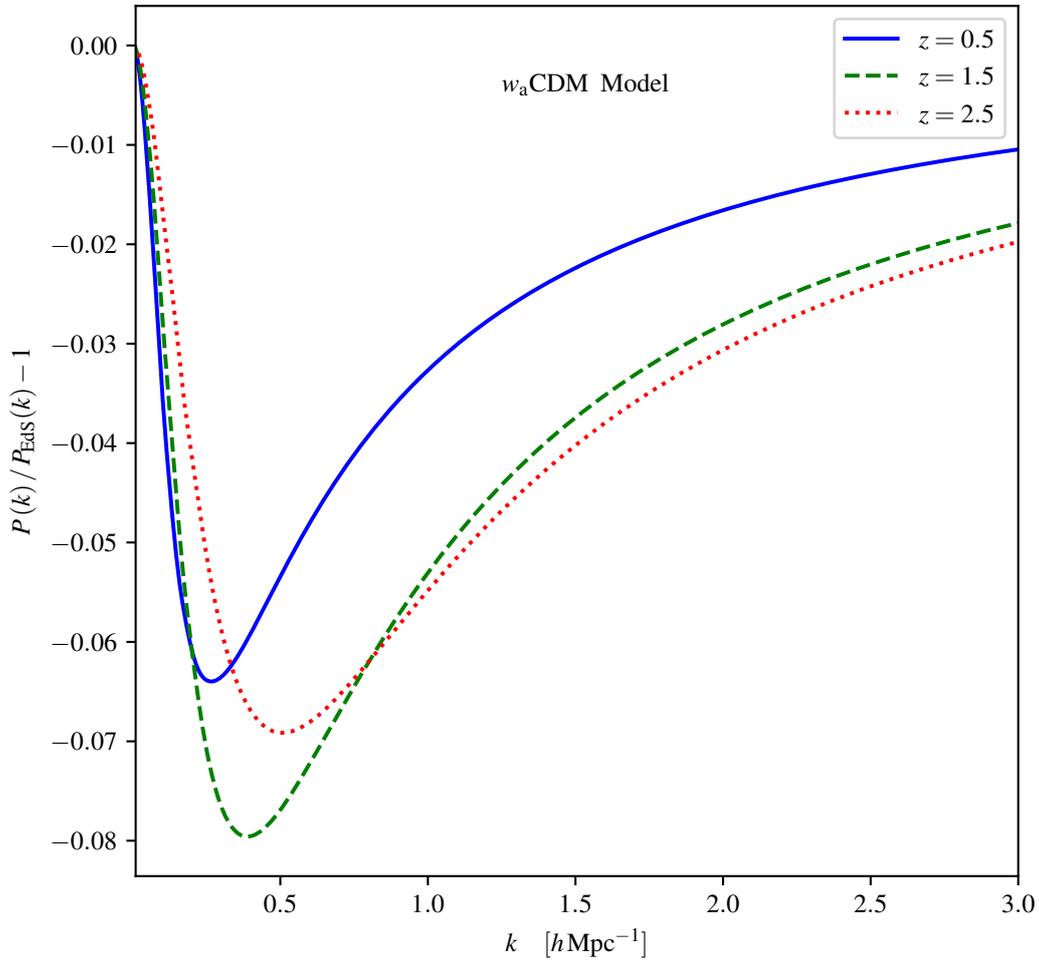
แบบจำลองการสำรวจดารารัจกรในงานวิจัยนี้จำลองมาจากโครงการสำรวจ SKA และ DESI ที่มีอยู่จริง โดยการประยุกต์ค่าพารามิเตอร์การสำรวจของ SKA สำหรับช่วงเรดชิฟท์ $z = 0.0 - 2.0$ และ ค่าพารามิเตอร์การสำรวจของ DESI สำหรับช่วงเรดชิฟท์ $z = 2.0 - 3.0$ ดังที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2 SKA ใช้การตรวจจับคลื่นสัญญาณความยาวคลื่น 21-cm ในการหาดารารัจกร HI ซึ่งพิสัยของความถี่ของกล้องวิทยุ SKA สามารถตรวจจับได้ไกลกว่าเรดชิฟท์ 2.0 ดังนั้นค่าจำกัดที่ได้จาก SKA ในแบบจำลองจึงเป็นค่าที่ไม่น้อยกว่าที่ควรจะเป็น (conservative) ในขณะที่แบบจำลองการสำรวจ DESI ที่เรดชิฟท์สูง ๆ ไม่ได้ทำให้ค่าจำกัดดีขึ้นเท่าที่ควร ผู้ทำวิจัยได้รวมค่าความคลาดเคลื่อนของพารามิเตอร์ τ , n_s และ $\Delta_{\mathcal{R}}^2$ ซึ่งเป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่สืบทอดมาจากการสำรวจ CMB ของ PLANCK อีกทั้งได้เพิ่มค่าความคลาดเคลื่อน 20% ในการวัดค่าไบแอสซึ่งได้หมายรวมถึงค่าความคลาดเคลื่อนอื่น ๆ ที่เกิดจากอุปกรณ์ตรวจวัด และสัญญาณรบกวนอื่น ๆ

เมื่อรวมค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากอุปกรณ์ตรวจวัด และสัญญาณรบกวนอื่น ๆ ในความคลาดเคลื่อนในค่าไบแอสดังที่ได้กล่าวในย่อหน้าที่แล้ว ผู้ทำวิจัยพบว่าค่าจำกัดที่ได้สำหรับพารามิเตอร์ความหนาแน่นจะอยู่ที่ $\sim 1\%$ ค่าจำกัดที่ $\sim 5\%$ สำหรับค่าพารามิเตอร์สมการสถานะ w_0 และ ค่าจำกัดที่ $\sim 60\%$ สำหรับค่าพารามิเตอร์สมการสถานะ w_a (ดูตารางที่ 3 ประกอบ) ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการทำวิจัยสอดคล้องกับงานที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันใน [54] ซึ่งค่าความแม่นยำในระดับนี้จะสามารถหักล้างแบบจำลองของพลังงานมืดแบบพลวัตได้เป็นอย่างดี นั่นก็หมายความว่า การสร้างแบบจำลองเพื่อที่จะคำนวณทางทฤษฎีจึงต้องมีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น ซึ่งหมายความว่า การใช้ฟังก์ชันการเติบโตที่ขึ้นกับเวลา

ในการรบกวนอันดับสอง และสาม (สมการที่ (12)–(14)) จึงมีนัยยะที่ควรนำมาพิจารณา งานวิจัยโดยส่วนใหญ่ที่เกี่ยวข้องกับการรบกวนแบบมาตรฐาน (SPT) หรือแบบลากรางจ์ (LPT) ใช้การประมาณค่าฟังก์ชันการเติบโตในการรบกวนอันดับที่สอง และสามที่เรียกว่าการประมาณแบบ Einstein-de Sitter [55] ในการประมาณแบบ Einstein-de Sitter เราจะทำให้ $D_2 = (3/7)D_1^2$, $D_{3a} = (5/21)D_1^3$ and $D_{3b} = (1/6)D_1^3$ ซึ่งทำให้มีฟังก์ชันการเติบโตที่ขึ้นกับเวลาเพียงตัวเดียวคือ D_1 ค่าการแปรปรวนของ D_2 , D_{3a} and D_{3b} ในปริภูมิพารามิเตอร์ที่เหมาะสมมีค่า $\sim 1\%$ เมื่อเทียบกับการประมาณแบบ Einstein-de Sitter [56] ซึ่งทำให้การประมาณแบบ Einstein-de Sitter เหมาะสม แต่จากการคำนวณที่ได้จากงานวิจัยนี้พบว่า ค่าความแปรปรวนเมื่อนำไปคำนวณสเปกตรัมกำลังไม่เชิงเส้นมีค่าได้สูงถึง $\sim 10\%$ ในรูปที่ 5 แสดงค่าอัตราส่วนความคลาดเคลื่อนเมื่อเทียบกับระหว่างสเปกตรัมกำลังไม่เชิงเส้นแบบ LPT ที่ใช้ฟังก์ชันการเติบโตอันดับสอง และสามแบบขึ้นกับเวลา $P(k)$ และ สเปกตรัมกำลังไม่เชิงเส้นที่ใช้การประมาณแบบ Einstein-de Sitter $P_{EdS}(k)$ กราฟที่ได้สอดคล้องกับ [57] แต่ในงานวิจัยนี้ได้แสดงความคลาดเคลื่อนที่หลายสเกลและเรดชิฟท์ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณฟังก์ชันการเติบโตได้สรุปไว้ในตารางที่ 1 จากกราฟจะพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนโดยเฉลี่ยจะอยู่ที่ $\sim 5\%$ แต่ก็จะมีบางช่วงสเกลและเรดชิฟท์ที่ค่าความคลาดเคลื่อนไปได้สูงถึง $\sim 10\%$ เราจะเห็นได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดจะอยู่ที่สเกล $k \sim 0.5 h \text{ Mpc}^{-1}$ ซึ่งเป็นสเกลกึ่งไม่เชิงเส้น (quasi-linear) สิ่งนี้เป็นตัวบ่งชี้ว่าหากค่าการวัดมีความแม่นยำที่สูงขึ้นการประมาณแบบ Einstein-de Sitter อาจจะไม่เหมาะสม และการพิจารณาฟังก์ชันการเติบโตที่อันดับที่สูงขึ้นย่อมจะมีความสำคัญตามลำดับ

6 สรุปผลการศึกษา

ในงานวิจัยนี้ ผู้ทำวิจัยได้ประยุกต์ใช้กระบวนการวิธีแบบการรบกวนแบบลากรางจ์โดย [32] ในการศึกษาอิทธิพลของพลังงานมืดแบบพลวัตในการวัดค่าสัมพรรคภาพ และสเปกตรัมกำลังในปริภูมิเรดชิฟท์สำหรับโครงการสำรวจดาราศาสตร์ โครงการสำรวจดาราศาสตร์ในอนาคตที่สำคัญเช่น SKA และ DESI มีความสามารถในการจำกัดขอบเขตของค่าพารามิเตอร์ความหนาแน่นได้ดีในระดับ $\sim 1\%$ ค่าพารามิเตอร์ w_0 และ w_a ในระดับ $\sim 5\%$ และ $\sim 60\%$ ตามลำดับ แต่กระนั้นก็ตามแบบจำลองทางทฤษฎีที่แม่นยำก็ยังเป็นที่ต้องการในการจำกัดค่าพารามิเตอร์ การประมาณแบบ Einstein-de Sitter ในนิยามใช้ในการวิจัยทั่วไปนั้นจำเป็นต้องพัฒนาให้ดียิ่งขึ้นเนื่องจากค่าความแม่นยำในการสำรวจเข้าใกล้ระดับ $\sim 1\%$ สำหรับผลกระทบของการใช้หรือไม่ใช้การประมาณแบบ Einstein-de Sitter ยังคงเป็นสิ่งที่ต้องศึกษาต่อไป



รูปที่ 5: อัตราส่วนระหว่างสเปกตรัมกำลังที่ใช้ฟังก์ชันการเติบโตที่เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาในอันดับที่สอง และสาม $P(k)$ เทียบกับ สเปกตรัมกำลังที่ใช้ฟังก์ชันการเติบโตที่ประมาณโดยการประมาณแบบ Einstein-de Sitter $P_{\text{EdS}}(k)$ เส้นสีน้ำเงินทึบเป็นค่าสเปกตรัมกำลังที่ $z = 0.5$ เส้นประสีเขียวเป็นค่าสเปกตรัมกำลังที่ $z = 1.5$ และ เส้นจุดสีแดงเป็นค่าสเปกตรัมกำลังที่ $z = 2.5$ ตามลำดับ ในรูปเป็นกราฟที่ได้จากแบบจำลองเอกภพ w_a CDM แต่กราฟเดียวกันที่ได้จากแบบจำลองเอกภพอื่น ๆ มีลักษณะคล้ายคลึงกัน

เอกสารอ้างอิง

- [1] S. Cole *et al.*, “The 2dF Galaxy Redshift survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications,” *MNRAS*, vol. 362, pp. 505–534, Sept. 2005.
- [2] J. P. Willis *et al.*, “The XMM Large-Scale Structure survey: an initial sample of galaxy groups and clusters to a redshift $z < 0.6^*$,” *MNRAS*, vol. 363, pp. 675–691, Oct. 2005.
- [3] P. J. E. Peebles, *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, 1980.
- [4] W. H. Press and P. Schechter, “Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation,” *ApJ*, vol. 187, pp. 425–438, Feb. 1974.
- [5] R. K. Sheth and G. Tormen, “Large-scale Bias and the Peak Background Split,” *MNRAS*, vol. 308, pp. 119–126, Sept. 1999.
- [6] E. Bertschinger, “Simulations of Structure Formation in the Universe,” *ARA & A*, vol. 36, pp. 599–654, 1998.
- [7] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant,” *AJ*, vol. 116, pp. 1009–1038, Sept. 1998.
- [8] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and T. S. C. Project, “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae,” *ApJ*, vol. 517, pp. 565–586, June 1999.
- [9] G. Efstathiou, S. Moody, J. A. Peacock, W. J. Percival, C. Baugh, J. Bland-Hawthorn, T. Bridges, R. Cannon, S. Cole, M. Colless, C. Collins, W. Couch, G. Dalton, R. de Propris, S. P. Driver, R. S. Ellis, C. S. Frenk, K. Glazebrook, C. Jackson, O. Lahav, I. Lewis, S. Lumsden, S. Maddox, P. Norberg, B. A. Peterson, W. Sutherland, and K. Taylor, “Evidence for a non-zero Λ and a low matter density from a combined analysis of the 2dF Galaxy Redshift Survey and cosmic microwave background anisotropies,” *MNRAS*, vol. 330, pp. L29–L35, Feb. 2002.
- [10] A. H. Jaffe, P. A. Ade, A. Balbi, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, K. Coble, B. P. Crill, P. de Bernardis, P. Farese, P. G. Ferreira, K. Ganga, M. Giacometti, S. Hanany, E. Hivon, V. V. Hristov, A. Iacoangeli, A. E. Lange, A. T. Lee, L. Martinis, S. Masi, P. D.

