บทที่ 2
วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

ฟิสิกส์ของเสียง

เสียงเกิดจากการสั่นของต้นกำเนิดและถ่ายโอนพลังงานให้แก่โมเลกุลของตัวกลางที่อยู่รอบแหล่งกำเนิดเสียง ดังนั้นเสียงจึงจัดเป็นคลื่นกล (mechanical wave) และขณะที่มีการถ่ายโอนพลังงาน ทิศทางการสั่นของตัวกลางจะขนานกับทิศทางการแผ่ของคลื่นเสียง ดังนั้นเสียงจึงจัดเป็นคลื่นตามยาว (longitudinal wave)

เสียงแต่ละเสียงจะมีระดับเสียง (pitch) แตกต่างกันขึ้นอยู่กับความถี่ของเสียง หากเสียงมีความถี่น้อยหรือมีระดับเสียงต่ำจะเป็นเสียงทุ้ม (bass) และหากเสียงมีความถี่มากหรือระดับเสียงสูงจะเป็นเสียงแหลม (treble) การแบ่งระดับเสียงทางดนตรีและทางวิทยาศาสตร์มีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย โดยทางวิทยาศาสตร์จะใช้ระดับเสียงโด (C) ที่ความถี่ 256 เฮิรตซ์ เป็นหลัก แต่ทางดนตรีจะใช้ระดับเสียงลา (A) ที่ความถี่ 440 เฮิรตซ์ เป็นหลัก (ไชยยันต์ ศิริโชติ, 2547, หน้า 167-168)

ตาราง 1

การแบ่งระดับเสียงดนตรีในทางวิทยาศาสตร์

เสียง	โด (C)	เร (D)	มี (E)	ฟา (F)	ซอล (G)	ลา (A)	ที (B)	โด (C′)
ความถี่ (Hz)	256	288	320	341	384	427	480	512

ที่มา. จาก *ฟิสิกส์ เล่ม 2* (พิมพ์ครั้งที่ 4, หน้า 167), โดย ไชยยันต์ ศิริโชติ และคณะ, 2547, กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ สกสค.

ตาราง 2

การแบ่งระดับเสียงดนตรีในทางดนตรีศาสตร์

เสียง	โด (C)	เร (D)	มี (E)	ฟา (F)	ซอล (G)	ลา (A)	ที (B)	โด (C′)
ความถี่ (Hz)	261.6	293.7	329.2	349.2	392.0	440.0	493.9	523.3

ที่มา. จาก *ฟิสิกส์ เล่ม 2* (พิมพ์ครั้งที่ 4, หน้า 168), โดย ไชยยันต์ ศิริโชติ และคณะ, 2547, กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ สกสค.

หากเรานำเครื่องดนตรีที่ความถี่ต่างกันเล็กน้อยมาบรรเลงอยู่ใกล้ ๆ กัน ผู้ฟังจะได้ยินเสียงบีตส์ (beat) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดจากการแทรกสอดของคลื่นเสียง 2 ขบวน ที่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อยเคลื่อนที่มาพบกัน เกิดการรวมกันเป็นคลื่นลัพธ์มีแอมพลิจูดเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ทำให้เกิดเสียงดังและเสียงค่อยสลับกันไปเป็นจังหวะ โดยเรียกจำนวนครั้งที่ได้ยินเสียงดังและค่อยที่เกิดขึ้นในเวลา 1 วินาทีว่าความถี่บีตส์ (beat frequency)

