วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(701) พฤษภาคม – สิงหาคม 2563
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล

The Numbers on a Pascal-Like Triangle

วรเชษฐ สมมะณี
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ เชียงใหม่ 50300

Worachead Sommanee
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Chiang Mai Rajabhat University, Chiang Mai 50300

Email: worachead_som@cmru.ac.th

วันที่รับบทความ : 3 ตุลาคม 2562 วันที่แก้ไขบทความ : 18 ธันวาคม 2562 วันที่ตอบรับบทความ : 5 มีนาคม 2563

บทคัดย่อ

ในปี ค.ศ.2014 Chen ได้สร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลเพื่อใช้ในการหาสูตรของผลบวกกำลังในรูป $\sum_{i=1}^{n} i^k$ ในบทความวิจัยนี้เราศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองกับจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen ยิ่งไปกว่านั้นเราได้หาสูตรของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าว

คำสำคัญ: รูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง

ABSTRACT

In 2014, Chen constructed a Pascal-like triangle for finding the formula of power sums of the form $\sum_{i=1}^{n} i^k$. In this paper, we investigate a relationship between the Stirling

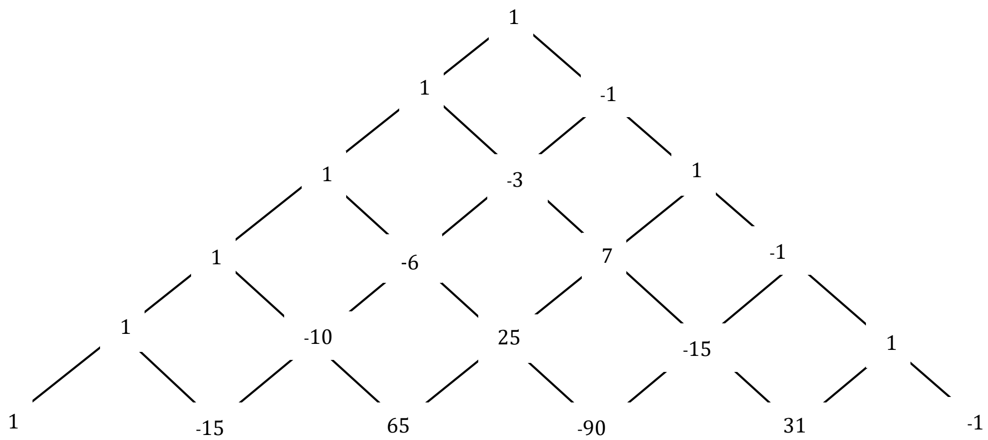
numbers of the second kind and the numbers on the Chen's Pascal-like triangle. Moreover, we find the formula of the numbers on such the Pascal-like triangle.

Keywords: Pascal-like triangle, Stirling number of the second kind

1. บทนำ

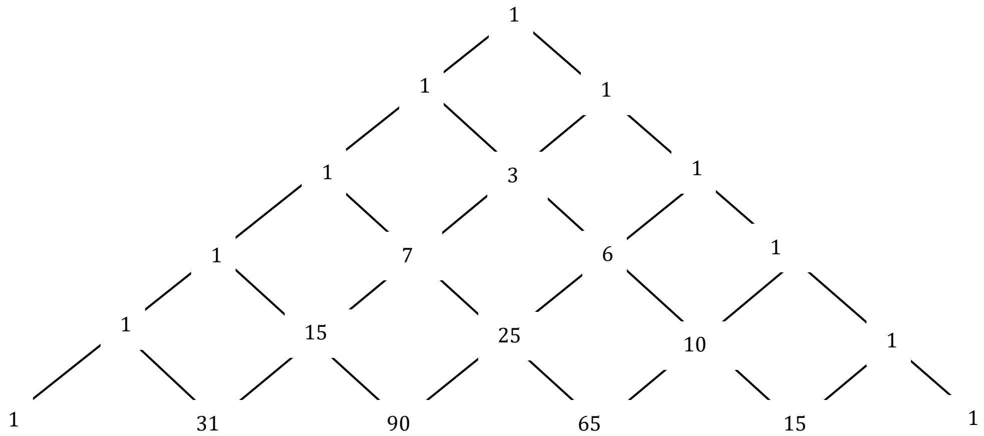
รูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล (Pascal-like triangle) ถูกสร้างขึ้นมาโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่าน ซึ่งรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลเหล่านั้นมีรูปแบบและลักษณะการนิยามที่แตกต่างกัน (ผู้อ่านสามารถดูตัวอย่างได้จากเอกสารอ้างอิง [1], [2], [4] และ [5])