- Mauskopf, A. Melchiorri, T. Montroy, C. B. Netterfield, S. Oh, E. Pascale, F. Piacentini, D. Pogosyan, S. Prunet, B. Rabbii, S. Rao, P. L. Richards, G. Romeo, J. E. Ruhl, F. Scaramuzzi, D. Sforna, G. F. Smoot, R. Stompor, C. D. Winant, and J. H. Wu, “Cosmology from MAXIMA-1, BOOMERANG, and COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations,” *Physical Review Letters*, vol. 86, pp. 3475–3479, Apr. 2001.
- [11] C. Pryke, N. W. Halverson, E. M. Leitch, J. Kovac, J. E. Carlstrom, W. L. Holzapfel, and M. Dragovan, “Cosmological Parameter Extraction from the First Season of Observations with the Degree Angular Scale Interferometer,” *ApJ*, vol. 568, pp. 46–51, Mar. 2002.
- [12] D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré, M. R.olta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, H. V. Peiris, L. Verde, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright, “Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology,” *ApJS*, vol. 170, pp. 377–408, June 2007.
- [13] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Bacigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al., “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” *ArXiv e-prints*, Feb. 2015.
- [14] D. J. Eisenstein, I. Zehavi, D. W. Hogg, R. Scoccimarro, M. R. Blanton, R. C. Nichol, R. Scranton, H.-J. Seo, M. Tegmark, Z. Zheng, S. F. Anderson, J. Annis, N. Bahcall, J. Brinkmann, S. Burles, F. J. Castander, A. Connolly, I. Csabai, M. Doi, M. Fukugita, J. A. Frieman, K. Glazebrook, J. E. Gunn, J. S. Hendry, G. Hennessy, Z. Ivezić, S. Kent, G. R. Knapp, H. Lin, Y.-S. Loh, R. H. Lupton, B. Margon, T. A. McKay, A. Meiksin, J. A. Munn, A. Pope, M. W. Richmond, D. Schlegel, D. P. Schneider, K. Shimasaku, C. Stoughton, M. A. Strauss, M. SubbaRao, A. S. Szalay, I. Szapudi, D. L. Tucker, B. Yanny, and D. G. York, “Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies,” *ApJ*, vol. 633, pp. 560–574, Nov. 2005.
- [15] W. L. Freedman, B. F. Madore, V. Scowcroft, C. Burns, A. Monson, S. E. Persson, M. Seibert, and J. Rigby, “Carnegie Hubble Program: A Mid-infrared Calibration of the Hubble Constant,” *ApJ*, vol. 758, p. 24, Oct. 2012.
- [16] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner, “The cosmological constant,” *ARA & A*, vol. 30, pp. 499–542, 1992.
- [17] P. J. Peebles and B. Ratra, “The cosmological constant and dark energy,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 75, pp. 559–606, Apr. 2003.
- [18] T. Padmanabhan, “Cosmological constant—the weight of the vacuum,” *Phys. Rep.*, vol. 380, pp. 235–320, July 2003.

- [19] M. Tegmark, D. J. Eisenstein, M. A. Strauss, D. H. Weinberg, M. R. Blanton, J. A. Frieman, M. Fukugita, J. E. Gunn, A. J. S. Hamilton, G. R. Knapp, R. C. Nichol, J. P. Ostriker, N. Padmanabhan, W. J. Percival, D. J. Schlegel, D. P. Schneider, R. Scoccimarro, U. Seljak, H.-J. Seo, M. Swanson, A. S. Szalay, M. S. Vogeley, J. Yoo, I. Zehavi, K. Abazajian, S. F. Anderson, J. Annis, N. A. Bahcall, B. Bassett, A. Berlind, J. Brinkmann, T. Budavari, F. Castander, A. Connolly, I. Csabai, M. Doi, D. P. Finkbeiner, B. Gillespie, K. Glazebrook, G. S. Hennessey, D. W. Hogg, Ž. Ivezić, B. Jain, D. Johnston, S. Kent, D. Q. Lamb, B. C. Lee, H. Lin, J. Loveday, R. H. Lupton, J. A. Munn, K. Pan, C. Park, J. Peoples, J. R. Pier, A. Pope, M. Richmond, C. Rockosi, R. Scranton, R. K. Sheth, A. Stebbins, C. Stoughton, I. Szapudi, D. L. Tucker, D. E. vanden Berk, B. Yanny, and D. G. York, “Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 123507, Dec. 2006.
- [20] W. J. Percival *et al.*, “Measuring the Matter Density Using Baryon Oscillations in the SDSS,” *ApJ*, vol. 657, pp. 51–55, Mar. 2007.
- [21] W. J. Percival, B. A. Reid, D. J. Eisenstein, N. A. Bahcall, T. Budavari, J. A. Frieman, M. Fukugita, J. E. Gunn, Ž. Ivezić, G. R. Knapp, R. G. Kron, J. Loveday, R. H. Lupton, T. A. McKay, A. Meiksin, R. C. Nichol, A. C. Pope, D. J. Schlegel, D. P. Schneider, D. N. Spergel, C. Stoughton, M. A. Strauss, A. S. Szalay, M. Tegmark, M. S. Vogeley, D. H. Weinberg, D. G. York, and I. Zehavi, “Baryon acoustic oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample,” *MNRAS*, vol. 401, pp. 2148–2168, Feb. 2010.
- [22] E. A. Kazin, M. R. Blanton, R. Scoccimarro, C. K. McBride, A. A. Berlind, N. A. Bahcall, J. Brinkmann, P. Czarapata, J. A. Frieman, S. M. Kent, D. P. Schneider, and A. S. Szalay, “The Baryonic Acoustic Feature and Large-Scale Clustering in the Sloan Digital Sky Survey Luminous Red Galaxy Sample,” *ApJ*, vol. 710, pp. 1444–1461, Feb. 2010.
- [23] F. Beutler, C. Blake, M. Colless, D. H. Jones, L. Staveley-Smith, L. Campbell, Q. Parker, W. Saunders, and F. Watson, “The 6dF Galaxy Survey: baryon acoustic oscillations and the local Hubble constant,” *MNRAS*, vol. 416, pp. 3017–3032, Oct. 2011.
- [24] A. Albrecht, G. Bernstein, R. Cahn, W. L. Freedman, J. Hewitt, W. Hu, J. Huth, M. Kamionkowski, E. W. Kolb, L. Knox, J. C. Mather, S. Staggs, and N. B. Suntzeff, “Report of the Dark Energy Task Force,” *ArXiv Astrophysics e-prints*, Sept. 2006.
- [25] LSST Science Collaboration, P. A. Abell, J. Allison, S. F. Anderson, J. R. Andrew, J. R. P. Angel, L. Armus, D. Arnett, S. J. Asztalos, T. S. Axelrod, and et al., “LSST Science Book, Version 2.0,” *ArXiv e-prints*, Dec. 2009.
- [26] J. Green, P. Schechter, C. Baltay, R. Bean, D. Bennett, R. Brown, C. Conselice, M. Donahue, X. Fan, B. S. Gaudi, C. Hirata, J. Kalirai, T. Lauer, B. Nichol, N. Padmanabhan, S. Perlmutter, B. Rauscher, J. Rhodes, T. Roellig, D. Stern, T. Sumi, A. Tanner, Y. Wang, D. Weinberg, E. Wright, N. Gehrels, R. Sambruna, W. Traub, J. Anderson, K. Cook, P. Garnavich, L. Hillenbrand, Z. Ivezić, E. Kerins, J. Lunine, P. McDonald, M. Penny, M. Phillips,

- G. Rieke, A. Riess, R. van der Marel, R. K. Barry, E. Cheng, D. Content, R. Cutri, R. Goullioud, K. Grady, G. Helou, C. Jackson, J. Kruk, M. Melton, C. Peddie, N. Rioux, and M. Seiffert, “Wide-Field InfraRed Survey Telescope (WFIRST) Final Report,” *ArXiv e-prints*, Aug. 2012.
- [27] M. H. Goroff, B. Grinstein, S.-J. Rey, and M. B. Wise, “Coupling of modes of cosmological mass density fluctuations,” *ApJ*, vol. 311, pp. 6–14, Dec. 1986.
- [28] B. Jain and E. Bertschinger, “Second-order power spectrum and nonlinear evolution at high redshift,” *ApJ*, vol. 431, pp. 495–505, Aug. 1994.
- [29] R. Scoccimarro and J. Frieman, “Loop Corrections in Nonlinear Cosmological Perturbation Theory,” *ApJS*, vol. 105, p. 37, July 1996.
- [30] Y. B. Zel’dovich, “Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations.,” *A&A*, vol. 5, pp. 84–89, Mar. 1970.
- [31] F. R. Bouchet, S. Colombi, E. Hivon, and R. Juszkiewicz, “Perturbative Lagrangian approach to gravitational instability.,” *A&A*, vol. 296, p. 575, Apr. 1995.
- [32] T. Matsubara, “Resumming cosmological perturbations via the Lagrangian picture: One-loop results in real space and in redshift space,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 063530, Mar. 2008.
- [33] F. Bernardeau *et al.*, “Large-scale structure of the Universe and cosmological perturbation theory,” *Phy. Rept.*, vol. 367, pp. 1–248, Sept. 2002.
- [34] J. Carlson, M. White, and N. Padmanabhan, “Critical look at cosmological perturbation theory techniques,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 043531, Aug. 2009.
- [35] A. N. Taylor and A. J. S. Hamilton, “Non-linear cosmological power spectra in real and redshift space,” *MNRAS*, vol. 282, pp. 767–778, Oct. 1996.
- [36] Planck Collaboration, “Planck 2013 Results. XXIV. Constraints on primordial non-Gaussianity,” *ArXiv e-prints*, Mar. 2013.
- [37] C. Alcock and B. Paczynski, “An evolution free test for non-zero cosmological constant,” *Nature*, vol. 281, p. 358, Oct. 1979.
- [38] M. Chevallier and D. Polarski, “Accelerating Universes with Scaling Dark Matter,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 10, pp. 213–223, 2001.
- [39] E. V. Linder, “Exploring the Expansion History of the Universe,” *Physical Review Letters*, vol. 90, p. 091301, Mar. 2003.
- [40] Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, R. Battye, K. Benabed, J.-P. Bernard, M. Bersanelli, P. Bielewicz, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, F. R. Bouchet,

