วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 65(701) พฤษภาคม – สิงหาคม 2563
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ปัญหาที่นำไปสู่จุดเริ่มต้นของทฤษฎีความน่าจะเป็น
Problems Leading to the Origin of Probability Theory

เรวัต ถนัดกิจหิรัญ
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท ปทุมวัน กรุงเทพมหานคร 10330

Raywat Tanadkithirun
Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Payathai Road, Patumwan, Bangkok 10330

Email: raywat.t@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 28 ตุลาคม 2562 วันที่แก้ไขบทความ : 24 ธันวาคม 2562 วันที่ตอบรับบทความ : 8 มกราคม 2563

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ปัญหาสองปัญหาซึ่งนำไปสู่จุดเริ่มต้นของทฤษฎีความน่าจะเป็นที่ อองตวน กอมโบด ถาม เบล์ส ปาสคาล ในปี ค.ศ.1654 ได้ถูกนำเสนอ

คำสำคัญ: ทฤษฎีความน่าจะเป็น ปัญหาลูกเต๋า ปัญหาการแบ่งเงินเดิมพัน

ABSTRACT

In this article, two problems leading to the origin of probability theory that Antoine Gombaud asked Blaise Pascal in AD 1654 are presented.

Keywords: Probability theory, Dice problem, Problem of division of the stakes

1. บทนำ

แหล่งอ้างอิงต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับประวัติศาสตร์ของทฤษฎีความน่าจะเป็น เช่น [1, 2, 3, 4, 5] ชี้ตรงกันว่าทฤษฎีความน่าจะเป็นมีจุดเริ่มต้นในปี ค.ศ.1654 จากการที่ อองตวน กอมโบด (Antoine Gombaud) หรืออีกชื่อหนึ่งที่คนทั่วไปเรียกคือ เชอวาลิเยร์ เดอ เมเร (Chevalier de Méré) นักพนันชาวฝรั่งเศสที่มีชื่อเสียงในยุคนั้นได้ถาม เบล์ส ปาสคาล (Blaise Pascal) เกี่ยวกับปัญหาเกมการพนันสองปัญหาที่เขาพบเจอจากประสบการณ์การพนัน ทำให้ปาสคาลเขียนจดหมายไปปรึกษาปัญหาเหล่านี้กับ ปิแยร์ เดอ แฟร์มาต์ (Pierre de Fermat) และนั่นทำให้เกิดการเขียนจดหมายโต้ตอบกันระหว่างนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสที่มีชื่อเสียงแห่งยุคทั้งสอง ซึ่งนับเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาทฤษฎีความน่าจะเป็นอย่างจริงจังเป็นครั้งแรก แม้ว่าจะมีการศึกษาเกมการพนันบางเกมมาบ้างแล้วก่อนหน้านั้น แต่ก็ยังไม่มีการศึกษาในแง่ทฤษฎีทั่วไปของความน่าจะเป็นก่อนเหตุการณ์สำคัญครั้งนี้

อันที่จริงแล้วทั้งสองปัญหาดังกล่าวที่กอมโบดถามปาสคาลนั้น ไม่ได้มาจากประสบการณ์การพนันส่วนตัวของเขาเองทั้งหมด ปัญหาแรกเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการโยนลูกเต๋า ซึ่งเขารู้สึกสับสนในคำตอบที่ได้จากการทดลองในการเล่นพนันจริงที่ขัดแย้งกับหลักการในการพนันที่ยึดถือกันมานาน หลักการหนึ่งซึ่งเขาถือว่าเป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ปัญหาที่สองเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการแบ่งรางวัลในการแข่งขันที่ต้องจบลงก่อนที่จะได้ผู้ชนะ ซึ่งสำหรับปัญหานี้ได้มีหลายความพยายามในการหาคำตอบ แต่ยังไม่มีใครที่สามารถให้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ แม้แต่กอมโบดเองก็ยังไม่รู้คำตอบของปัญหานี้ด้วย ปาสคาลและแฟร์มาต์ช่วยกันคิดหาคำตอบของปัญหานี้โดยผ่านการเขียนจดหมายโต้ตอบกัน คนแรกที่หาคำตอบของปัญหานี้ได้ ก็คือ แฟร์มาต์ แต่วิธีการหาคำตอบของปาสคาลนั้นง่ายกว่าวิธีของแฟร์มาต์มาก และคำตอบนั้นยังนำไปสู่การศึกษาทฤษฎีความน่าจะเป็นอย่างจริงจังในเวลาต่อมา