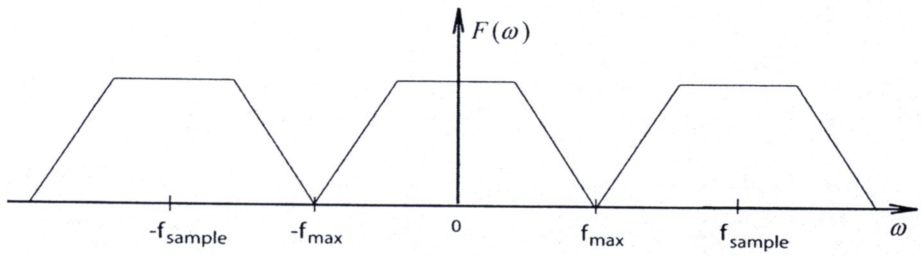
การจัดเก็บเสียงในแบบดิจิตอล

ในปัจจุบันการบันทึกเสียงนิยมจัดเก็บให้อยู่ในรูปแบบดิจิตอล ซึ่งขั้นตอนในการจัดเก็บนิยมเรียกว่า การแซมพลิง (sampling) ตามขั้นตอน คือ ขั้นแรก เสียงจะถูกแปลงเป็นความต่างศักย์ไฟฟ้าโดยใช้ไมโครโฟน เมื่อเสียงเปลี่ยนแปลงความถี่จะทำให้ความต่างศักย์ไฟฟ้าในวงจรไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตามไปด้วยอย่างรวดเร็ว จากนั้นความต่างศักย์จะถูกแปลงเป็นชุดของตัวเลขโดยดิจิไทเซอร์ (digitizer) ซึ่งทำหน้าที่เป็นโวลต์มิเตอร์ความเร็วสูง เช่น เครื่องเล่นซีดี จะวัดค่าความต่างศักย์วินาทีละ 44,100 ครั้ง และทุกครั้งที่วัดค่าจะจัดเก็บไว้ในรูปของตัวเลข ซึ่งเรียกว่าตัวอย่าง (sample)

สำหรับความถี่ในการวัดค่าความต่างศักย์หรือความถี่ในการแซมพลิง (sampling frequency) ที่เหมาะสมในการจัดเก็บข้อมูลได้ครบถ้วนนั้น ตามทฤษฎีกำหนดไว้ว่าจะต้องมีค่าไม่น้อยกว่า 2 เท่าของความถี่สูงสุดในสัญญาณนั้น

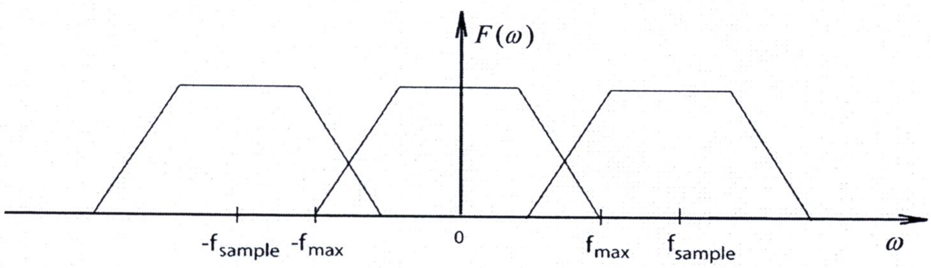
$$f_{sample} \geq 2f_{max} \tag{2.1}$$

พิจารณาสัญญาณที่มีลักษณะเป็นคาบดังแสดงในภาพ 1 จะพบว่าถ้าความถี่ในการแซมพลิงสูงเพียงพอจะทำให้สามารถจัดเก็บสัญญาณด้านข้างที่มีลักษณะลาดเอียงขึ้นและลงได้ครบถ้วน แต่หากความถี่ในการแซมพลิงไม่เพียงพอจะทำให้สัญญาณเกิดการซ้อนทับ ดังแสดงในภาพ 2



ภาพ 1 ความถี่ในการแซมพลิงเท่ากับสองเท่าของความถี่สูงสุดของสัญญาณ

ที่มา. จาก *Fourier Transforms & the Frequency Domain*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html



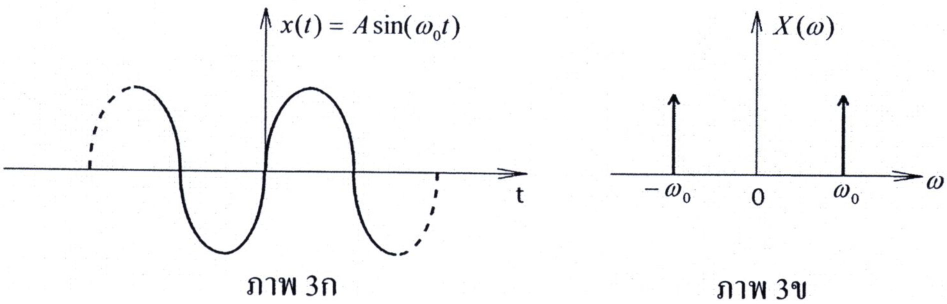
ภาพ 2 ความถี่ในการแซมพลิงน้อยกว่าสองเท่าของความถี่สูงสุดของสัญญาณ