F. Boulanger, M. Bucher, C. Burigana, R. C. Butler, E. Calabrese, J.-F. Cardoso, J. Carron, A. Challinor, H. C. Chiang, J. Chluba, L. P. L. Colombo, C. Combet, D. Contreras, B. P. Crill, F. Cuttaia, P. de Bernardis, G. de Zotti, J. Delabrouille, J.-M. Delouis, E. Di Valentino, J. M. Diego, O. Doré, M. Douspis, A. Ducout, X. Dupac, S. Dusini, G. Efstathiou, F. Elsner, T. A. Enßlin, H. K. Eriksen, Y. Fantaye, M. Farhang, J. Fergusson, R. Fernandez-Cobos, F. Finelli, F. Forastieri, M. Frailis, E. Franceschi, A. Frolov, S. Galeotta, S. Galli, K. Ganga, R. T. Génova-Santos, M. Gerbino, T. Ghosh, J. González-Nuevo, K. M. Górski, S. Gratton, A. Gruppuso, J. E. Gudmundsson, J. Hamann, W. Handley, D. Herranz, E. Hivon, Z. Huang, A. H. Jaffe, W. C. Jones, A. Karakci, E. Keihänen, R. Keskitalo, K. Kiiveri, J. Kim, T. S. Kisner, L. Knox, N. Krachmalnicoff, M. Kunz, H. Kurki-Suonio, G. Lagache, J.-M. Lamarre, A. Lasenby, M. Lattanzi, C. R. Lawrence, M. Le Jeune, P. Lemos, J. Lesgourgues, F. Levrier, A. Lewis, M. Liguori, P. B. Lilje, M. Lilley, V. Lindholm, M. López-Cañiego, P. M. Lubin, Y.-Z. Ma, J. F. Macías-Pérez, G. Maggio, D. Maino, N. Mandolesi, A. Mangilli, A. Marcos-Caballero, M. Maris, P. G. Martin, M. Martinelli, E. Martínez-González, S. Matarrese, N. Mauri, J. D. McEwen, P. R. Meinhold, A. Melchiorri, A. Mennella, M. Migliaccio, M. Millea, S. Mitra, M.-A. Miville-Deschênes, D. Molinari, L. Montier, G. Morgante, A. Moss, P. Natoli, H. U. Nørgaard-Nielsen, L. Pagano, D. Paoletti, B. Partridge, G. Patanchon, H. V. Peiris, F. Perrotta, V. Pettorino, F. Piacentini, L. Polastri, G. Polenta, J.-L. Puget, J. P. Rachen, M. Reinecke, M. Remazeilles, A. Renzi, G. Rocha, C. Rosset, G. Roudier, J. A. Rubiño-Martín, B. Ruiz-Granados, L. Salvati, M. Sandri, M. Savelainen, D. Scott, E. P. S. Shellard, C. Sirignano, G. Sirri, L. D. Spencer, R. Sunyaev, A.-S. Suur-Uski, J. A. Tauber, D. Tavagnacco, M. Tenti, L. Toffolatti, M. Tomasi, T. Trombetti, L. Valenziano, J. Valiviita, B. Van Tent, L. Vibert, P. Vielva, F. Villa, N. Vittorio, B. D. Wandelt, I. K. Wehus, M. White, S. D. M. White, A. Zacchei, and A. Zonca, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *ArXiv e-prints*, July 2018.

- [41] S. Alam, F. D. Albareti, C. Allende Prieto, F. Anders, S. F. Anderson, T. Anderton, B. H. Andrews, E. Armengaud, É. Aubourg, S. Bailey, and et al., “The Eleventh and Twelfth Data Releases of the Sloan Digital Sky Survey: Final Data from SDSS-III,” *ApJS*, vol. 219, p. 12, July 2015.
- [42] D. H. Jones, M. A. Read, W. Saunders, M. Colless, T. Jarrett, Q. A. Parker, A. P. Fairall, T. Mauch, E. M. Sadler, F. G. Watson, D. Burton, L. A. Campbell, P. Cass, S. M. Croom, J. Dawe, K. Fiegert, L. Frankcombe, M. Hartley, J. Huchra, D. James, E. Kirby, O. Lahav, J. Lucey, G. A. Mamon, L. Moore, B. A. Peterson, S. Prior, D. Proust, K. Russell, V. Safouris, K.-I. Wakamatsu, E. Westra, and M. Williams, “The 6dF Galaxy Survey: final redshift release (DR3) and southern large-scale structures,” *MNRAS*, vol. 399, pp. 683–698, Oct. 2009.
- [43] N. Kaiser, “On the spatial correlations of Abell clusters,” *ApJL*, vol. 284, pp. L9–L12, Sept. 1984.

- [44] J. N. Fry and E. Gaztanaga, “Biasing and hierarchical statistics in large-scale structure,” *ApJ*, vol. 413, pp. 447–452, Aug. 1993.
- [45] M. Santos, D. Alonso, P. Bull, M. B. Silva, and S. Yahya, “HI galaxy simulations for the SKA: number counts and bias,” *Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14)*, p. 21, Apr. 2015.
- [46] D. Obreschkow, H.-R. Klöckner, I. Heywood, F. Levrier, and S. Rawlings, “A Virtual Sky with Extragalactic H I and CO Lines for the Square Kilometre Array and the Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array,” *ApJ*, vol. 703, pp. 1890–1903, Oct. 2009.
- [47] DESI Collaboration, A. Aghamousa, J. Aguilar, S. Ahlen, S. Alam, L. E. Allen, C. Allende Prieto, J. Annis, S. Bailey, C. Balland, and et al., “The DESI Experiment Part I: Science, Targeting, and Survey Design,” *ArXiv e-prints*, Oct. 2016.
- [48] A. Font-Ribera, E. Arnau, J. Miralda-Escudé, E. Rollinde, J. Brinkmann, J. R. Brownstein, K.-G. Lee, A. D. Myers, N. Palanque-Delabrouille, I. Pâris, P. Petitjean, J. Rich, N. P. Ross, D. P. Schneider, and M. White, “The large-scale quasar-Lyman α forest cross-correlation from BOSS,” *JCAP*, vol. 5, p. 018, May 2013.
- [49] R. A. Fisher, “The logic of inductive inference,” *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 98, no. 1, pp. 39–82, 1935.
- [50] A. Heavens, “Statistical techniques in cosmology,” *ArXiv e-prints*, June 2009.
- [51] M. Tegmark, “Measuring Cosmological Parameters with Galaxy Surveys,” *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 3806–3809, Nov. 1997.
- [52] H.-J. Seo and D. J. Eisenstein, “Probing Dark Energy with Baryonic Acoustic Oscillations from Future Large Galaxy Redshift Surveys,” *ApJ*, vol. 598, pp. 720–740, Dec. 2003.
- [53] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby, “Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models,” *ApJ*, vol. 538, pp. 473–476, 2000.
- [54] P. Bull, “Extending Cosmological Tests of General Relativity with the Square Kilometre Array,” *ApJ*, vol. 817, p. 26, Jan. 2016.
- [55] D. Jeong and E. Komatsu, “Perturbation Theory Reloaded: Analytical Calculation of Non-linearity in Baryonic Oscillations in the Real-Space Matter Power Spectrum,” *ApJ*, vol. 651, pp. 619–626, Nov. 2006.
- [56] F. R. Bouchet, S. Colombi, E. Hivon, and R. Juszkiewicz, “Perturbative Lagrangian approach to gravitational instability,” *A&A*, vol. 296, p. 575, Apr. 1995.
- [57] T. Hiramatsu and A. Taruya, “Chasing the nonlinear evolution of matter power spectrum with a numerical resummation method: Solution of closure equations,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 103526, May 2009.

Output ที่ได้

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ

- **T. Chantavat**, “Time-dependent Lagrangian Perturbation Theory with The Dynamical Dark Energy,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 883, 012003, 2017.

ผลงานวิจัยที่กำลังอยู่ในระหว่างการพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ

- C. Kaeonikhom and **T. Chantavat**, “Redshift-space Distortion from Dynamical Dark Energy with Time-dependent Lagrange Perturbation Theory”, submitted to *Physical Review D*.

ภาคผนวก

เอกสารแนบ 1 ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

Time-dependent Lagrangian Perturbation Theory with The Dynamical Dark Energy

This content has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text.

2017 J. Phys.: Conf. Ser. 883 012003

(<http://iopscience.iop.org/1742-6596/883/1/012003>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 49.231.30.9

This content was downloaded on 04/09/2017 at 08:45

Please note that [terms and conditions apply](#).

You may also be interested in:

[Transients from initial conditions based on Lagrangian perturbation theory in N-body simulations II: the effect of the transverse mode](#)

Takayuki Tatekawa

[Addendum: one-point remapping of Lagrangian perturbation theory in the mildly non-linear regime of cosmic structure formation](#)

Florent Leclercq, Jens Jasche and Benjamin Wandelt

[Wave mechanics and the adhesion approximation](#)

C J Short and P Coles

[MASS EXCHANGE AND THE LAGRANGIAN POINTS I](#)

J. B. Tatum

[An Empirically Driven Time-Dependent Model of the Solar Wind](#)

Jon A. Linker, Ronald M. Caplan, Cooper Downs et al.

[Propagator for a Time-Dependent Damped Harmonic Oscillator with a Force Quadratic in Velocity](#)

Huang Bo-Wen, Gu Zhi-Yu and Qian Shang-Wu

[Rashba Effect in Presence of Time-Dependent Interaction](#)

Hadi Sobhani and Hassan Hassanabadi

[The recursion relation in Lagrangian perturbation theory](#)

Cornelius Rampf

Time-dependent Lagrangian Perturbation Theory with The Dynamical Dark Energy

Teeraparb Chantavat¹

¹ ThEP's Laboratory of Cosmology and Gravity, The Institute for Fundamental Study
"The Tah Poe Academia Institute", Naresuan University, Phitsanulok, 65000, Thailand

E-mail: teeraparbc@nu.ac.th

Abstract. This article gives a brief overview of the time-dependent Lagrangian perturbation theory as a theoretical tool to predict the behavior of galaxy clustering in quasi-linear regimes. While most of the Lagrangian perturbation theories are based on an Einstein-De Sitter space where the growth function is time independent, more accurate theoretical predictions could be achieved by time-dependent growth functions in a more general cosmology. This is directly applicable to the dynamical dark-energy where the clustering behavior can be recognized with time-dependent growth functions.

1. Introduction

One of the main goals of cosmology is to understand the large-scale structure of the Universe. The structures that we see in the galaxy surveys today are derived from the widely accepted gravitational instability with primordial matter density fluctuations [1, 2]. A quantitative understanding of the dynamics of the structure formation requires a theoretical modeling that can be applied with statistical tools to test the theory against observations. Predicting the behavior of the formation of the structures is crucially important as a direct way to validate the current dynamical theory of gravity with the observations such as the Baryonic Acoustic Oscillations (BAOs) [3]. As a simple, but accurate, model for numerical predictions, an irrotational and pressureless fluid of cold dark matter physics is normally considered in the non-relativistic regime [4]. The observable could, in principle, be predicted. When higher-order terms are considered, one would expect that the numerical predictions should be more accurate; however, with the cost of higher complexities and computational time.

There are two main classes of non-relativistic cosmological perturbation theory. One is expressed observable quantities in terms of the Eulerian frame, called Standard Perturbation Theory (SPT) [5, 6, 7]. Other one is given in the Lagrangian frame, call Lagrangian Perturbation Theory (LPT) [8, 9]. This *article* I shall give a brief overview of the time dependent Lagrangian perturbation theory up to the third order with is sufficiently high enough for accurate numerical predictions especially the applications of the dynamical dark energy where the equation of state is a function of time.

2. Lagrangian Perturbation Theory

In Lagrangian perturbation theory, the dynamical variable is the displacement field $\mathbf{x}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Psi}(\mathbf{q}, t)$, where $\mathbf{\Psi}$ is the displacement field, \mathbf{q} is the position of the particle at the initial



time. The dynamical equation is given by

$$J(\mathbf{q}, t) \nabla \cdot \left[\frac{d^2}{dt^2} \Psi + 2H(t) \frac{d}{dt} \Psi \right] = \frac{3}{2} \Omega_M(t) H^2(t) (J - 1), \quad (1)$$

where $J(\mathbf{q}, t)$ is the Jacobian of the transformation between \mathbf{x} and \mathbf{q} . The Hubble parameter, $H(t)$, composes of the component of the universe mainly cold dark matter $\Omega_M(t)$ and dynamical dark energy $\Omega_{DE}(t)$ with the constant curvature parameter k .

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \Omega_M(t) + \Omega_{DE}(t) - \frac{kc^2}{a^2(t)}. \quad (2)$$

The dark energy depends on the equation of state parameter as

$$w(t) = w_0 + w_1 \frac{z(t)}{1 + z(t)}, \quad (3)$$

where $z(t)$ is the redshift w_0 and w_1 are constants [10, 11].

3. The Evolution Equations for Perturbations

In order to describe the large scale structure that we see in the universe, we shall expand the density field and the velocity field as

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \delta_1(\mathbf{x}, t) + \delta_2(\mathbf{x}, t) + \dots, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_2(\mathbf{x}, t) + \dots, \quad (5)$$

where δ_n and \mathbf{v}_n is the corresponding n th order perturbative overdensity and velocity field respectively.

3.1. First Order

To the first order, we can write the overdensity as

$$\delta_1(\mathbf{x}, t) = D_1(t) \epsilon, \quad (6)$$

where $D_1(t)$ is the linear growth function. $\epsilon(\mathbf{x})$ is the initial background overdensity. The linear growth function can be found by solving the second-order differential equation with appropriated initial conditions;

$$\ddot{D}_1 + 2H\dot{D}_1 - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_1 = 0. \quad (7)$$

3.2. Second Order

In order to calculate the second order term, the velocity potential, $\varphi(\mathbf{x})$, is needed,

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) = -\dot{D}_1 \nabla \varphi(\mathbf{x}). \quad (8)$$

It turns out that the time-dependent growth function for the second-order perturbation $D_2(t)$ is given by

$$\ddot{D}_2 + 2H\dot{D}_2 - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_2 = \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_1^2. \quad (9)$$

As one can see the second order growth function is proportional to D_1^2 .