ในปี ค.ศ. 2014 Chen [2] ได้ศึกษาสูตรของผลบวกกำลังในรูป $\sum_{i=1}^{n} i^k$ โดยเขาได้สร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลซึ่งสามารถนำมาช่วยในการคำนวณหาผลบวกกำลังได้ง่ายขึ้น



รูปที่ 1.1 รูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen (แสดง 6 แถวแรก)

ผู้อ่านสามารถดูวิธีการสร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen ได้ในเอกสารอ้างอิง [2] นอกจากนี้ผู้เขียนยังได้ให้หมายเหตุที่สำคัญไว้ว่าหากเรานำเครื่องหมายลบทั้งหมดในรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าวออก จะปรากฏจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (Stirling number of the second kind) ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 รูปสามเหลี่ยมสำหรับจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (แสดง 6 แถวแรก)

ทั้งนี้ผู้อ่านสามารถศึกษาการสร้างรูปสามเหลี่ยมสำหรับจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองได้จากเอกสารอ้างอิง [3, หน้า 112]

ในบทความวิจัยนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองกับจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen พร้อมทั้งหาสูตรของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าว

2. ความรู้เบื้องต้นและสัญลักษณ์

กำหนดให้ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 \le k \le n$ และให้จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล ตัวที่ k ของแถวที่ n เขียนแทนด้วย $a_{n,k}$ โดยการสร้างจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลในรูปที่ 1.1 จะได้ว่า

$$a_{n,1} = 1,\ a_{n,n} = (-1)^{n+1} \text{ สำหรับทุก ๆ } n \tag{2.1}$$

และ

$$a_{n,k} = (-n+k-1)a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} \text{ สำหรับ } 1 < k < n \tag{2.2}$$

ในบทความวิจัย [2] ผู้เขียนได้แสดงว่า $\sum_{i=1}^{n} i^m = \sum_{j=1}^{m} a_{m,j} \dfrac{n(n+1)\cdots(n+m-j+1)}{m-j+2}$

บทนิยาม 2.1 *จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง* (*Stirling number of the second kind*) คือ จำนวนผลแบ่งกั้น (partition) ที่แตกต่างกันทั้งหมดของเซตที่มีสมาชิก n ตัว โดยแบ่งเป็น k ส่วน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $S(n,k)$ เมื่อ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 \le k \le n$

ผู้อ่านสามารถศึกษาตัวอย่างและสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง ได้จากเอกสารอ้างอิง [3] และ [6]

ทฤษฎีบท 2.1 [3, Theorem 37]

1. $S(n,n) = S(n,1) = 1$ สำหรับ $n \geq 1$
2. $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ สำหรับ $n \geq 2$
3. $S(n,n-1) = \binom{n}{2}$ สำหรับ $n \geq 2$

ทฤษฎีบท 2.2 [3, Theorem 38] $S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)$ สำหรับ $1 \leq k \leq n$

ทฤษฎีบท 2.3 [6, หน้า 118] $S(n,k) = \dfrac{(-1)^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} j^n$ สำหรับ $1 \leq k \leq n$

สูตรในทฤษฎีบท 2.3 เรียกว่าสูตรออยเลอร์สำหรับจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (Euler's formula for Stirling numbers of the second kind)

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 2.3 เราจะเห็นว่า

$$S(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} j^n \text{ สำหรับ } 1 \leq k \leq n \tag{2.3}$$

3. จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองกับจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen พร้อมทั้งหาสูตรของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าว

บทตั้ง 3.1 $S(n,2) = (-1)^n a_{n,n-1}$ สำหรับ $n \geq 2$

บทพิสูจน์ จะพิสูจน์โดยการใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

สังเกตได้ว่า $S(2,2) = 1 = (-1)^2(1) = (-1)^2 a_{2,1} = (-1)^2 a_{2,2-1}$

ให้ $r \geq 2$ และสมมติให้ $S(r,2) = (-1)^r a_{r,r-1}$ *(*)*

เราจะแสดงว่า $S(r+1,2) = (-1)^{r+1} a_{r+1,r}$

โดยทฤษฎีบท 2.2 สมการ (*) และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 1 ได้ว่า

$$S(r+1,2) = 2S(r,2) + S(r,1) = 2(-1)^r a_{r,r-1} + 1$$

จากสมการ (2.2) และ (2.1) ได้ว่า

$$\begin{aligned}(-1)^{r+1}a_{r+1,r} &= (-1)^{r+1}\left((-r-1+r-1)a_{r,r-1}+a_{r,r}\right)\\ &= (-1)^{r+1}\left((-2)a_{r,r-1}+(-1)^{r+1}\right)\\ &= 2(-1)^{r}a_{r,r-1}+1\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $S(r+1,2)=(-1)^{r+1}a_{r+1,r}$