ที่มา. จาก *Fourier Transforms & the Frequency Domain*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html

หากต้องการวิเคราะห์เสียงทางกายภาพสามารถทำได้โดยการสร้างชุดของตัวกวัดแกว่ง (oscillators) ซึ่งแต่ละตัวมีความถี่ที่แตกต่างกันเล็กน้อย จากนั้นเปิดเสียงที่ต้องการวิเคราะห์ เสียงจะทำให้ตัวกวัดแกว่งที่มีความถี่เดียวกับเสียงนั้นสั่น แต่ในทางปฏิบัติเราสามารถวิเคราะห์เสียงทางคณิตศาสตร์ได้ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่เป็นฟังก์ชันไซน์ (sinusoidal weight function) แทนความถี่แต่ละค่า ในกรณีที่เสียงถูกแปลงค่าเป็นตัวเลขแล้ว (digitized) จะสามารถคูณตัวอย่างดังกล่าวด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักแล้วนำไปบวกรวมเข้ากับค่าเดิมได้ ซึ่งตัวเลขที่ได้จะบอกให้ทราบว่าแต่ละความถี่มีระดับความเข้มเสียงเท่าใด และชุดของตัวเลขดังกล่าวเรียกว่าการแปลงฟูเรียร์ (fourier transform) หรือสเปกตรัมความถี่ของเสียง (frequency spectrum)

การแปลงฟูเรียร์

การแปลงฟูเรียร์เป็นการแปลงข้อมูลที่อยู่ในโดเมนเวลา (time domain) เช่น สัญญาณเสียง ให้มาอยู่ในโดเมนความถี่ (frequency domain) ที่สอดคล้องกัน โดยจะแสดงให้เห็นแอมพลิจูดและเฟสของข้อมูล (Steven, 2006, p. 519)

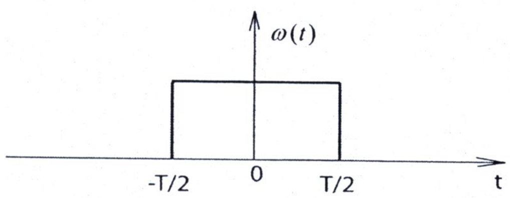


ภาพ 3 สัญญาณรูปไซน์และการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ

ที่มา. จาก *Fourier Transforms & the Frequency Domain*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html

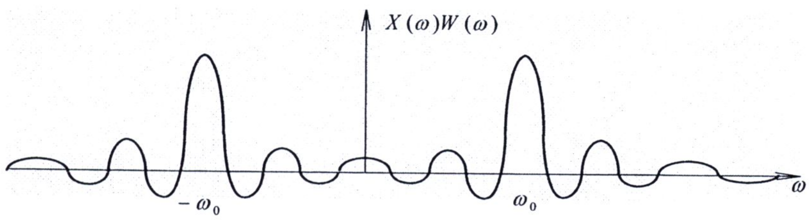
หากมีสัญญาณรูปไซน์ x(t) = Asinωt ในช่วง $-\infty < t < +\infty$ ดังแสดงในภาพ 3 (ก) จากนั้นใช้การแปลงฟูเรียร์แบบต่อเนื่อง (continuous flourier transform) เพื่อแปลงให้อยู่ในโดเมนความถี่ ได้สัญญาณรูปพัลส์ (pulse) ดังแสดงในภาพ 3 (ข)

แต่อย่างไรก็ตามผลที่ได้ข้างต้นจะถูกต้องเฉพาะในกรณีที่สัญญาณมีความต่อเนื่องจนถึงอนันต์ ในทางปฏิบัติสัญญาณจะมีอยู่ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ เท่านั้น และสามารถทำได้โดยการคูณสัญญาณรูปไซน์ข้างต้นด้วยวินโดว์ฟังก์ชัน (window function) $\omega(t)$ ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ในโดเมนเวลาเป็นสัญญาณรูปไซน์เพียงลูกเดียว และผลลัพธ์ในโดเมนความถี่ดังแสดงในภาพ 5