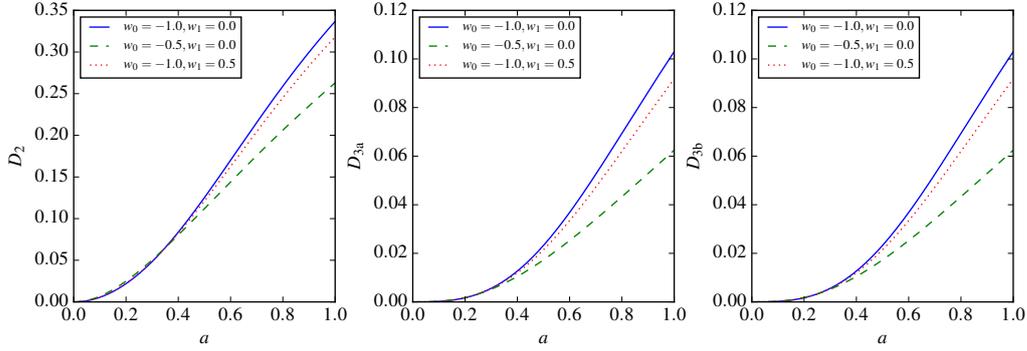


Figure 1. The time evolution functions for third order terms $\Omega_{M,0} = 0.3$, $\Omega_{DE,0} = 0.7$ for different values of w_0 and w_1 with the normalization condition $D_1 = 1$ at $a = 1$.

3.3. Third Order

There are two time dependent growth functions for the third order terms $D_{3a}(t)$ and $D_{3b}(t)$ which are given by

$$\ddot{D}_{3a} + 2H\dot{D}_{3a} - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_{3a} = \frac{3}{2}\Omega_M H^2 (D_1^3 + 3D_1 D_2), \quad (10)$$

$$\ddot{D}_{3b} + 2H\dot{D}_{3b} - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_{3b} = \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_1^3. \quad (11)$$

Similar, to the second-order growth function, the third-order growth functions are proportional to D_1^3 .

4. Results

In this article, we shall assume a flat cosmology with dark energy component i.e. $\Omega_{M,0} = 0.3$, $\Omega_{DE,0} = 0.7$ and $k = 0$. The time evolution equations are solved using fourth order Runge-Kutta method with the condition $D_1(a = 1) = 1$ i.e. the linear growth function is equal to unity at the present epoch. The second and third-order growth functions are shown in FIG. 1 for different cosmological models with different value of w_0 and w_1 . The growth functions are sensitive to the equation of state parameter of the dynamical dark energy. The difference in growth rate is more pronounced at the present epoch.

5. Conclusions

We study the third order Lagrangian perturbation theory and derive the time dependent evolution functions. We find that there are different growth functions for different perturbative orders; however, there are two independent evolution functions for the third-order quantities which describe different terms in the expansion. The evolution function is sensitive to the equation of state parameter of the dynamical dark energy w which is helpful for large-scale structure surveys, where the effect of time-dependent w would be discernible. While the effect of w on large-scale structure would look marginally different from the time-independent one's, it is possible to stack the differences in many redshift slides to amplify the difference. This can be achieved with the the Alcock-Paczyński (AP) test [12] where the change in the angular diameter distance can be recognized. Our approach is advantageous to the standard perturbation theory (SPT) approach since we only need to specify the initial conditions for the first order quantities in the density and velocity field.

References

- [1] Peebles P J E 1980 *The large-scale structure of the universe*
- [2] Peebles P J E 1993 *Principles of Physical Cosmology*
- [3] Eisenstein D J and Hu W 1998 *ApJ* **496** 605–614 (*Preprint astro-ph/9709112*)

- [4] Carlson J, White M and Padmanabhan N 2009 *Physical Review D* **80** 043531 (*Preprint* [0905.0479](#))
- [5] Goroff M H, Grinstein B, Rey S J and Wise M B 1986 *ApJ* **311** 6–14
- [6] Jain B and Bertschinger E 1994 *ApJ* **431** 495–505 (*Preprint* [astro-ph/9311070](#))
- [7] Scoccimarro R and Frieman J 1996 *ApJS* **105** 37 (*Preprint* [astro-ph/9509047](#))
- [8] Zel'dovich Y B 1970 *A&A* **5** 84–89
- [9] Bouchet F R, Colombi S, Hivon E and Juszkiewicz R 1995 *A&A* **296** 575 (*Preprint* [astro-ph/9406013](#))
- [10] Chevallier M and Polarski D 2001 *International Journal of Modern Physics D* **10** 213–223 (*Preprint* [gr-qc/0009008](#))
- [11] Linder E V 2003 *Physical Review Letters* **90** 091301 (*Preprint* [astro-ph/0208512](#))
- [12] Alcock C and Paczynski B 1979 *Nature* **281** 358

เอกสารแนบ 2 ผลงานวิจัยที่กำลังอยู่ในระหว่างการ
พิจารณาตีพิมพ์

Redshift-space Distortion from Dynamical Dark Energy with Time-dependent Lagrange Perturbation Theory

Chakkrit Kaeonikhom¹ and Teeraparb Chantavat^{2,3,*}

¹*Department of Physics and General Science, Chiang Mai Rajabhat University, Chiang Mai, 50300, Thailand*

²*ThEP's Laboratory of Cosmology and Gravity, The Institute for Fundamental Study "The Tah Poe Academia Institute", Naresuan University, Phitsanulok, 65000, Thailand*

³*Thailand Center of Excellence in Physics, Ministry of Education, Bangkok 10400, Thailand*

(Dated: September 5, 2018)

We apply the Lagrange perturbation theory with time-dependent growth functions at second and third order of perturbation with the aim to model the effect of the dynamical dark energy on the redshift-space distortions. Our fiducial galaxy redshift surveys are modeled after the upcoming SKA and DESI redshift surveys. We include PLANCK CMB priors and the 20% uncertainty on the linear bias parameter, incorporating the unknown instrumentation noise. After the marginalizing, our results show that the constraints on the density parameter could potentially get better than $\sim 1\%$, while the constraints on w_0 and w_a could be better than $\sim 5\%$ and $\sim 60\%$ respectively, consistent with works done before. However, the inclusion of time-dependent growth functions would alter the non-linear power spectrum by as much as $\sim 10\%$. The inclusion of the time-dependent growth functions become crucial as the precision get better.

PACS numbers:

I. INTRODUCTION

Current cosmological data, such as the observed distance modulus of Type Ia Supernova (SNIa) [1–3], the Cosmic Microwave Background (CMB) [4–7], the Baryonic Acoustic Oscillations (BAOs) [8] and an independent Hubble parameter measurement [9], suggest that the expansion of the Universe is accelerating. One of the explanations of the cause of the acceleration is the mysterious form of energy called “dark energy”. The simplest model of dark energy is the cosmological constant [10]. While the cosmological constant is enough to explain the current data, its constancy leads to a fine-tuning problem [11, 12]. Apart from the cosmological constant, an alternative model of dark energy is an ideal fluid with an equation of state given by $P = w\rho c^2$, where P and ρ are fluid pressure and density respectively. w is the equation of state which could, in general, varies with time. In order for the fluid to give rise to the accelerating expansion, the value of w must be $w \leq -\frac{1}{3}$. The energy consideration requires $w \geq -1$; however, the current constraint on w is very close to -1 [7]. Therefore, distinguishing the cosmological constant and dynamical dark energy is a challenging problem in cosmology. With the redshift surveys, the number of observed galaxies of billion galaxies can potentially be able to constrain cosmological parameters especially the equation of state for the dynamical dark energy. Since we can only observe in redshift space along the line-of-sight, the redshift-space distortion effect (RSD) is an inevitable consequence. The RSD effect is sensitive to the density growth functions, which sequentially depend on w . Hence, galaxy surveys

are viable probes of dark energy and accurate theoretical modeling of the RSD effect is crucial.

One of the prominent probes of the non-linear structure of the universe is the baryonic acoustic oscillations (BAOs), primordial sound waves which were propagated in the hot plasma of photons and baryons in the early Universe [13]. The BAO effect leaves a distinct statistical imprint of oscillatory features in the power spectrum on the scale that corresponds to the sound horizon scale. The BAO effect could be detected through the observed two-point correlation functions and the power spectra in redshift space [8, 14–19]. The two-point correlation function provides a powerful probe of the time-dependent equation of state of dark energy model in a manner that is highly complementary to measurements of the cosmic microwave background (CMB).

Within the present time and the next few decades, there will be several large-scale-structure surveys that explore increasingly larger and deeper regions of the Universe; for example, Dark Energy Survey (DES)¹ [20], Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS)², Euclid³, Large Synoptic Survey Telescope (LSST)⁴ [21], Square Kilometre Array (SKA)⁵, Wide-Field InfraRed Survey Telescope (WFIRST)⁶ [22]. These surveys will help our understanding of the growth of the structure in the Universe especially in the non-linear regimes. Therefore, it is essential to have an accurate theoretical modeling to interpret the upcoming observa-

¹ <http://www.darkenergysurvey.org>

² <http://www.sdss.org/surveys/eboss/>

³ <http://sci.esa.int/euclid/>

⁴ <http://www.lsst.org/>

⁵ <https://www.skatelescope.org>

⁶ <http://wfirst.gsfc.nasa.gov/>

*E-mail: teeraparbc@nu.ac.th

tional data. The futuristic surveys are important because those surveys will map out to redshift $z \gtrsim 3$ where the oscillatory feature of BAOs can be observed effectively on the scale ~ 150 Mpc. Even at low-redshift, for large-sky coverage surveys, it is marginally possible to observe the BAOs.

Analytical modeling of the large-scale structure of the universe on nonlinear scales has a potential to considerably increase the science return of upcoming surveys by increasing the number of modes available for model comparisons. One way to achieve this is to model nonlinear scales perturbatively. Therefore, predicting the precise non-linear behaviour of the galaxy power spectrum using analytical approaches and comparison to N-body simulations is an essential step in interpreting these data and in elucidating the nature of dark energy. There are two main perturbative modelings in the literature, the Eulerian standard perturbation theory (SPT) [23–25] and Lagrangian perturbation theory (LPT) [26–28] for a review see [29].

SPT requires two fundamental random fields; overdensity field and velocity field. However, at the scale relevant for BAOs, SPT starts to break down and increasing the number of perturbative terms does not resolve much. The higher-order SPT does not give any sensible prediction for the correlation function because unphysical behavior in small wavelength limit prevents Fourier transform from converging [30]. Therefore, in this article, we shall exploit the LPT resummation as an alternative to SPT. LPT has an advantage over SPT because it is convenient and customary to set up the initial conditions for N-body simulations. The calculation of effects of redshift-space distortion is straightforward in LPT [31]. In addition, LPT focus on perturbing the displacement field rather than overdensity and velocity fields.

The goal of this article is to investigate the potential of utilizing galaxy redshift surveys to constraint the equation of state parameter for dark energy in BAO power spectrum in redshift space by applying an analytic cosmological perturbation theory (LPT) formalism in Ref. [28]. In §II, we shall describe the LPT theory in both real space and redshift space with time dependent growth functions. In §III, we shall describe the models and assumptions for our analysis and give the result in §IV. Discussions and conclusions are given in §V.

II. THEORY

In this section, we shall describe all the relevant theories in this analysis such as the structure formation theory [32], Lagrangian perturbation theory and the redshift-space distortion. For a complete and more rigorous review of the cosmological perturbation theory, we advise the reader to study Ref. [29]. In this work, we follow the Lagrangian perturbation formalism in Ref. [28].

A. Structure Formation Theory

The structure that we see in the Universe is generated from small inhomogeneities where the fluctuation of the density field, $\rho(\mathbf{x}, t)$, is defined as

$$\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad (1)$$

where $\delta(\mathbf{x}, t)$ is the *density overdensity* or *contrast* and \mathbf{x} is the comoving distance vector. $\bar{\rho}(t)$ is the average density in the comoving coordinate system. The dynamics of the density field is governed by the continuity equation;

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \left(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) = 0, \quad (2)$$

and Euler's equation,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + 2H(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

where \mathbf{u} is the *peculiar velocity* and $\nabla \equiv \partial_{\mathbf{x}}$ is the comoving gradient operator. $H(t) \equiv \dot{a}/a$ is the Hubble expansion rate. Φ is the comoving gravitational potential,

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2} \Omega_M(t) H^2(t) \delta(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

where Ω_M is the *matter density parameter*.