บทความนี้จะเล่าถึงทั้งสองปัญหาดังกล่าว พร้อมทั้งให้คำตอบที่ปาสคาลและแฟร์มาต์ช่วยกันคิดโดยใช้ภาษาปัจจุบันของทฤษฎีความน่าจะเป็นที่ท่านผู้อ่านคุ้นเคยในการอธิบายประกอบ ขอให้ผู้อ่านพึงระลึกว่า ณ เวลา ค.ศ.1654 นั้นยังไม่มีเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เหมือนที่ใช้กันทั่วไปในปัจจุบัน เช่น ลอการีทึมฐานธรรมชาติ อนุกรมเทเลอร์ เมเชอร์ความน่าจะเป็น เป็นต้น แม้แต่คำว่า “ความน่าจะเป็น” ก็ยังไม่มีการนิยาม และความน่าจะเป็นไม่ได้เป็นตัวเลขที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 และไม่มีสูตรที่เกี่ยวกับการคำนวณความน่าจะเป็นต่าง ๆ อีกด้วย

2. ปัญหาลูกเต๋า

ปัญหาแรกที่กอมโบดถามปาสคาลเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการโยนลูกเต๋า ปัญหามีอยู่ว่า "ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน ต้องโยนอย่างน้อยกี่ครั้ง โอกาสที่จะได้แต้มคู่ 6 อย่างน้อย 1 ครั้งจึงจะมากกว่าครึ่ง" [5] สำหรับปัญหาลูกเต๋านี้มีผู้คิดคำตอบได้ก่อนหน้านั้นแล้วซึ่งรวมถึงกอมโบดด้วย แต่สิ่งที่ทำให้เขาสับสนจนต้องมาถามปาสคาลคือ คำตอบที่ได้นี้ไม่สอดคล้องกับหลักการในการพนันอันเก่าแก่หลักการหนึ่งที่ตัวเขาคิดว่าเป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ คำตอบสำหรับปัญหานี้ที่ปาสคาลได้ให้ไว้ ทำให้เกิดสูตรทางทฤษฎีความน่าจะเป็นที่ท่านผู้อ่านคุ้นเคยในเวลาต่อมานั่นคือ

$$P(A)=1-P(A^c) \text{ สำหรับเหตุการณ์ } A \text{ ใด ๆ}$$

ซึ่งการใช้สูตรความน่าจะเป็นนี้จะช่วยให้การหาคำตอบสำหรับปัญหานี้ง่ายขึ้นอย่างมาก ดังนี้

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ p_n แทนความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มคู่ 6 อย่างน้อย 1 ครั้งในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน n ครั้ง และให้ q_n แทนความน่าจะเป็นที่จะไม่ได้แต้มคู่ 6 เลยในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน n ครั้ง จะได้ว่า

$$p_n = 1-q_n = 1-\left(1-\frac{1}{36}\right)^n = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^n \tag{1}$$

สังเกตว่า $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n$ เป็นลำดับเพิ่ม ดังนั้นเราต้องการหา n ที่เล็กที่สุดที่ทำให้ $p_n > \frac{1}{2}$ ซึ่งจากการคำนวณพบว่า $p_{24} \approx 0.4914$ และ $p_{25} \approx 0.5055$ ดังนั้นคำตอบของปัญหานี้คือ $n = 25$ ครั้งนั่นเอง