ภาพ 4 วินโดว์ฟังก์ชันในช่วงเวลา T

ที่มา. จาก *Fourier Transforms & the Frequency Domain*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html



ภาพ 5 ผลคูณกราฟไซน์วินโดว์ฟังก์ชันในโดเมนความถี่

ที่มา. จาก *Fourier Transforms & the Frequency Domain*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html

คณิตศาสตร์ของการแปลงฟูเรียร์แบบไม่ต่อเนื่อง

การแปลงฟูเรียร์ในรูปแบบต่อเนื่องจะมีสมการเป็น

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \tag{2.2}$$

ซึ่งเราสามารถทำสัญญาณต่อเนื่อง $x(t)$ ให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่อง $x(n)$ ได้โดยให้

$$x(t) \longrightarrow x(n\Delta t) \equiv x(n) \tag{2.3}$$

และ

$$\omega t \longrightarrow 2\pi\, k\, \Delta f\, n\Delta t \tag{2.4}$$

แต่เนื่องจาก

$$\Delta f = \frac{1}{(N\Delta t)} \tag{2.5}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\omega t \longrightarrow \frac{2\pi\, nk}{N} \tag{2.6}$$

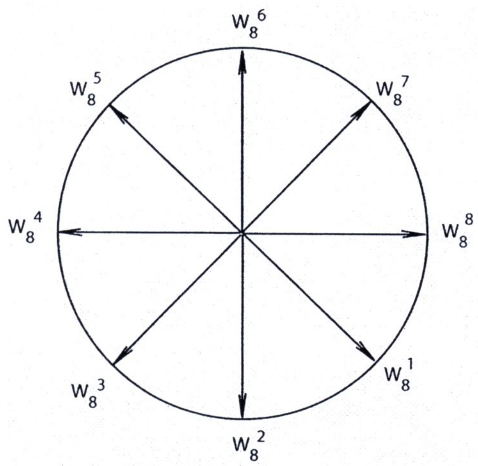
เมื่อแทนค่ากลับเข้าในสมการ (2.2) จะได้การแปลงฟูเรียร์แบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Fourier Transform DFT)

$$X(k) \equiv X(k\Delta\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi\, nk}{N}} \tag{2.7}$$

โดยแฟกเตอร์ $1/N$ เป็นนอร์มอลไลซ์แฟกเตอร์ (normalization factor) และเพื่อให้ดูง่ายขึ้นจึงนิยมเขียนสมการ (2.7) ในรูปใหม่ที่เรียกว่าสมการการแปลงฟูเรียร์แบบไม่ต่อเนื่อง (The DFT Equation)

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1 \qquad (2.8)$$

โดย $x(n)$ คือสัญญาณ เข้าในโดเมนเวลาซึ่งมี N ตัวอย่างและสอดคล้องกับสัญญาณในโดเมนความถี่ $X(k)$ ส่วนพจน์ $W_N^{nk} = e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}$ เรียกว่า แฟกเตอร์ทวิดเดิล (twiddle factor) โดยถ้าเราเก็บตัวอย่างสัญญาณในระบบแปดบิต (bit) เราสามารถแทนแฟกเตอร์ทวิดเดิลด้วยเวกเตอร์ในวงกลมหนึ่งหน่วย แสดงดังภาพ 6