We shall define the *velocity potential*, θ , as the divergence of the comoving peculiar velocity field

$$\theta(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (5)$$

In the linear cosmological perturbation theory, the growth of the density and the velocity potential are given by

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{x}, t) + \theta(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (6)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) + 2H\theta(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2} \Omega_M(t) H^2(t) \delta(\mathbf{x}, t). \quad (7)$$

From Eq. (6) and Eq. (7), a second-order differential equation in terms of the overdensity is given by,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta(\mathbf{x}, t) + 2H(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2} \Omega_M(t) H^2(t) \delta(\mathbf{x}, t). \quad (8)$$

Assuming a linear growth factor $D_1(t)$ such that

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D_1(t) \delta_0(\mathbf{x}), \quad (9)$$

where $\delta_0(\mathbf{x})$ is the overdensity at a particular time. It is customary to normalize the growth function to unity so that $\delta_0(\mathbf{x})$ represent the overdensity at the present epoch. From Eq. (8)-(9), we have the equations describing the evolution of the linear density perturbations as

$$\ddot{D}_1 + 2H(t)\dot{D}_1 - \frac{3}{2} \Omega_M(t) H^2(t) D_1(t) = 0. \quad (10)$$

D_1 is known as the linear growth factor and has been used pretty much in a linear regime and as an extrapolation to non-linear regimes. Perturbatively, we can expand the overdensity as

$$\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \delta_1(\mathbf{x}, t) + \delta_2(\mathbf{x}, t) + \delta_3(\mathbf{x}, t) + \dots, \quad (11)$$

where $\delta_n(\mathbf{x}, t)$ is proportional to $\delta_0^n(\mathbf{x})$. Similarly, we can define

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv \Phi_1(\mathbf{x}, t) + \Phi_2(\mathbf{x}, t) + \Phi_3(\mathbf{x}, t) + \dots, \quad (12)$$

where, from Eq. (4), $\nabla^2 \Phi_n(\mathbf{x}, t) = (3/2)\Omega_M H^2 \delta_n(\mathbf{x}, t)$. In addition,

$$\theta(\mathbf{x}, t) \equiv \theta_1(\mathbf{x}, t) + \theta_2(\mathbf{x}, t) + \theta_3(\mathbf{x}, t) + \dots, \quad (13)$$

where $\theta_n(\mathbf{x}, t)$ is proportional to $\delta_0^n(\mathbf{x})$. With perturbative definitions in Eq. (11)-(13), additional growth functions in higher order are given by

$$\ddot{D}_2 + 2H\dot{D}_2 - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_2 = \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_1^2, \quad (14)$$

$$\ddot{D}_{3a} + 2H\dot{D}_{3a} - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_{3a} = \frac{3}{2}\Omega_M H^2 (D_1^3 + D_1 D_2), \quad (15)$$

$$\ddot{D}_{3b} + 2H\dot{D}_{3b} - \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_{3b} = \frac{3}{2}\Omega_M H^2 D_1^3. \quad (16)$$

We define $D_2(t)$ as the second-order growth function, and $D_{3a}(t)$ and $D_{3b}(t)$ as the third-order growth functions – there are two independent third-order growth functions. Notice that $D_2(t) \propto D_1^2(t)$ and $D_{3a}(t), D_{3b}(t) \propto D_1^3(t)$; hence, it is convenient to define $\mathbf{d}_2(t) \equiv D_2(t)/D_1^2(t)$, $\mathbf{d}_{3a}(t) \equiv D_{3a}(t)/D_1^3(t)$ and $\mathbf{d}_{3b}(t) \equiv D_{3b}(t)/D_1^3(t)$. For an Einstein-de Sitter (EdS) universe, $\mathbf{d}_2 = 3/7$, $\mathbf{d}_{3a} = 5/21$ and $\mathbf{d}_{3b} = 1/6$.

B. Lagrangian Perturbation Theory

We shall follow the Lagrangian perturbation theory from Ref. [28]. In this model of perturbation, the Eulerian particle position \mathbf{x} can be mapped to a Lagrangian

particle position \mathbf{q} by the displacement field Ψ ,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{q}, t), \quad (17)$$

where \mathbf{x} is in the Eulerian comoving coordinate description. The overdensity in Lagrangian position is given by

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \int d^3q \delta_D^3(\mathbf{x} - \mathbf{q} - \Psi(\mathbf{q})) - 1, \quad (18)$$

where $\delta_D^3(\mathbf{x})$ is the Dirac's delta function in 3D. The equation of motion in terms of the displacement field is given by

$$\frac{d^2}{dt^2} \Psi(\mathbf{q}, t) + 2H(t) \frac{d}{dt} \Psi(\mathbf{q}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}, t). \quad (19)$$

In principle, we can expand $\Psi(\mathbf{q}, t)$ as

$$\Psi(\mathbf{q}, t) = \Psi_1(\mathbf{q}, t) + \Psi_2(\mathbf{q}, t) + \Psi_3(\mathbf{q}, t) + \dots \quad (20)$$

We can define the Fourier mode of the displacement field Ψ as

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_n(\mathbf{k}, t) &= \frac{iD_1^n(t)}{n!} \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta_D^3 \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i - \mathbf{k} \right) \\ &\times \mathbf{L}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n, t) \left(\prod_{i=1}^n \tilde{\delta}_0(\mathbf{k}_i) \right), \end{aligned} \quad (21)$$

where $\tilde{\Psi}_n(\mathbf{k}, t)$ is the n -th order displacement vector field in Fourier space and $\mathbf{L}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n, t)$ are the Lagrangian perturbative kernels. Our convention for the Fourier transform is

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^3x f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (22)$$

and

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (23)$$

The time-dependent Lagrangian perturbative kernels are given by

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{k}_1, t) = \frac{\mathbf{k}}{k^2}, \quad (24)$$

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t) = \mathbf{d}_2(t) \frac{\mathbf{k}}{k^2} \left[1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right], \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{3a}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, t) &= 3\mathbf{d}_{3a}(t) \left(\frac{\mathbf{k}}{k^2} \right) \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right) \left(1 - \frac{((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_3)^2}{1} \right) \\ &- 2\mathbf{d}_{3b}(t) \left(\frac{\mathbf{k}}{k^2} \right) \left[1 - 3 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} + 2 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1)}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

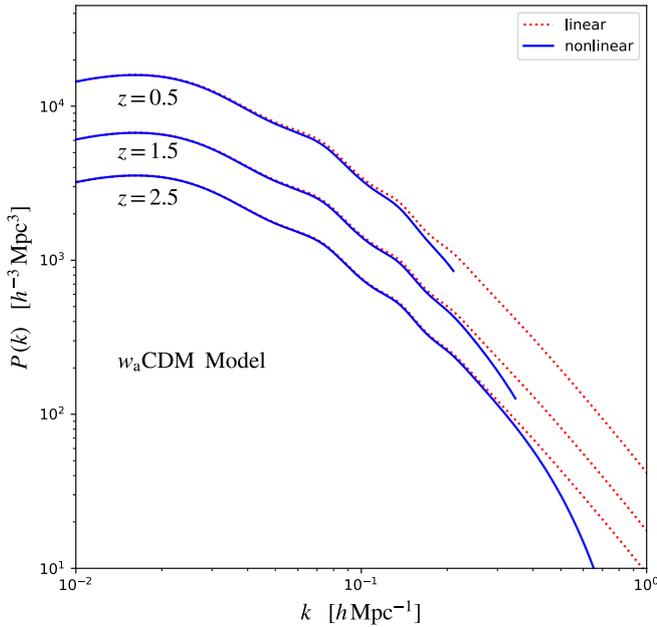


FIG. 1: The linear matter power spectra (dotted) and non-linear matter power spectra (solid) at different redshifts in the w_a CDM model (see TABLE I). The same plots for the other models have similar features. From top to bottom, $z = 0.5, 1.5$ and 2.5 . The non-linear power spectra have a cut-off scale at $k_{\text{nl}}/2$.

where $\mathbf{k} = \sum_i \mathbf{k}_i$. L_{3a} will need to be symmetrized in terms of \mathbf{k} 's later.

1. Real-space power spectrum

The power spectrum is defined as a Fourier transform of the two-point correlation function of overdensity,

$$P(k) \equiv \int d^3x \xi(x) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (27)$$

where ξ is the two-point correlation function. The power spectrum has a simple relation as

$$\left\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \right\rangle = (2\pi)^3 \delta_{\text{D}}^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k), \quad (28)$$

where $P(k)$ is the power spectrum and $\tilde{\delta}(\mathbf{k})$ is the Fourier transform of overdensity (Eq. (18)). The power spectrum in Fourier space depends only on the magnitude of the wave vector, $k = |\mathbf{k}|$. Following the formalism in [28], the

power spectrum is given by

$$P(k, z) = \exp \left[-\frac{k^2}{6\pi^2} \int dp P_L(p, z) \right] \times \left\{ P_L(k, z) + \left(\frac{d_2^2(z)}{2} Q_1(k) + d_2(z) Q_2(k) + \frac{1}{2} Q_3(k) \right) + 2 \left(d_{3a}(z) R_1(k) + d_2(z) R_2(k) \right) \right\}, \quad (29)$$

where $P_L(k)$ is the linear matter power spectrum. $Q_n(k)$'s and $R_n(k)$'s are the integral functionals of the form:

$$Q_n(k) = \frac{k^3}{4\pi^2} \int_0^\infty dr P_L(kr) \int_{-1}^1 dx \times P_L \left[k(1+r^2-2rx)^{1/2} \right] \frac{\tilde{Q}_n(r, x)}{(1+r^2-2rx)^2} \quad (30)$$

$$R_n(k) = \frac{1}{48} P_L(k) \frac{k^3}{4\pi^2} \int_0^\infty dr P_L(kr) \tilde{R}_n(r), \quad (31)$$

where $P_L(k) \equiv P_L(k, z=0)$ the linear power spectrum at the present epoch.

$$\tilde{Q}_1(r, x) = r^2 (1-x^2)^2, \quad (32)$$

$$\tilde{Q}_2(r, x) = (1-x^2)rx(1-rx), \quad (33)$$

$$\tilde{Q}_3(r, x) = x^2(1-rx)^2, \quad (34)$$

$$\tilde{Q}_4(r, x) = 1-x^2, \quad (35)$$

and

$$\tilde{R}_1(r) = -\frac{2}{r^2} (1+r^2) (3-14r^2+3r^4) + \frac{3}{r^3} (r^2-1)^4 \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|, \quad (36)$$

$$\tilde{R}_2(r) = \frac{2}{r^2} (1-r^2) (3-2r^2+3r^4) + \frac{3}{r^3} (r^2-1)^3 (1+r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|. \quad (37)$$

We shall express time in terms of redshift z for observables. For an Einstein de-Sitter universe, our result is consistent with Ref. [28]. The validity of this approach is applicable when the argument of the exponential term in Eq. (29) is of the order of unity; hence, we define the nonlinear scale k_{nl} as

$$k_{\text{nl}} \equiv \left[\frac{1}{6\pi^2} \int dk' P_L(k') \right]^{-1/2}. \quad (38)$$

We will apply a cut-off scaling where $k < k_{\text{nl}}/2$. The power spectra for the Λ CDM model (see §III) is shown in FIG. 1 as an example.

2. Redshift-space power spectrum

The power spectrum in redshift space is anisotropic and, hence, depends on the observed direction \hat{z} , the

radial direction. Following the formalism in [28], the redshift-space power spectrum is given by

$$P_s(\mathbf{k}, \mu, z) = \exp \left\{ -k^2 \left[1 + f(f+2)\mu^2 \right] A \right\} \times \left[(1 + f\mu^2)^2 P_L(k, z) + \sum_{n,m} \mu^{2n} f^m E_{nm}(k) \right], \quad (39)$$

where $\mu = \hat{z} \cdot \mathbf{k} / k$ is the direction cosine of the wave vector \mathbf{k} with respect to the line-of-sight,

$$A = \frac{1}{6\pi^2} \int dk P_L(k), \quad (40)$$

and

$$f = \frac{d \ln D_1}{d \ln a}. \quad (41)$$

The integral $E_{mn}(k)$'s are the integral functionals in terms of $Q_n(k)$ and $R_n(k)$ of the forms:

$$E_{00}(k) = \frac{d_2^2(t)}{2} Q_1(k) + d_2(t) Q_2(k) + \frac{1}{2} Q_3(k) + 2d_{3a}(t) R_1(k) + 2d_2(t) R_2(k), \quad (42)$$

$$E_{11}(k) = 4E_{00}(k), \quad (43)$$

$$E_{12}(k) = -\frac{d_2(t)}{2} Q_1(k) - \frac{3}{2} Q_2(k) + \frac{1}{4} Q_4(k) - 2d_2(t) R_1(k), \quad (44)$$

$$E_{22}(k) = \left(2d_2^2(t) + \frac{d_2(t)}{2} \right) Q_1(k) + \left(5d_2(t) + \frac{3}{2} \right) Q_2(k) + 3Q_3(k) - \frac{1}{4} Q_4(k) + \left(2d_2(t) + 6d_{3a}(t) \right) R_1(k) + 10d_2(t) R_2(k), \quad (45)$$

$$E_{23}(k) = -d_2(t) Q_1(k) - 3Q_2(k) + \frac{1}{2} Q_4(k) - 2d_2(t) R_1(k), \quad (46)$$

$$E_{24}(k) = \frac{3}{16} Q_1(k), \quad (47)$$

$$E_{33}(k) = d_2(t) Q_1(k) + \left(2d_2(t) + 3 \right) Q_2(k) + 2Q_3(k) - \frac{1}{2} Q_4(k) + 2d_2(t) R_1(k) + 4d_2(t) R_2(k), \quad (48)$$

$$E_{34}(k) = -\frac{3}{8} Q_1(k) - \frac{3}{2} Q_2(k) + \frac{1}{4} Q_4(k), \quad (49)$$

$$E_{44}(k) = \frac{3}{16} Q_1(k) + \frac{3}{2} Q_2(k) + \frac{1}{2} Q_3(k) - \frac{1}{4} Q_4(k). \quad (50)$$

For an EdS universe, $d_2 = 3/7$, $d_{3a} = 5/21$ and $d_{3b} = 1/6$, we recover the results done by [28].