สำหรับที่มาของคำถามนี้ มาจากการที่ในตอนแรกนั้นกอมโบดเล่นการพนันโดยพนันว่า "ในการโยนลูกเต๋าหนึ่งลูก 4 ครั้ง เขาจะได้แต้ม 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง" ซึ่งเขาชนะเกมการพนันนี้เป็นส่วนใหญ่ ต่อมาเขาเล่นการพนันใหม่โดยพนันว่า "ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 24 ครั้ง เขาจะได้แต้มคู่ 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง" ซึ่งเขาเลือกใช้จำนวนในการโยนเป็น 24 ครั้ง เนื่องจากเขาใช้หลักการในการพนันอันเก่าแก่หลักการหนึ่งที่เขาเชื่อมั่นมาก ๆ แต่ในการเล่นพนันแบบใหม่นี้เขาคาดว่าตนเองจะเป็นฝ่ายที่แพ้พนันได้มากกว่า และจากการทดลองเล่นพนันมานานเขาพบว่า ต้องเปลี่ยนจำนวนในการโยนเป็น 25 ครั้งจึงจะทำให้โอกาสที่จะชนะพนันนั้นมากกว่าครึ่ง แต่อย่างไรก็ตามกอมโบดเชื่อมั่นในหลักการในการพนันอันเก่าแก่นั้นเป็นอย่างมาก และประกาศว่าทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ไม่สอดคล้องกัน [5]

หลักการในการพนันที่ว่านี้เกี่ยวกับการหาเลขวิกฤตของเกมการพนัน เลขวิกฤตของเกมการพนันคือจำนวนใน “การเล่นพนัน” ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ความน่าจะเป็นที่ผู้พนันจะได้ “ความสำเร็จ” อย่างน้อยหนึ่งครั้งเป็น $\frac{1}{2}$ หรือมากกว่า สำหรับการเล่นพนันของกอมโบดคำว่า “การเล่นพนัน” หมายถึงการโยนลูกเต๋าลูกเดียวในการพนันแบบแรก หรือการโยนลูกเต๋าสองลูกในการพนันแบบที่สอง และคำว่า “ความสำเร็จ” หมายถึงการได้แต้ม 6 สำหรับการโยนด้วยลูกเต๋าลูกเดียวในการพนันแบบแรก หรือการได้แต้มคู่ 6 สำหรับการโยนด้วยลูกเต๋าสองลูกในการพนันแบบที่สอง หลักการพนันอันเก่าแก่ที่กอมโบดยึดถือกล่าวว่า [5] ในเกมการพนันหนึ่งที่มีโอกาสในการเล่นพนัน 1 ครั้งได้ความสำเร็จเป็น 1 ใน N_1 ให้ n_1 แทนเลขวิกฤตของเกมการพนันนี้ และสำหรับอีกเกมการพนันหนึ่งที่มีโอกาสในการเล่นพนัน 1 ครั้งได้ความสำเร็จเป็น 1 ใน N_2 ให้ n_2 แทนเลขวิกฤตของเกมการพนันที่สองนี้ จะได้ว่า

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2}$$

ซึ่งสำหรับการพนันของกอมโบดนี้ เขาสามารถคำนวณได้ว่าสำหรับการโยนด้วยลูกเต๋าลูกเดียวนั้น การโยน 4 ครั้งจะทำให้การพนันว่าจะได้แต้ม 6 อย่างน้อย 1 ครั้งนั้นมีจำนวนผลลัพธ์ที่ชนะต่อผลลัพธ์ที่แพ้เป็น 671 ต่อ 625 จากผลลัพธ์ในการโยนทั้งหมด $6^4 = 1296$ รูปแบบ ส่วนการโยนที่น้อยกว่า 4 ครั้งจะทำให้ได้จำนวนผลลัพธ์ที่แพ้มากกว่าผลลัพธ์ที่ชนะ ดังนั้นเลขวิกฤตของการพนันที่ใช้การโยนด้วยลูกเต๋าลูกเดียวซึ่งมี $N_1 = 6$ คือ $n_1 = 4$ ดังนั้นสำหรับการโยนด้วยลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกันนั้น จะได้ว่า $N_2 = 36$ และ