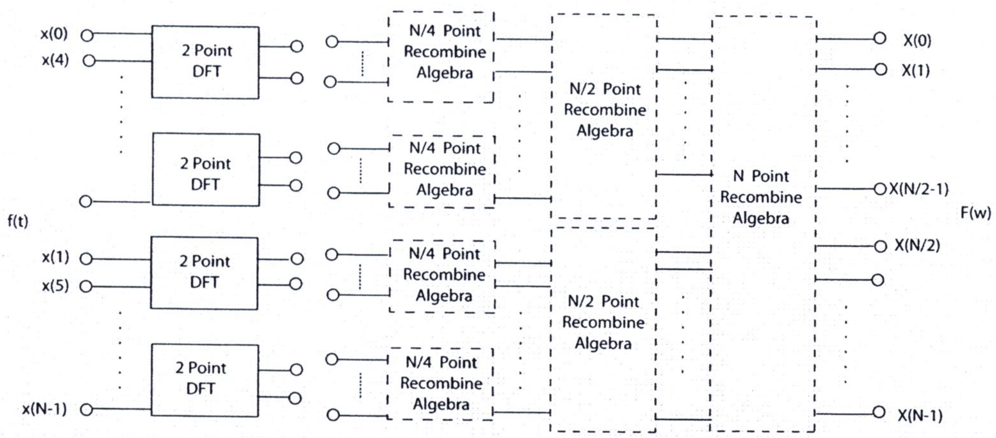
ภาพ 6 แฟกเตอร์ทวิดเดิลของสัญญาณแปดบิต

ที่มา. จาก *Fourier Transforms & the Frequency Domain*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html

จากภาพ 6 แสดงลักษณะสมมาตร (symmetric) แฟกเตอร์ทวิดเดิล เช่น $W_8^1 = -W_8^5$ และแสดงลักษณะความเป็นคาบ ดังนั้นข้อมูลเพียงครึ่งหนึ่งของแฟกเตอร์ทวิดเดิลก็เพียงพอสำหรับบ่งบอกข้อมูลที่เหลืออีกครึ่งหนึ่งได้ และเนื่องจากแฟกเตอร์ทวิดเดิลมีส่วนที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย ดังนั้นความถี่ที่ได้จากการแปลงฟูเรียร์แบบไม่ต่อเนื่องจะมีส่วนจินตภาพ (imaginary part) อยู่ด้วยเสมอถึงแม้ว่าสัญญาณดั้งเดิมจะมีเฉพาะส่วนจริง (real part) ก็ตาม

การแปลงฟูเรียร์แบบเร็ว

จากสมการการแปลงฟูเรียร์แบบไม่ต่อเนื่องจะพบว่า เมื่อทำการแปลงสัญญาณ 1024 บิต เราจะต้องทำการคูณและบวกเลขเชิงซ้อนดังกล่าวมากกว่า 1 ล้านครั้ง และหากจำนวนบิตมากขึ้นเท่าใดการคำนวณก็จะต้องเพิ่มจำนวนขึ้นเป็นทวีคูณ ดังนั้นจึงได้มีผู้เสนอแนวคิดใหม่ที่ให้ผลลัพธ์เท่าเทียมกันเรียกว่าการแปลงฟูเรียร์แบบเร็ว (Fast Fourier Transform FFT) ซึ่งมีแนวคิดหลักคือแบ่งตัวอย่างทั้งหมด N ตัวอย่างออกเป็นสองส่วน ส่วนละ N/2 ตัวอย่าง เรียกวิธีดังกล่าวว่าการแบ่งแยกแล้วปกครอง (divide and conquer) โดยสิ่งที่แบ่งอยู่ในโดเมนเวลาจึงเรียกว่าการแบ่งทางเวลา (Decimation In Time DIT) เพื่อแยกระหว่างตัวอย่างในอันดับคู่และอันดับคี่ จากนั้นแบ่งย่อยลงเป็นสองส่วน จนกระทั่งได้ชุดของข้อมูลที่มีเพียง 2 ตัวอย่างเท่านั้น ทำการรวมทางพีชคณิตแบบย้อนกลับ (recombine algebra) โดยใช้บัตเตอร์ฟลาย (The FFT Butterfly) ได้ตัวอย่างทั้งหมด N ค่า ดังแสดงในภาพ 7 ด้านขวา



ภาพ 7 แผนภาพแนวคิดการแปลงฟูเรียร์แบบเร็วโดยใช้การแบ่งทางเวลา (DIT-FFT) สำหรับสัญญาณที่มี 8 ตัวอย่าง

ที่มา. จาก *Visual Representation of Time Decimation*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html