III. MODELS AND DATA ANALYSIS

In galaxy redshift surveys, the peculiar velocities of galaxies cause a distortion between the observed power

spectrum (or correlation function) along a line-of-sight and the direction perpendicular to the line-of-sight. The distortion effect can be predicted and tested the underlying cosmology known as the Alcock-Paczyński (AP) test [33]. The AP test can be used to track the effect of the dynamical dark energy in redshift surveys with different redshift slices. In this section, we shall describe our dynamical dark energy models and analytical methods for galaxy redshift surveys.

A. Dynamical Dark Energy

We shall use a parametrization of the equation of state of the dynamical dark energy by using a Taylor expansion in the Chevallier-Polarski-Linder (CPL) model [34, 35];

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a), \quad (51)$$

or

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}, \quad (52)$$

where w_0 and w_a are constants. In the case of the cosmological constant, $w_0 = -1.0$ and $w_a = 0.0$. In general the equation of state parameters w_0 and w_a could be any values allowable by observational data. For the current observational constraint of w_0 and w_a ⁷, we shall use the MCMC exploring chain from `planck_lowl_lowLike_highL_BAO` data with the base `base_w_wa`. This data set include the constraints on parameter of our interest. In addition, the data include late-time BAO observational data from DR11LOWZ, DR11CMASS [37], MGS and 6DF [38]. From the data, we have

$$w_0 = -1.030 \pm 0.361, \quad w_a = -0.334 \pm 0.909. \quad (53)$$

We shall demonstrate the application of the LPT formalism by considering the following fiducial models; a Λ CDM-like model which follows the standard Λ CDM model with the cosmological constant ($w_0 = -1.0$ and $w_a = 0.0$), w CDM-like models with $w_0 = -0.8$ and $w_a = 0.0$, and w_a CDM-like model with $w_0 = -1$ and $w_a = 0.1$. In the Λ CDM model with cosmological constant, Λ , both w_0 and w_a are constant; however, for an academic propose, we shall vary both parameters. The summary of all the fiducial models and their parameters are summarized in Table. I.

B. Galaxy Bias

The measurement of the power spectrum depends on the type of tracers; however, they may not exactly fol-

⁷ At the time of preparation for the manuscript, the update cosmological parameter constraints, PLANCK 2018, result has been released. [36]

TABLE I: Fiducial cosmological parameters and their value for all models.

	Λ CDM	w CDM	w_a CDM
$\Omega_B h^2$	0.0223		
$\Omega_M h^2$	0.1401		
Ω_Λ	0.7019		
$\Delta_{\mathcal{R}}^2 \times 10^9$	2.2061		
τ	0.0956		
n_s	0.9695		
w_0	-1.0	-0.8	-1.0
w_a	0.0	0.0	0.1

low the distribution of the underlying dark matter. For galaxy-type tracer on large scales, we shall apply a linear bias b_1 as [39, 40],

$$\delta_g(\mathbf{k}) \equiv b_1 \delta(\mathbf{k}), \quad (54)$$

where $\delta_g(\mathbf{k})$ is the galaxy overdensity. The power spectrum with galaxies as tracers is given by replacing $P_L(k) \rightarrow b_1^2 P_L(k)$ in Eq. (39),

$$P_{s,g}(\mathbf{k}, \mu, z) \equiv P_s(\mathbf{k}, \mu, z) \Big|_{P_L(k) \rightarrow b_1^2 P_L(k)}. \quad (55)$$

The value of b_1 depends on surveys described in the next section.

C. Galaxy Surveys

In this section, we shall give a brief introduction to some of the selected future surveys. Additionally, we shall describe how those surveys will motivate us on how we decide our fiducial surveys and redshift bins based on the real surveys.

1. SKA

The Square Kilometre Array (SKA) is a giant radio telescope located in two sites, in South Africa and Western Australia. The South Africa's site will host mid-frequency receivers (350 MHz – 15.3 GHz) while the Australia's site will host low-frequency receivers (50 MHz – 350 MHz)⁸. The first operation phase will commence in 2020. The second phase, which is about ten times more sensitive, will be active in about 2025. One of the key science goals of SKA is to understand the nature of dark energy. With the capabilities of SKA, a large number of HI galaxies could be detected with precise redshift

information using the 21-cm line from the spin-flip transition. Since rest frequency of the transition is at 1420 MHz, telescopes with frequency range from ~ 100 MHz to 1420 MHz such as the SKA could detect HI galaxies upto $z \sim 10$ or the epoch of reionization.

For an SKA-like fiducial survey, we shall follow the bias and number count fitting functions for SKA from [41] via a mock catalog [42]. The number count per redshift dn/dz and the linear bias $b_1(z)$ as a function of redshift are given by

$$dn/dz = 10^{6.7767} z^{2.1757} \exp(-6.6374 z), \quad (56)$$

and

$$b_1(z) = 0.5887 \exp(0.813 z), \quad (57)$$

with parameters emulating the SKA phase 2 capabilities.

2. DESI

Dark Energy Spectroscopic Instrument (DESI) is a ground-based dark energy experiment that will study baryon acoustic oscillations (BAO) and the growth of structure through redshift-space distortions (RSD) as a successor of Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) [43]. The survey will start in 2019 mapping million of galaxies and quasars. The full five-year DESI survey will cover a baseline survey of 14,000 deg². DESI will be able detect quasars via Ly- α forest in $2.1 \lesssim z \lesssim 3.5$. For the purpose of the Fisher analysis, we follow the number count using DESI baseline (Figure 3.17 in [43]) and the bias from BOSS quasar bias $b_1(z) = 3.6 D_1(z = 2.4)/D_1(z = 0)$ where $D_1(z)$ is the linear growth factor [44].

3. Our Fiducial Surveys

We shall divide our redshift bins into three equally spaced bins as shown in TABLE II. In the table, the average number density of galaxies tracers, \bar{n}_g , and the survey volume, V_s , in Eq. (60) are also shown. The first two bins, called SKA1 and SKA2, are modeled after SKA phase 2 where we took the SKA survey parameters into account while calculating \bar{n}_g and V_s . Similarly, the last bin is modeled after DESI survey. The bias for SKA-like survey and DESI-like survey are also shown. The first two bins will provide an insight to how the SKA will give a constraints on wide-area-type survey, while the last bin will represent a deep small-area-type of surveys. We shall use to mean value of redshift in each bin, $z = 0.5, 1.5$ and 2.5 respectively, for the calculation of the power spectra and growth functions.

⁸ Data taken from SKA's Baseline Design document version2 (October 2015) at <https://www.skatelescope.org>

TABLE II: The value of different survey parameters for each cosmological model (see text).

	Survey	z	\bar{n}_g ($\text{Mpc}^{-3}h^3$)	V_s (Mpc^3h^{-3})	b_1
ΛCDM	SKA1	0.0 - 1.0	0.278	3.80×10^{10}	1.052
	SKA2	1.0 - 2.0	1.80×10^{-3}	1.09×10^{11}	2.091
	DESI	2.0 - 3.0	2.06×10^{-5}	5.79×10^{10}	3.703
$w\text{CDM}$	SKA1	0.0 - 1.0	0.300	3.34×10^{10}	1.049
	SKA2	1.0 - 2.0	2.07×10^{-3}	9.49×10^{10}	2.093
	DESI	2.0 - 3.0	2.32×10^{-5}	5.79×10^{10}	3.701
$w_a\text{CDM}$	SKA1	0.0 - 1.0	0.279	3.34×10^{10}	1.051
	SKA2	1.0 - 2.0	1.83×10^{-3}	1.07×10^{11}	2.091
	DESI	2.0 - 3.0	2.09×10^{-5}	5.71×10^{10}	3.703

D. Fisher Matrix Formalism

In order to forecast the constraints on cosmological parameters for a given survey, we utilize the Fisher information matrix method [45, 46],

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} [\mathbf{C}_{,\alpha} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,\beta} \mathbf{C}^{-1}], \quad (58)$$

where $F_{\alpha\beta}$ is a component of the Fisher matrix \mathbf{F} . \mathbf{C} is the covariance matrix and $\mathbf{C}_{,\alpha} \equiv \partial\mathbf{C}/\partial\theta_\alpha$ where θ_α is a parameter. For the two-dimensional redshift-space power spectrum $P_s(k, \mu)$ a component of the Fisher matrix is given by [47, 48],

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk k^2 \int_0^1 d\mu \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \ln P_{s,g}(k, \mu) \times \frac{\partial}{\partial\theta_\beta} \ln P_{s,g}(k, \mu) V_{\text{eff}}(k, \mu). \quad (59)$$

The effective survey volume is given by

$$V_{\text{eff}}(k, \mu) = V_s \left(\frac{\bar{n}_g P_{s,g}(k, \mu)}{1 + \bar{n}_g P_{s,g}(k, \mu)} \right)^2, \quad (60)$$

where V_s is the volume of the survey and \bar{n}_g is the mean galaxy number density. The estimated uncertainty from the inverse Fisher matrix gives an optimal uncertainties σ_α of the parameter θ_α for the Cramé-Rao bound

$$\sigma_\alpha^2 \geq F_{\alpha\alpha}^{-1}. \quad (61)$$

With the Fisher matrix formalism, a conservative estimate of the uncertainty in measurement could be obtained. The matter power spectra were computed using CAMB⁹ [49].

We shall focus our attention on the density parameters $\Omega_B h^2, \Omega_M h^2, \Omega_\Lambda$ and the equation of state parameters w_0, w_a as those parameters has a direct impact on the

growth functions (Eq. (14)-(16)). The parameters $\Delta_{\mathcal{R}}^2, \tau$ and n_s are power-spectra-related parameters. They are not directly relevant to the growth functions; however, their uncertainty in measurements will affect the constraint on other parameters. Hence, we shall include the uncertainty in the parameters $\Delta_{\mathcal{R}}^2, \tau$ and n_s in our analysis using PLANCK's priors. The inclusion of the bias parameter b_1 (Eq. (54)) is necessary as it is an unavoidable effect of galaxy clustering. In addition, we shall assume that the bias and instrumental noise are unknown within 20% accuracy. It is considered as a nuisance parameter which shall be marginalized. Hence, our fiducial cosmological parameters, after marginalization, for the Fisher analysis used in this article are

$$\theta \equiv \{\Omega_B h^2, \Omega_M h^2, \Omega_\Lambda, w_0, w_a\}. \quad (62)$$

The values of fiducial cosmological parameters are summarized in Table I. The values of the bias parameter b_1 for different model and redshift bin are summarized in Table II. In this article, all the cosmological models are assumed flat.

Our fiducial cosmological parameters for Planck covariance matrix is based from `planck_lowl_lowLike_highL_BAO` data with the base `base_w_wa`. This dataset will give different values of w_0 and w_a (Eq. (53)). However, we shall assume the variation of the covariance matrix is negligible across a small changes in the parameter space.

IV. RESULTS

In this article, the effect of dynamical dark energy on the non-linear power spectra in form of redshift-space distortion was investigated (see §II). The linear matter spectra and non-linear matter power spectra using LPT are shown in FIG. 1. We illustrate the observable effects of the redshift-space distortion in real space by performing the inverse Fourier transform of the non-linear power spectra in Eq. (39) and the results are shown in FIG. 2.