$$n_2 = \frac{n_1}{N_1} \times N_2 = \frac{4}{6} \times 36 = 24$$

ในความเป็นจริงแล้วหลักการหาเลขวิกฤตที่กอมโบดใช้นี้ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป โดย อับราฮัม เดอ มัวร์ (Abraham de Moivre) ได้พิสูจน์ไว้ในเวลาต่อมาในปี ค.ศ.1718 ว่า “ผลคูณของเลขวิกฤตและความน่าจะเป็นของความสำเร็จหนึ่งครั้งมีค่าประมาณเป็น $\ln(2) \approx 0.693$ สำหรับความน่าจะเป็นของความสำเร็จหนึ่งครั้งที่น้อยเพียงพอ” [3] จากแนวคิดเดียวกันกับสมการที่ (1) จะได้ว่าเกมการพนันที่มีโอกาสในการเล่นพนัน 1 ครั้งแล้วได้ความสำเร็จเป็น p จะมีค่าวิกฤต n เป็น $\lceil x \rceil$ ซึ่งคือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x เมื่อ x คือค่าที่ทำให้

$$1 - (1-p)^x = \frac{1}{2}$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ค่า x เป็น $x=-\dfrac{\ln 2}{\ln(1-p)}$ ดังนั้น

$$n=\left\lceil -\frac{\ln 2}{\ln(1-p)} \right\rceil$$

จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์

$$\ln(1-p)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p^m}{m}$$

ดังนั้นเมื่อ p มีค่าน้อย ๆ จะได้ว่า $\ln(1-p)\approx -p$ ทำให้ค่าประมาณของเลขวิกฤต n คือ

$$n\approx\left\lceil \frac{\ln 2}{p} \right\rceil\approx\left\lceil \frac{0.693}{p} \right\rceil$$

ดังนั้นหลักการหาเลขวิกฤตที่กอมโบดใช้นั้นเป็นจริงเพียงในกรณีที่ความน่าจะเป็นที่จะชนะในการเล่นพนัน 1 ครั้งมีค่าน้อย ๆ เท่านั้น ซึ่งสมมูลกับการที่ค่าของ N_1 และ N_2 มีค่ามาก ๆ เท่านั้น สำหรับ $N_1=6$ โอกาสในการเล่นพนัน 1 ครั้งแล้วชนะคือ $p_1=\dfrac{1}{6}$ ดังนั้นค่าประมาณเลขวิกฤตที่ได้คือ $\lceil 0.693\times 6\rceil=5$ ซึ่งไม่ตรงกับค่าจริงตามทฤษฎี

$$n_1=\left\lceil -\frac{\ln 2}{\ln\left(1-\frac{1}{6}\right)} \right\rceil=4$$

นั่นคือ $N_1=6$ นั้นไม่มากเพียงพอที่จะใช้ค่าประมาณนี้นั่นเอง แต่สำหรับ $N_2=36$ จะได้ค่าประมาณเลขวิกฤตเป็น $\lceil 0.693\times 36\rceil=25$ ซึ่งตรงกับค่าจริง

$$n_2=\left\lceil -\frac{\ln 2}{\ln\left(1-\frac{1}{36}\right)} \right\rceil=25$$

ดังนั้นกอมโบดเข้าใจผิดไปเองว่าหลักการในการพนันที่เขายึดถือนั้นคือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเสมอ อย่างไรก็ตามปัญหานี้ก็ถือเป็นตัวอย่างที่ทำให้นักคณิตศาสตร์รุ่นต่อมาได้วิเคราะห์ว่าหลักการนั้นผิดอย่างไร และทำให้เกิดการพัฒนาทางด้านทฤษฎีความน่าจะเป็นต่อมา

3. ปัญหาการแบ่งเงินเดิมพัน

ปัญหาที่สองที่กอมโบดถามปาสคาลเป็นปัญหาเกี่ยวกับการแบ่งเงินเดิมพันในการแข่งที่ต้องจบลงกลางคันก่อนที่จะได้ผู้ชนะ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อของ problem of points หรือ problem of division of the stakes กล่าวว่า “ในเกมที่มีผู้เล่น 2 คน ซึ่งแต่ละคนมีโอกาสที่จะชนะในแต่ละเกมเท่า ๆ กัน ทั้งสองคนตกลงกันว่าผู้ที่ชนะได้ N เกมเป็นคนแรกจะเป็นผู้ชนะในที่สุดและได้เงินเดิมพันไปทั้งหมดคนเดียว แต่ปรากฏว่าเมื่อผู้เล่นคนแรกชนะได้ a เกม และผู้เล่นคนที่สองชนะได้ b เกมก็มีเหตุที่ทำให้ต้องหยุดเล่น จึงเกิดปัญหาว่าควรจะแบ่งเงินเดิมพันอย่างไรจึงจะยุติธรรม” [5]