จากแผนภาพจะพบว่ามีการรวมทางพีชคณิตย้อนกลับ เพื่อรวมตัวอย่างกลับมาอีกครั้งซึ่งในแต่ละขั้นตอน จะมีการคูณเลขเชิงซ้อนขั้นตอนละ N ครั้ง และในการแปลงสัญญาณจะมีทั้งหมด $\log_2(N)$ ขั้นตอน ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์แบบเร็วโดยใช้การแบ่งทางเวลาจะมีจำนวนครั้งในการคูณเลขเชิงซ้อน คือ

$$N\log_2(N) \tag{2.9}$$

สำหรับการแปลงฟูเรียร์แบบไม่ต่อเนื่อง หรือ DFT ที่มีจำนวนตัวอย่างเท่ากันจะต้องคูณเลขเชิงซ้อนทั้งสิ้น N^2 ครั้ง ดังนั้นในกรณีที่ N มีค่ามาก ๆ การใช้ FFT จะเร็วกว่า DFT (ดูตาราง 3)

ตาราง 3

เปรียบเทียบจำนวนครั้งในการคูณเลขเชิงซ้อน

N	DFT (N^2)	FFT ($N \log_2(N)$)
2	4	2
4	16	8
8	64	24
:	:	:
256	65,536	2,048
512	262,144	4,608
1024	1,048,576	10,240

สำหรับสมการการแบ่งทางเวลา เริ่มจากสมการการแปลงฟูเรียร์แบบไม่ต่อเนื่อง ตามสมการ (2.8) แบ่งจำนวนตัวอย่าง N จุด ออกเป็นสองชุด คือ คู่และคี่ จะได้

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_N^{2mk} + \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)W_N^{(2m+1)k} \tag{2.10}$$

พจน์แรกทางขวาในสมการคือ ตัวอย่างในลำดับเลขคู่ (x(0), x(2), x(4), …) สำหรับพจน์ที่สองเป็นตัวอย่างในลำดับเลขคี่ (x(1), x(3), x(5), ...) และสมมติว่าทุก ๆ ตัวอย่างถูกหารด้วย $1/N$ เมื่อให้ $x_1(m) = x(2m)$ และ $x_2(m) = x(2m+1)$ จะได้

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_1(m)W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_2(m)W_N^{(2m+1)k} \tag{2.11}$$

จากความสัมพันธ์ $W_N^{2mk} = W_{N/2}^{mk}$ ได้สมการแบ่งย่อยตัวอย่างสัญญาณเป็นชุด ชุดละ 2 ตัวอย่าง คือ

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_1(m)W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x_2(m)W_{N/2}^{mk} \tag{2.12}$$

จากตาราง 4 แสดงการสลับอันดับข้อมูลเข้า (shuffled inputs) จากอันดับข้อมูลที่เป็นเลขฐานสิบ ทำการเปลี่ยนอันดับดังกล่าวเป็นเลขฐานสองแล้วทำการกลับบิต (reverse) เลขฐานสอง เมื่อแปลงกลับเป็นเลขฐานสิบจะได้อันดับใหม่

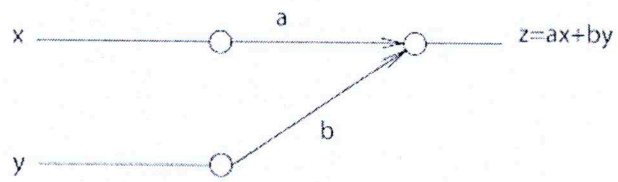
ตาราง 4

วิธีสลับลำดับข้อมูล

ข้อมูลเข้าเริ่มต้น			ข้อมูลเข้าที่เรียงลำดับใหม่	
เลขฐานสิบ	เลขฐานสอง		เลขฐานสิบ	เลขฐานสอง
0	000	⟷	000	0
1	001		100	4
2	010	⟷	010	2
3	011		110	6
4	100	⟷	001	1
5	101		101	5
6	110	⟷	011	3
7	111		111	7

ที่มา. จาก *Visual Representation of Time Decimation*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html