เพราะฉะนั้น $S(n,2)=(-1)^{n}a_{n,n-1}$ สำหรับ $n\ge 2$ □

ทฤษฎีบท 3.2 $S(n,k) = (-1)^{n+k}a_{n,n-k+1}$ สำหรับ $1\le k\le n$ ทุก $n\ge 1$

บทพิสูจน์ ให้ $n\ge 1$ ถ้า $k=1$ จะได้ว่า

$$S(n,1)=1=(-1)^{2(n+1)}=(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}=(-1)^{n+1}a_{n,n}=(-1)^{n+1}a_{n,n-1+1}$$

และถ้า $k=n$ แล้วจะได้ $S(n,n)=1=(1)(1)=(-1)^{2n}a_{n,1}=(-1)^{n+n}a_{n,n-n+1}$

ดังนั้น $S(n,k)=(-1)^{n+k}a_{n,n-k+1}$ เมื่อ $k=1$ หรือ $k=n$

ต่อไปกำหนดให้ $1<k<n$ ซึ่งเป็นผลให้ $n\ge 3$

จะพิสูจน์โดยการใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่า

$$S(n,k)=(-1)^{n+k}a_{n,n-k+1} \text{ สำหรับ } 1<k<n, \text{ ทุก } n\ge 3$$

พิจารณากรณี $n=3$ จะเห็นว่า ถ้า $1<k<n=3$ แล้ว $k=2$

จะได้ว่า $S(3,2) = 3 = (-1)(-3) = (-1)^{5}a_{3,2} = (-1)^{3+2}a_{3,3-2+1}$

ให้ $r\ge 3$ และสมมติให้ $S(r,k)=(-1)^{r+k}a_{r,r-k+1}$ สำหรับ $1<k<r$ (**)

เราจะแสดงว่า $S(r+1,k)=(-1)^{r+k+1}a_{r+1,r-k+2}$ สำหรับ $1<k<r+1$

สำหรับกรณี $k=2$ โดยบทตั้ง 3.1 จะได้ $S(r+1,2) = (-1)^{r+1}a_{r+1,r+1-1} = (-1)^{r+2+1}a_{r+1,r-2+2}$

สำหรับกรณี $k=r$ โดยทฤษฎีบท 2.2 ทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 1 และสมการ (**) ได้ว่า

$$S(r+1,r) = rS(r,r)+S(r,r-1) = r(1)+(-1)^{r+(r-1)}a_{r,r-(r-1)+1} = r-a_{r,2}$$

โดยสมการ (2.2) และ (2.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(-1)^{r+r+1}a_{r+1,r-r+2} &= (-1)^{2r+1}a_{r+1,2} = (-1)\left((-r-1+2-1)a_{r+1-1,2-1}+a_{r+1-1,2}\right)\\ &= -(-ra_{r,1}+a_{r,2}) = r-a_{r,2}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $S(r+1,r) = (-1)^{r+r+1}a_{r+1,r-r+2}$

สำหรับกรณี $2<k<r$ สังเกตได้ว่า $1<k-1<r-1$

โดยทฤษฎีบท 2.2 และสมการ (**) ได้ว่า

$$S(r+1,k) = kS(r,k)+S(r,k-1) = k(-1)^{r+k}a_{r,r-k+1}+(-1)^{r+k-1}a_{r,r-k+2}$$

โดยสมการ (2.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(-1)^{r+k+1}a_{r+1,r-k+2} &= (-1)^{r+k+1}\left((-r-1+r-k+2-1)a_{r,r-k+1}+a_{r,r-k+2}\right)\\ &= k(-1)^{r+k}a_{r,r-k+1}+(-1)^{r+k+1}a_{r,r-k+2}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $S(r+1,k) = (-1)^{r+k+1}a_{r+1,r-k+2}$ สำหรับ $2<k<r$

ดังนั้น $S(n,k) = (-1)^{n+k}a_{n,n-k+1}$ สำหรับ $1<k<n$ □

บทแทรก 3.3 $a_{n,k} = (-1)^{k+1}S(n,n-k+1)$ สำหรับ $1\le k\le n$ ทุก $n\ge 1$

บทพิสูจน์ ให้ $n\ge 1$ และ $1\le k\le n$ สังเกตว่า $1\le n-k+1\le n$

โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $S(n,n-k+1) = (-1)^{n+n-k+1}a_{n,n-(n-k+1)+1} = (-1)^{-(k+1)}a_{n,k}$