⁹ <https://camb.info/>

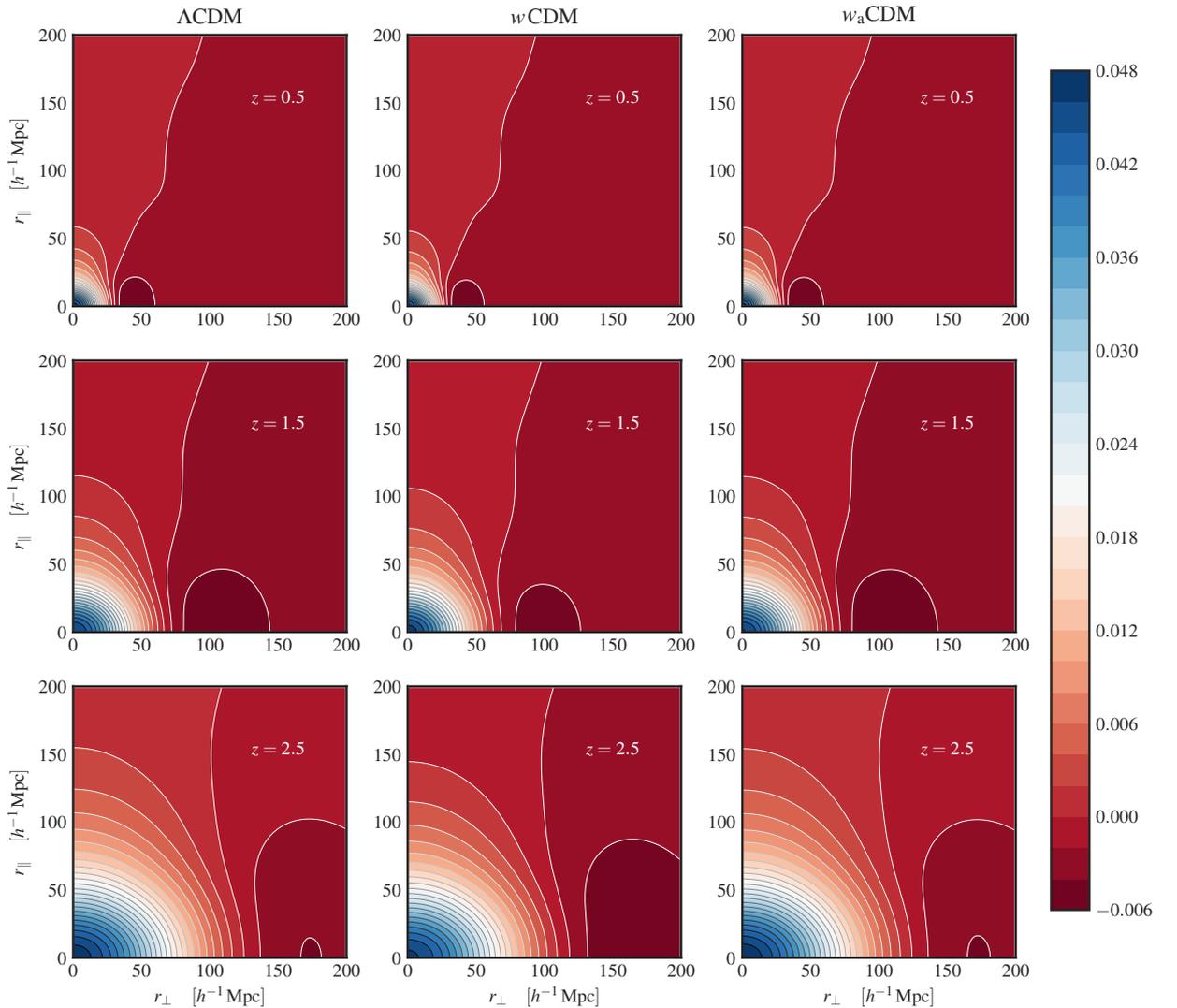


FIG. 2: The correlation function of the LPT non-linear power spectrum in redshift space where r_{\perp} is the perpendicular component to the line-of-sight and r_{\parallel} is the parallel component to the line-of-sight. The models are, from left to right, Λ CDM, w CDM and w_a CDM respectively (see TABLE I). The bins are, from top to bottom, SKA1, SKA2 and DESI respectively.

In order to test the model of dynamical dark energy, we apply the Fisher matrix analysis in §III to our fiducial models. The 68% CL constraints on our parameters of interest after marginalization is shown in TABLE III. We divide the galaxies into different redshift bins; SKA1, SKA2, and DESI. The details of the bins are described in TABLE I. Additionally, the combined constraints from all redshift bins (All bins) and with PLANCK’s priors (All bins + PLANCK) are also shown.

V. DISCUSSIONS AND CONCLUSIONS

The non-linear power spectra using the LPT formalism [28] are shown in FIG. 1. From the figure the cut-off scale, beyond which the approximation will be invalid, increases with redshift (in k -space). This is due to the growth of non-linear scales. Even though smaller scales can be probed by high-redshift surveys, the gain of information is hindered by decreasing number of observed galaxies at high redshifts. The decrement in number of

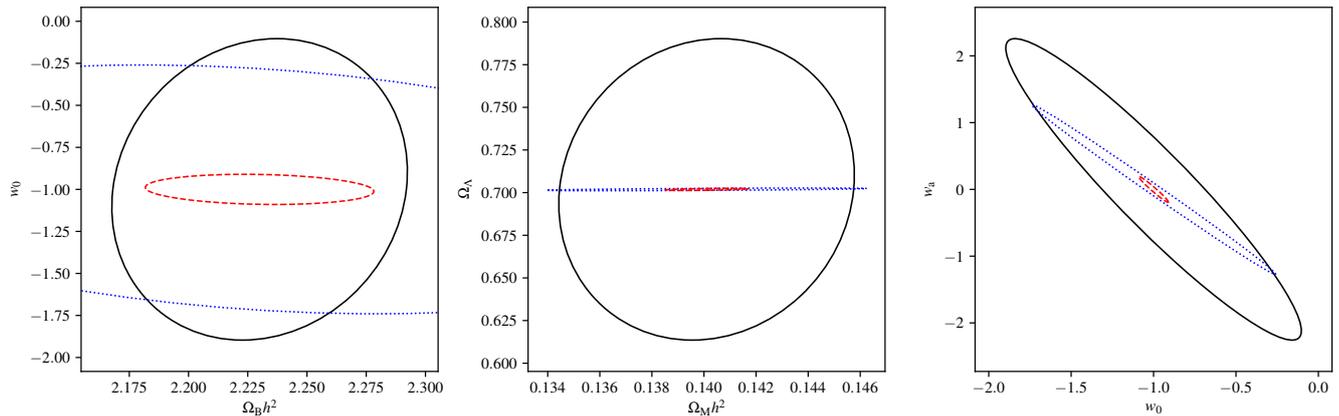


FIG. 3: 95%CL confidence level constraints on some of the cosmological parameter pairs; $\Omega_B h^2$ and w_0 (left), Ω_M and Ω_Λ (middle), w_0 and w_a (right) for the w_a CDM model. The dark solid line is the PLANCK constraints on the parameters from `planck_lowl_lowLike_highL_BAO` MCMC chain. The blue dotted line is the constraints from galaxy surveys (all bins) and the red dashed line in the combined PLANCK and galaxy surveys constraints.

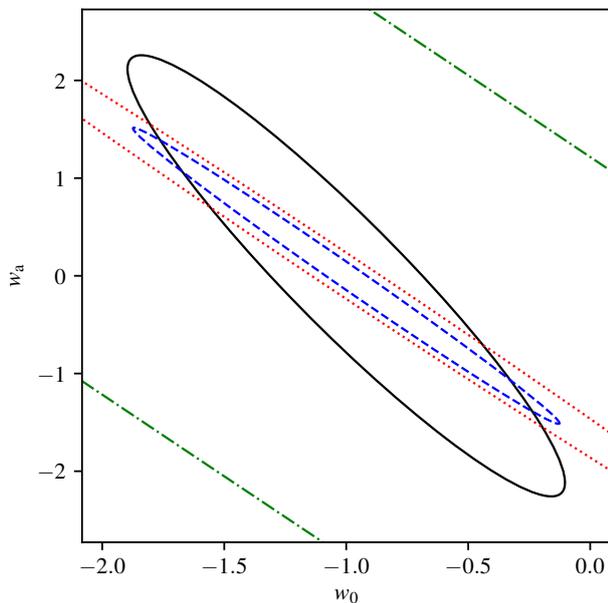


FIG. 4: An example of 95%CL constraints on w_0 and w_a from different redshift bins for the w_a CDM model. The dark solid line is the constraint from PLANCK. The innermost dashed blue line is the constraint from SKA1, the lowest redshift bin. The dotted red line is the constraint from the SKA2 bin and the outermost dotted-dashed line is from the DESI bin.

galaxies is both intrinsic and instrumental. In FIG. 4, the optimal bins where the constraining power is highest is the lowest bins ($z = 0.0 - 1.0$) and progressively decreases at higher-redshift bins (see TABLE. II). Since all the bins are independent, we can achieve better constraints by combining the information from all the bins as shown in FIG. 3. From the figure, we could see that

the constraints from the galaxy surveys alone are comparable to that of all sky PLANCK's CMB survey. Some of the parameters have slightly better constraints than PLANCK alone.

From FIG. 3 and TABLE. III, the data from galaxies redshift surveys are sensitive to Ω_Λ , w_0 , w_a and mildly sensitive to $\Omega_M h^2$. This is due to the fact that those parameters directly involve in the growth functions which play an important role in late-time evolution of the Universe. The constraint on $\Omega_B h^2$ is not considerably better in comparison to PLANCK's constraint (see the left panel in FIG. 3). The combination of information from PLANCK with redshift surveys in general give tighter constraints in all cosmological parameters. In addition, parameter constraints from both PLANCK's cosmic microwave background observation and redshift surveys have different degeneracy directions which will give a more compact constraints. The variation of the constraining power across different models are not significantly different; however, the constraints on w_0 and w_a are better in w CDM and w_a CDM models.

Our fiducial surveys are modeled after SKA and DESI. We apply the survey specifications from SKA for $z = 0.0 - 2.0$ and DESI's for $z = 2.0 - 3.0$ in TABLE II. SKA utilize the 21-cm emission lines to detect HI galaxies; however, the frequency range of SKA could potentially observe HI galaxy beyond redshift 2.0. Since the constraining power does not significantly improve with higher redshifts, we shall only limit SKA capability to redshift 2.0 for a conservative estimation. The extra DESI-like deep-survey bin does not give any noticeable improvement. We have include the uncertainties in power spectrum parameters such as τ , n_s and $\Delta_{\mathbb{R}}^2$ as the inherited uncertainty from PLANCK's CMB measurements. We add 20% uncertainty in the bias parameter and all the unknown instrumentation noise will be incorporate into the bias uncertainty.

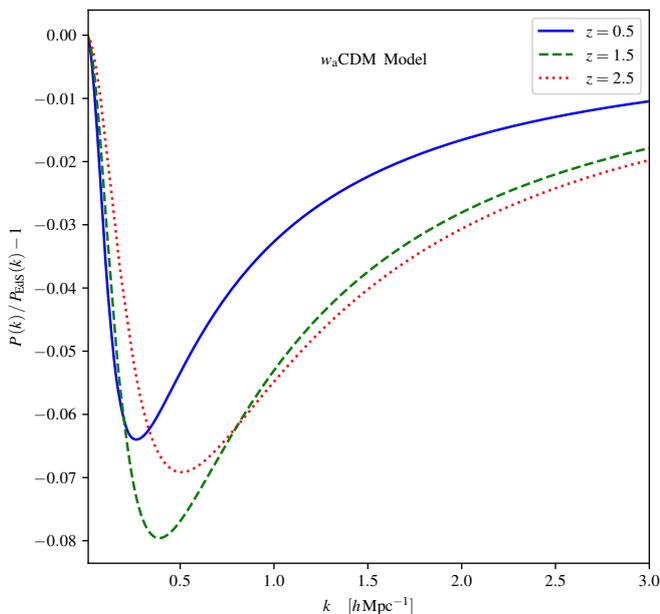


FIG. 5: The ratio between non-linear power spectra with time-dependent growth functions $P(k)$ and non-linear power spectra with an EdS approximation $P_{\text{EdS}}(k)$. The solid blue line is the nonlinear powerspectra at $z = 0.5$, the dashed green line and the dotted red line are at $z = 1.5$ and $z = 2.5$ respectively. In the figure, the model $w_a\text{CDM}$ is shown; however, the same plot for the other models have similar features.

With the instrumentation noises and the bias estimation described in the previous paragraph, the overall constraints of all the parameters (All Bins + PLANCK) are at $\sim 1\%$ accuracies for the density parameters, $\sim 5\%$ on the equation of state parameter w_0 and $\sim 60\%$ on w_a (see TABLE III). Our results are consistent with a similar work done in [50]. These precisions will rule out most of the non-standard cosmological models and put even tighter constraints on dark energy models; therefore, an accurate theoretical model of the observables become crucial. This is why second and third order growth functions (Eq. (14)–(16)) should be treated with care. Many works on standard perturbation theory (SPT) and Lagrange perturbation theory use the Einstein de Sitter (EdS) values for the second and third-order growth functions known as the *EdS approximation* [51]. In the EdS universe, $D_2 = (3/7)D_1^2$, $D_{3a} = (5/21)D_1^3$ and $D_{3b} = (1/6)D_1^3$ (see § II for more details), which simply leaves only one independent growth function, namely D_1 .