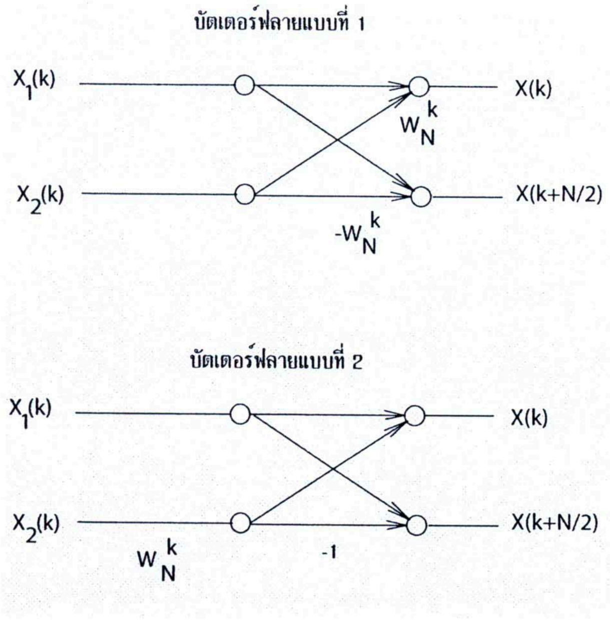
การรวมทางพีชคณิตแบบย้อนกลับโดยใช้บัตเตอร์ฟลาย ซึ่งเป็นชื่อเรียกของกราฟการไหลของสัญญาณ (signal flow graph) โดยจะแสดงการคูณและการบวกเลขเชิงซ้อนของตัวอย่าง วงกลมที่มีลูกศรชี้เข้าหาจะแสดงการบวกของตัวอย่างสองตัวอย่างซึ่งถูกคูณด้วยค่าคงที่ใด ๆ โดยค่าคงที่จะแสดงอยู่ด้านข้างลูกศร ถ้าไม่มีตัวเลขระบุอยู่แสดงว่าค่าคงที่มีค่าเท่ากับหนึ่ง ตัวอย่างของบัตเตอร์ฟลายดังแสดงในภาพ 8



ภาพ 8 หลักการของบัตเตอร์ฟลาย

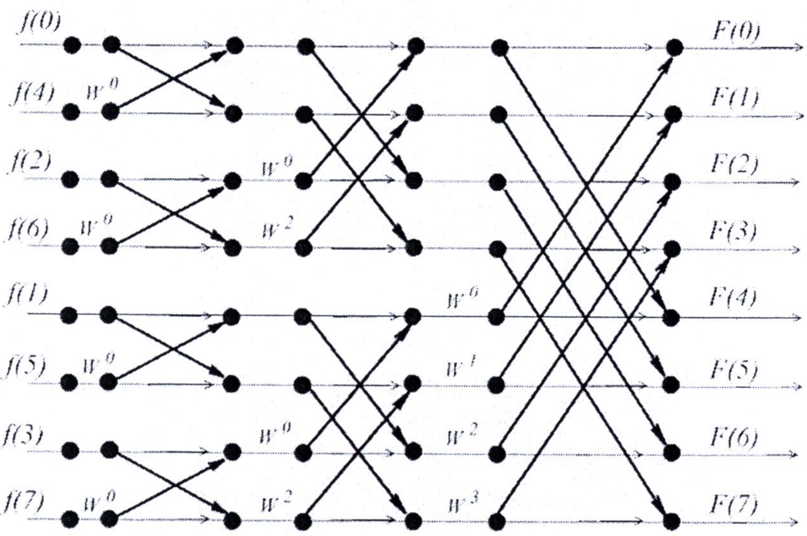
ที่มา. จาก *Visual Representation of Time Decimation*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html

จากหลักการของบัตเตอร์ฟลายเมื่อนำมาใช้ในการแปลงฟูเรียร์แบบเร็ว จะได้รูปแบบมาตรฐานของบัตเตอร์สองแบบคือ แบบแรกผลลัพธ์ได้จากการคูณเลขเชิงซ้อน 2 ครั้ง และการบวกอีกสองครั้ง ส่วนแบบที่สองผลลัพธ์ได้จากการคูณเลขเชิงซ้อนเพียงครั้งเดียวและการบวกอีกสองครั้ง ดังแสดงในภาพ 9