พิจารณากรณีตัวอย่างเช่น สำหรับ $N=6,\ a=4,\ b=3$ จะเห็นได้ว่าผู้เล่นคนแรกต้องการชนะอีก 2 เกม และผู้เล่นคนที่สองต้องการชนะอีก 3 เกม แฟร์มาต์ได้ให้วิธีคิดไว้ว่าถ้าหากให้ทั้งสองคนเล่นต่อไปอีก 4 เกมจะต้องมีผู้ที่ชนะครบ 6 เกมอย่างแน่นอน ในแต่ละเกมที่เล่นนี้สมมติให้สัญลักษณ์ W แทนการชนะของผู้เล่นคนแรก และ L แทนการแพ้ของผู้เล่นคนแรก ดังนั้นในการเล่นต่อไปอีก 4 เกมจะมีผลลัพธ์ได้ 16 รูปแบบได้แก่

WWWW, WWWL, WWLW, WWLL, WLWW, WLWL, WLLW, WLLL,
LWWW, LWWL, LWLW, LWLL, LLWW, LLWL, LLLW, LLLL

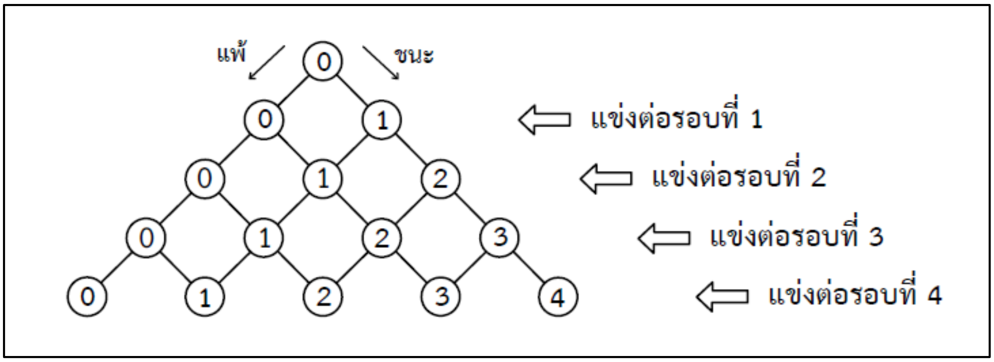
โดยที่สัญลักษณ์ในแต่ละตำแหน่งแทนการชนะหรือแพ้ของผู้เล่นคนแรกในเกมที่ 1 ถึงเกมที่ 4 ตามลำดับ จากผลลัพธ์ทั้ง 16 รูปแบบที่ได้ มีอยู่ 11 รูปแบบที่ผู้เล่นคนแรกจะชนะครบ 6 เกมได้ก่อนผู้เล่นคนที่สอง ได้แก่

WWWW, WWWL, WWLW, WWLL, WLWW, WLWL,
WLLW, LWWW, LWWL, LWLW, LLWW

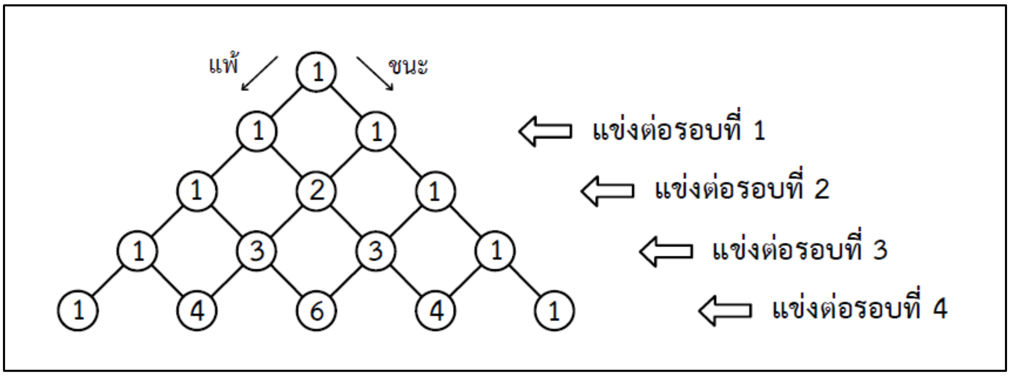
เนื่องจากผู้เล่นทั้งสองมีโอกาสที่จะชนะในแต่ละเกมเท่า ๆ กัน ดังนั้นเราจึงควรแบ่งสัดส่วนเงินเดิมพันให้ผู้เล่นคนแรกเป็นจำนวน $\dfrac{11}{16}$ เท่าของเงินเดิมพัน สำหรับเงินเดิมพันส่วนที่เหลือเราจะให้ผู้เล่นคนที่สองซึ่งคิดเป็นเงินจำนวน $1-\dfrac{11}{16}=\dfrac{5}{16}$ เท่าของเงินเดิมพัน