The variations in the value of D_2 , D_{3a} and D_{3b} across realistic region in the parameter space is $\sim 1\%$ from that of the EdS values [52]. However, the variation in the non-linear power spectrum with time-dependent growth functions get magnified. In FIG. 5, we demonstrate the fractional difference in the non-linear power spectra (Eq. 29) between the EdS parameter value $P(k)$ and the non-EdS parameter value $P_{\text{EdS}}(k)$. Our result is consistent with the work in [53]; however, our work apply the Lagrange perturbation theory across various scales and redshifts. The non-EdS parameter values are according to the models in TABLE I. From the figure, it can be seen that the fractional difference is, on average, $\sim 5\%$ across interested range of redshift and could get up to $\sim 10\%$ in certain redshift. The maximum different occurs at $k \sim 0.5 h \text{ Mpc}^{-1}$, a quasi-linear regime. This is an indicator that as the precisions get better, the EdS approximation may not be accurate enough and a need for higher-order growth functions is emerging.

In this article, we demonstrate an application of Lagrangian perturbation formalism by [28] on the effects of dynamical dark energy on the observation of redshift-space power spectra and correlation functions. With upcoming powerful telescopes such the SKA and DESI, the constraints on the density parameters could potentially achieve better than $\sim 1\%$ while the constraints on dark energy parameters w_0 and w_a could be better than $\sim 5\%$ and $\sim 60\%$. However, a better more accurate theoretical modeling is also needed. The EdS approximation which is often used for cosmological perturbation theory may need to be revised. We suggest that the inclusion of the time-dependent growth functions in the second-order and third-order term become crucial as the precision get below 1% ; however, the impact of these functions on the outcome of measurements still needs further investigation.

Acknowledgments

We would like to thank to Sirichai Chongchitnan and Pimpunyawat Tummuangpak for their helpful suggestions, and Utane Sawangwit for his useful help in the initial part of the project and High Performance Computer facility at National Astronomical Research Institute of Thailand (NARIT) where some parts of the calculation were done. TC acknowledges the support from Thailand Research Fund (TRF) through grant MRG550041.

-
- [1] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clochiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, et al., *AJ* **116**, 1009 (1998), astro-ph/9805201.
[2] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goo-

- bar, D. E. Groom, et al., *ApJ* **517**, 565 (1999), astro-ph/9812133.
[3] G. Efstathiou, S. Moody, J. A. Peacock, W. J. Percival, C. Baugh, J. Bland-Hawthorn, T. Bridges, R. Cannon, S. Cole, M. Colless, et al., *MNRAS* **330**, L29 (2002), astro-ph/0109152.

TABLE III: 68%CL constraints on the fiducial cosmological parameters where $\omega_B \equiv \Omega_B h^2$ and $\omega_M \equiv \Omega_M h^2$ after marginalization.

		$\sigma_{\omega_B} \times 100$	σ_{ω_M}	σ_{Ω_Λ}	σ_{w_0}	σ_{w_a}
Λ CDM	SKA1	0.1162	0.00358	0.00248	0.1764	0.6074
	SKA2	0.1689	0.00571	0.00240	0.3693	1.2106
	DESI	1.7792	0.05812	0.04672	5.0634	16.111
	All Bins	0.0780	0.00233	0.00150	0.1498	0.5080
	All Bins + PLANCK	0.0192	0.00058	0.00104	0.0918	0.3179
w CDM	SKA1	0.1180	0.00362	0.00255	0.2815	0.4355
	SKA2	0.1645	0.00545	0.00230	0.7768	1.1567
	DESI	1.5174	0.05137	0.03998	9.4672	13.988
	All Bins	0.0731	0.00220	0.00152	0.2402	0.3671
	All Bins + PLANCK	0.0193	0.00064	0.00119	0.0359	0.0636
w_a CDM	SKA1	0.1259	0.00387	0.00052	0.3519	0.6101
	SKA2	0.1691	0.00570	0.00048	0.7394	1.2328
	DESI	1.7552	0.05785	0.00936	10.640	17.789
	All Bins	0.0825	0.00248	0.00031	0.2979	0.5121
	All Bins + PLANCK	0.0194	0.00064	0.00025	0.0361	0.0778

- [4] A. H. Jaffe, P. A. Ade, A. Balbi, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, K. Coble, B. P. Crill, P. de Bernardis, et al., *Physical Review Letters* **86**, 3475 (2001), astro-ph/0007333.
- [5] C. Pryke, N. W. Halverson, E. M. Leitch, J. Kovac, J. E. Carlstrom, W. L. Holzapfel, and M. Dragovan, *ApJ* **568**, 46 (2002), astro-ph/0104490.
- [6] D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré, M. R.olta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, et al., *ApJS* **170**, 377 (2007), astro-ph/0603449.
- [7] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, et al., *ArXiv e-prints* (2015), 1502.01589.
- [8] D. J. Eisenstein, I. Zehavi, D. W. Hogg, R. Scoccimarro, M. R. Blanton, R. C. Nichol, R. Scranton, H.-J. Seo, M. Tegmark, Z. Zheng, et al., *ApJ* **633**, 560 (2005), astro-ph/0501171.
- [9] W. L. Freedman, B. F. Madore, V. Scowcroft, C. Burns, A. Monson, S. E. Persson, M. Seibert, and J. Rigby, *ApJ* **758**, 24 (2012), 1208.3281.
- [10] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner, *ARA & A* **30**, 499 (1992).
- [11] P. J. Peebles and B. Ratra, *Reviews of Modern Physics* **75**, 559 (2003), astro-ph/0207347.
- [12] T. Padmanabhan, *Phys. Rep.* **380**, 235 (2003), hep-th/0212290.
- [13] D. J. Eisenstein and W. Hu, *ApJ* **496**, 605 (1998), astro-ph/9709112.
- [14] S. Cole, W. J. Percival, J. A. Peacock, P. Norberg, C. M. Baugh, C. S. Frenk, I. Baldry, J. Bland-Hawthorn, T. Bridges, R. Cannon, et al., *MNRAS* **362**, 505 (2005), astro-ph/0501174.
- [15] M. Tegmark, D. J. Eisenstein, M. A. Strauss, D. H. Weinberg, M. R. Blanton, J. A. Frieman, M. Fukugita, J. E. Gunn, A. J. S. Hamilton, G. R. Knapp, et al., *Phys. Rev. D* **74**, 123507 (2006), astro-ph/0608632.
- [16] W. J. Percival, R. C. Nichol, D. J. Eisenstein, D. H. Weinberg, M. Fukugita, A. C. Pope, D. P. Schneider, A. S. Szalay, M. S. Vogeley, I. Zehavi, et al., *ApJ* **657**, 51 (2007), astro-ph/0608635.
- [17] W. J. Percival, B. A. Reid, D. J. Eisenstein, N. A. Bahcall, T. Budavari, J. A. Frieman, M. Fukugita, J. E. Gunn, Ž. Ivezić, G. R. Knapp, et al., *MNRAS* **401**, 2148 (2010), 0907.1660.
- [18] E. A. Kazin, M. R. Blanton, R. Scoccimarro, C. K. McBride, A. A. Berlind, N. A. Bahcall, J. Brinkmann, P. Czarapata, J. A. Frieman, S. M. Kent, et al., *ApJ* **710**, 1444 (2010), 0908.2598.
- [19] F. Beutler, C. Blake, M. Colless, D. H. Jones, L. Staveley-Smith, L. Campbell, Q. Parker, W. Saunders, and F. Watson, *MNRAS* **416**, 3017 (2011), 1106.3366.
- [20] A. Albrecht, G. Bernstein, R. Cahn, W. L. Freedman, J. Hewitt, W. Hu, J. Huth, M. Kamionkowski, E. W. Kolb, L. Knox, et al., *ArXiv Astrophysics e-prints* (2006), astro-ph/0609591.
- [21] LSST Science Collaboration, P. A. Abell, J. Allison, S. F. Anderson, J. R. Andrew, J. R. P. Angel, L. Armus, D. Arnett, S. J. Asztalos, T. S. Axelrod, et al., *ArXiv e-prints* (2009), 0912.0201.
- [22] J. Green, P. Schechter, C. Baltay, R. Bean, D. Bennett, R. Brown, C. Conselice, M. Donahue, X. Fan, B. S. Gaudi, et al., *ArXiv e-prints* (2012), 1208.4012.
- [23] M. H. Goroff, B. Grinstein, S.-J. Rey, and M. B. Wise, *ApJ* **311**, 6 (1986).
- [24] B. Jain and E. Bertschinger, *ApJ* **431**, 495 (1994), astro-ph/9311070.
- [25] R. Scoccimarro and J. Frieman, *ApJS* **105**, 37 (1996), astro-ph/9509047.
- [26] Y. B. Zel'dovich, *A&A* **5**, 84 (1970).
- [27] F. R. Bouchet, S. Colombi, E. Hivon, and R. Juszkiewicz, *A&A* **296**, 575 (1995), astro-ph/9406013.
- [28] T. Matsubara, *Phys. Rev. D* **77**, 063530 (2008), 0711.2521.

- [29] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga, and R. Scoccimarro, *Phys. Rep.* **367**, 1 (2002), astro-ph/0112551.
- [30] J. Carlson, M. White, and N. Padmanabhan, *Phys. Rev. D* **80**, 043531 (2009), 0905.0479.
- [31] A. N. Taylor and A. J. S. Hamilton, *MNRAS* **282**, 767 (1996), astro-ph/9604020.
- [32] P. J. E. Peebles, *The large-scale structure of the universe* (1980).
- [33] C. Alcock and B. Paczynski, *Nature (London)* **281**, 358 (1979).
- [34] M. Chevallier and D. Polarski, *International Journal of Modern Physics D* **10**, 213 (2001), gr-qc/0009008.
- [35] E. V. Linder, *Physical Review Letters* **90**, 091301 (2003), astro-ph/0208512.
- [36] Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, et al., *ArXiv e-prints* (2018), 1807.06209.
- [37] S. Alam, F. D. Albareti, C. Allende Prieto, F. Anders, S. F. Anderson, T. Anderton, B. H. Andrews, E. Armengaud, É. Aubourg, S. Bailey, et al., *ApJS* **219**, 12 (2015), 1501.00963.
- [38] D. H. Jones, M. A. Read, W. Saunders, M. Colless, T. Jarrett, Q. A. Parker, A. P. Fairall, T. Mauch, E. M. Sadler, F. G. Watson, et al., *MNRAS* **399**, 683 (2009), 0903.5451.
- [39] N. Kaiser, *ApJL* **284**, L9 (1984).
- [40] J. N. Fry and E. Gaztanaga, *ApJ* **413**, 447 (1993), astro-ph/9302009.
- [41] M. Santos, D. Alonso, P. Bull, M. B. Silva, and S. Yahya, *Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14)* **21** (2015), 1501.03990.
- [42] D. Obreschkow, H.-R. Klöckner, I. Heywood, F. Levrier, and S. Rawlings, *ApJ* **703**, 1890 (2009), 0908.0983.
- [43] DESI Collaboration, A. Aghamousa, J. Aguilar, S. Ahlen, S. Alam, L. E. Allen, C. Allende Prieto, J. Annis, S. Bailey, C. Balland, et al., *ArXiv e-prints* (2016), 1611.00036.
- [44] A. Font-Ribera, E. Arnau, J. Miralda-Escudé, E. Rollinde, J. Brinkmann, J. R. Brownstein, K.-G. Lee, A. D. Myers, N. Palanque-Delabrouille, I. Pâris, et al., *JCAP* **5**, 018 (2013), 1303.1937.
- [45] R. A. Fisher, *Journal of the Royal Statistical Society* **98**, 39 (1935), ISSN 09528385, URL <http://www.jstor.org/stable/2342435>.
- [46] A. Heavens, *ArXiv e-prints* (2009), 0906.0664.
- [47] M. Tegmark, *Physical Review Letters* **79**, 3806 (1997), astro-ph/9706198.
- [48] H.-J. Seo and D. J. Eisenstein, *ApJ* **598**, 720 (2003), astro-ph/0307460.
- [49] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby, *ApJ* **538**, 473 (2000), astro-ph/9911177.
- [50] P. Bull, *ApJ* **817**, 26 (2016), 1509.07562.
- [51] D. Jeong and E. Komatsu, *ApJ* **651**, 619 (2006), astro-ph/0604075.
- [52] F. R. Bouchet, S. Colombi, E. Hivon, and R. Juszkiewicz, *A&A* **296**, 575 (1995), astro-ph/9406013.
- [53] T. Hiramatsu and A. Taruya, *Phys. Rev. D* **79**, 103526 (2009), 0902.3772.