ดังนั้น $a_{n,k} = (-1)^{k+1}S(n,n-k+1)$ □

บทแทรก 3.4 $a_{n,k} = \dfrac{(-1)^n}{(n-k+1)!}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-k+1}(-1)^j\binom{n-k+1}{j}j^n$ สำหรับ $1\le k\le n$ ทุก $n\ge 1$

บทพิสูจน์ ให้ $n\ge 1$ และ $1\le k\le n$ โดยบทแทรก 3.3 และสมการ (2.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}a_{n,k} &= (-1)^{k+1}S(n,n-k+1)\\ &= (-1)^{k+1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!}\sum_{j=1}^{n-k+1}(-1)^j\binom{n-k+1}{j}j^n\\ &= \frac{(-1)^n}{(n-k+1)!}\sum_{j=1}^{n-k+1}(-1)^j\binom{n-k+1}{j}j^n\end{aligned}$$ □

ตัวอย่าง 3.1 ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการหาค่าของ $a_{6,3}$ โดยการใช้สูตรในบทแทรก 3.4

$$a_{6,3} = \frac{(-1)^6}{(6-3+1)!}\sum_{j=1}^{6-3+1}(-1)^j\binom{6-3+1}{j}j^6 = 65$$

จากรูปที่ 1.1 จะเห็นว่า $a_{6,3}$ มีค่าเป็น 65 ตรงกับค่าที่คำนวณได้จากสูตรในบทแทรก 3.4

บทแทรก 3.5 $a_{n,2} = -\dbinom{n}{2}$ สำหรับ $n\ge 2$

บทพิสูจน์ ให้ $n\ge 2$ โดยบทแทรก 3.3 และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$a_{n,2} = (-1)^{2+1}S(n,n-2+1) = -S(n,n-1) = -\binom{n}{2}$$ □

บทแทรก 3.6 $a_{n,n-1} = (-1)^n(2^{n-1}-1)$ สำหรับ $n \geq 2$

บทพิสูจน์ ให้ $n \geq 2$ โดยบทแทรก 3.3 และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$a_{n,n-1} = (-1)^{n-1+1}S(n,n-(n-1)+1) = (-1)^n S(n,2) = (-1)^n(2^{n-1}-1) \qquad \square$$

ข้อสังเกต ผู้เขียนขอนิยาม $C(n)$ เป็นผลบวกของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen ในแถวที่ n นั่นคือ $C(n) = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}$ ตัวอย่างเช่น $C(1)=1,\ C(2)=1+(-1)=0,$ $C(3)=1+(-3)+1=-1,\ C(4)=1,\ C(5)=2$ และ $C(6)=-9$ เป็นต้น จากตัวอย่างจะเห็นว่าลำดับของ $C(n)$ มีลักษณะคล้ายกับจำนวนเบลเติมเต็ม (complementary Bell number) B_n โดยนิยาม $B_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k S(n,k)$ และมีลำดับเป็น $-1,0,1,1,-2,-9,-9,\ldots$ (สำหรับ $n \geq 1$) ผู้อ่านสามารถดูลำดับของ B_n เพิ่มเติมได้ใน The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS A000587) [7] จากตัวอย่างผู้เขียนคาดว่า $C(n)=(-1)^n B_n$ ดังนั้นผู้ที่สนใจสามารถทำการศึกษาข้อสมมติฐานดังกล่าวได้

เอกสารอ้างอิง

[1] Bayat, M., Teimoori, H., and Khatami, Z. (2014). Pascal-like Triangle and Pascal-like Functional Matrix. *Journal of Mathematical Extension*, *7*, p. 67 - 82.

[2] Chen, Z. (2014). A Pascal-like Triangle From Finding Power Sums. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 45(6), p. 932 - 938.

[3] Cohen, D. I. (1978). *Basic Techniques of Combinatorial Theory* (No. 04; QA164, C6.). Michigan: John Wiley and Sons Ltd.

[4] Matsui, H., Minematsu, D., Yamauchi, T., and Adera, R. M. (2010). Pascal-like Triangles and Fibonacci-like Sequences. *The Mathematical Gazette*, *94*(529), p. 27 - 41.

[5] Neal, D. (1994). The Series and a Pascal-like Triangle. *The College Mathematics Journal*, *25*(2), p. 99 - 101.

[6] Quaintance, J., and Gould, H. W. (2015). *Combinatorial Identities for Stirling* Numbers: The Unpublished Notes of H.W. Gould. World Scientific.

[7] Sloane, N. J. A. (2020). *Rao Uppuluri-Carpenter* (*or Complementary Bell number*). Retrieved January 24, 2020, from http://oeis.org/A000587.