วิธีการคิดของแฟร์มาต์สำหรับปัญหานี้ คือการเขียนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ แล้วนับดูว่ามีจำนวนผลลัพธ์ที่ทำให้ผู้เล่นแต่ละคนชนะครบ N เกมก่อนเป็นสัดส่วนเท่าใดจากจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด แล้วแบ่งเงินเดิมพันให้ผู้เล่นแต่ละคนตามสัดส่วนที่ได้ จะเห็นได้ว่าหากจำนวนผลลัพธ์ที่

เป็นไปได้ทั้งหมดมีจำนวนมาก ๆ การเขียนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้แล้วนับจำนวนผลลัพธ์ที่ผู้เล่นแต่ละคนชนะจะทำได้ยาก **ปาสคาล**ได้เสนอวิธีคิดที่เหมือนกับ**แฟร์มาต์** เพียงแต่ไม่ต้องเขียนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ออกมา แต่ให้สนใจจำนวนสะสมในแต่ละรอบที่ผู้เล่นแต่ละคนชนะหรือแพ้ จากตัวอย่างข้างต้นเราสามารถเขียน**จำนวนการชนะสะสมของผู้เล่นคนแรกในการ**แข่งต่อไปอีก 4 เกม ตามรูปที่ 3.1 และหาจำนวน**รูปแบบของผลลัพธ์ที่ตรงกับจำนวนการชนะสะสม**ตามรูปที่ 3.2 ซึ่งเป็นที่มาของสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal’s triangle) ที่เราใช้กันในปัจจุบันนั่นเอง



รูปที่ 3.1 จำนวนการชนะสะสมของผู้เล่นคนแรกในการแข่งต่อไปอีก 4 เกม



รูปที่ 3.2 จำนวนรูปแบบของผลลัพธ์ที่ตรงกับจำนวนการชนะสะสมของผู้เล่นคนแรกในรูปที่ 3.1

จากตัวอย่างที่ $N=6,\ a=4,\ b=3$ ผู้เล่นคนแรกจะชนะครบ 6 เกมก่อนถ้าเขาชนะมากกว่าหรือเท่ากับ 2 เกมในการแข่งต่ออีก 4 เกม จากรูปที่ 3.1 และ 3.2 จะเห็นได้ว่าจำนวนของผลลัพธ์ที่ผู้เล่นคนแรกจะชนะมากกว่าหรือเท่ากับ 2 เกมคือ 6 + 4 + 1 = 11 รูปแบบ จากทั้งหมด 1 + 4 + 6

+ 4 + 1 = 16 รูปแบบ ดังนั้นเราจึงควรแบ่งสัดส่วนเงินเดิมพันให้ผู้เล่นคนแรกเป็นจำนวน $\frac{11}{16}$ เท่าของเงินเดิมพัน ซึ่งตรงกับคำตอบที่แฟร์มาต์ได้ให้ไว้ แต่จะเห็นได้ว่าเราไม่จำเป็นต้องเขียนผลลัพธ์ทุกรูปแบบออกมาจริง ๆ ซึ่งสามารถทำได้ง่ายกว่ามากในกรณีที่จำนวนผลลัพธ์มีจำนวนมาก ๆ สังเกตว่าเราสามารถใช้สามเหลี่ยมปาสคาลนี้เขียนสัดส่วนเงินเดิมพันของผู้เล่นคนแรกได้เป็น

$$\sum_{i=2}^{4}\binom{4}{i}\frac{1}{2^4}=\left(6\times\frac{1}{2^4}\right)+\left(4\times\frac{1}{2^4}\right)+\left(1\times\frac{1}{2^4}\right)=\frac{11}{16}$$

สำหรับในกรณี N,a,b ทั่วไปแล้ว ผู้เล่นคนแรกต้องการชนะอีก $N-a$ เกม และผู้เล่นคนที่สองต้องการชนะอีก $N-b$ เกม ดังนั้นถ้าหากให้ทั้งสองคนเล่นต่อไปอีก $M=(N-a)+(N-b)-1$ เกม จะต้องมีผู้ที่ชนะครบ N เกมก่อนแน่นอน ถ้าเราสมมติให้มีการแข่งขันต่อไปอีก M เกม จำนวนผลลัพธ์ที่ผู้เล่นคนแรกจะชนะครบ N เกมก่อนคือ ผลรวมของจำนวนผลลัพธ์ที่ผู้เล่นคนแรกชนะตั้งแต่ $N-a$ เกมจนถึง M เกม ส่วนจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดจากการเล่นเกมต่อไปอีก M เกม คือ 2^M ดังนั้นสัดส่วนเงินเดิมพันของผู้เล่นคนแรกจึงเท่ากับ

$$\sum_{i=N-a}^{M}\binom{M}{i}\frac{1}{2^M}$$

ปัญหาการแบ่งเงินเดิมพันนี้เป็นที่มาของการแจกแจงทวินาม การแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์จำนวนในการทดลองที่เป็นอิสระต่อกันเป็น n และอัตราสำเร็จในแต่ละการทดลองเป็น p จะมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,\ldots,n$$

โดยที่ X คือจำนวนครั้งของการทดลองที่สำเร็จในการทดลอง n ครั้งนั้น สำหรับปัญหาการแบ่งเงินเดิมพันนี้ จำนวนผลลัพธ์ที่ผู้เล่นคนแรกชนะในการแข่งต่ออีก M เกม มีการแจกแจงทวินามด้วยพารามิเตอร์ $n=M$ และ $p=\frac{1}{2}$ เราสามารถขยายโจทย์ปัญหานี้ให้ทั่วไปยิ่งขึ้นเช่นเปลี่ยนความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นแต่ละคนจะชนะในการแข่งแต่ละครั้ง หรือแม้กระทั่งพิจารณาในกรณีที่มีผู้เล่นมากกว่าสองคนด้วย ซึ่งเป็นที่มาของตัวแปรสุ่มพหุนามในเวลาต่อมาอีกด้วย

4. สรุป

ปัญหาทั้งสองที่กอมโบดถามปาสคาลนั้นอาจจะดูไม่ยากสำหรับความรู้ในปัจจุบัน แต่ปัญหาทั้งสองนี้เองที่เป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาทฤษฎีความน่าจะเป็นอย่างจริงจัง และพัฒนามาเป็นทฤษฎีความน่าจะเป็นที่มีอยู่ในปัจจุบัน เราควรขอบคุณ กอมโบด ปาสคาล แฟร์มาต์ และอีกหลายบุคคลที่เกี่ยวข้องที่ไม่ได้กล่าวถึง ที่ช่วยกันริเริ่มสรรสร้างและพัฒนาทฤษฎีที่สวยงามและมีคุณประโยชน์มากมายในปัจจุบัน

เอกสารอ้างอิง

[1] Apostol, T. M. (1969). *Calculus, Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability* (2nd ed.). New York, NY: John Wiley & Sons.

[2] Burton, D. M. (1985). *The History of Mathematics: An Introduction* (7th ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

[3] Gorroochurn, P. (2011). Errors of Probability in Historical Context. *The American Statistician*, 65 (4), p. 246 - 254.

[4] Gorroochurn, P. (2012). *Classic Problems of Probability*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

[5] Ore, O. (1960). Pascal and the Invention of Probability Theory. *The American Mathematical Monthly*, 67 (5), p. 409 - 419.