ภาพ 9 บัตเตอร์ฟลายมาตรฐานที่ใช้ในการแปลงฟูเรียร์แบบเร็ว

ที่มา. จาก *Visual Representation of Time Decimation*, by Berkeley University, Retrieved October 3, 2009, from http://astro.berkeley.edu/~jrg/ngst/fft/dftmaths.html



ภาพ 10 บัตเตอร์ฟลายในการแปลงสัญญาณ 8 บิต

ที่มา. จาก *Numerical Methods* (5th ed., p. 531), by S. C. Chapra, (2006), Singapore: McGraw-Hill.

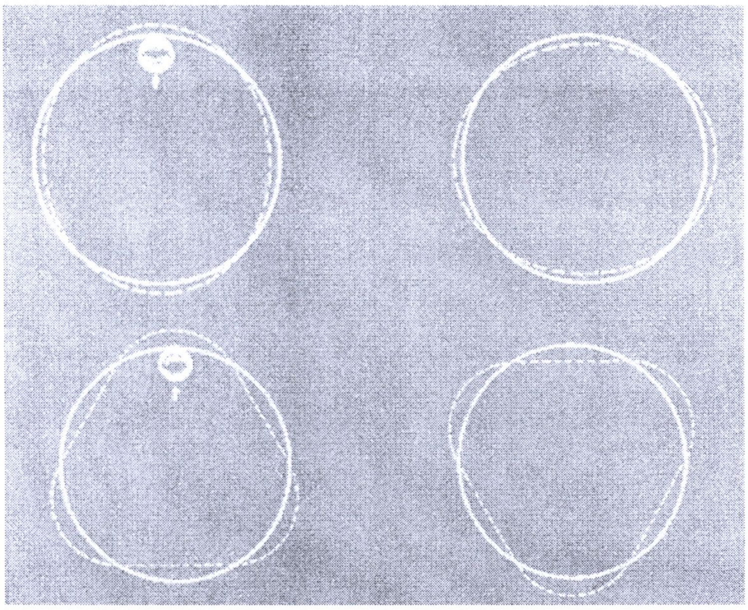
เสียงระฆัง

การแยกแยะเสียงของเครื่องดนตรีแต่ละชนิดที่เล่นโน้ตเดียวกันได้ เนื่องจากคุณภาพเสียงที่แตกต่างกัน หากนำสัญญาณเสียงมาวิเคราะห์โดยใช้ออสซิลโลสโคปจะพบว่ากราฟสัญญาณเสียงของเครื่องดนตรีแต่ละชนิดมีรูปร่างที่แตกต่างกัน โดยมีลักษณะเฉพาะตัวที่คล้ายคลึงกันสำหรับเครื่องดนตรีชนิดเดียวกัน ซึ่งเกิดจากการผสมกันของความถี่หลัก (fundamental frequency) และฮาร์มอนิกต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นพร้อมกัน

ระฆังก็มีลักษณะเฉพาะตัวของเสียง ประกอบไปด้วยฮาร์มอนิกที่มากกว่าเครื่องดนตรีชนิดอื่น ซึ่งถูกกำหนดโดยโหมด (mode) การสั่นของตัวระฆัง เมื่อเคาะระฆัง ผิวระฆังจะเกิดการสั่นในแนวรัศมี ทำให้รูปทรงที่เดิมถือว่าเป็นวงกลมเปลี่ยนเป็นวงรี ดังแสดงในภาพ 11 จากนั้นความยืดหยุ่นของระฆังทำให้เกิดการสั่นกลับทิศเป็นรูปวงรี

ที่แกนตั้งฉากกับวงรีเดิม ผลของการสั่นจะทำให้เกิดจุดบัพขึ้น 4 จุด บนเส้นรอบวงของระฆัง ซึ่งจุดดังกล่าวจะไม่เปลี่ยนตำแหน่งตามแนวเส้นรอบวง แต่จะขยายตัวตามแนวดิ่งขึ้นด้านบนและลงด้านล่างของระฆังซึ่งเรียกว่าเส้นเมอริเดียน (meridians)

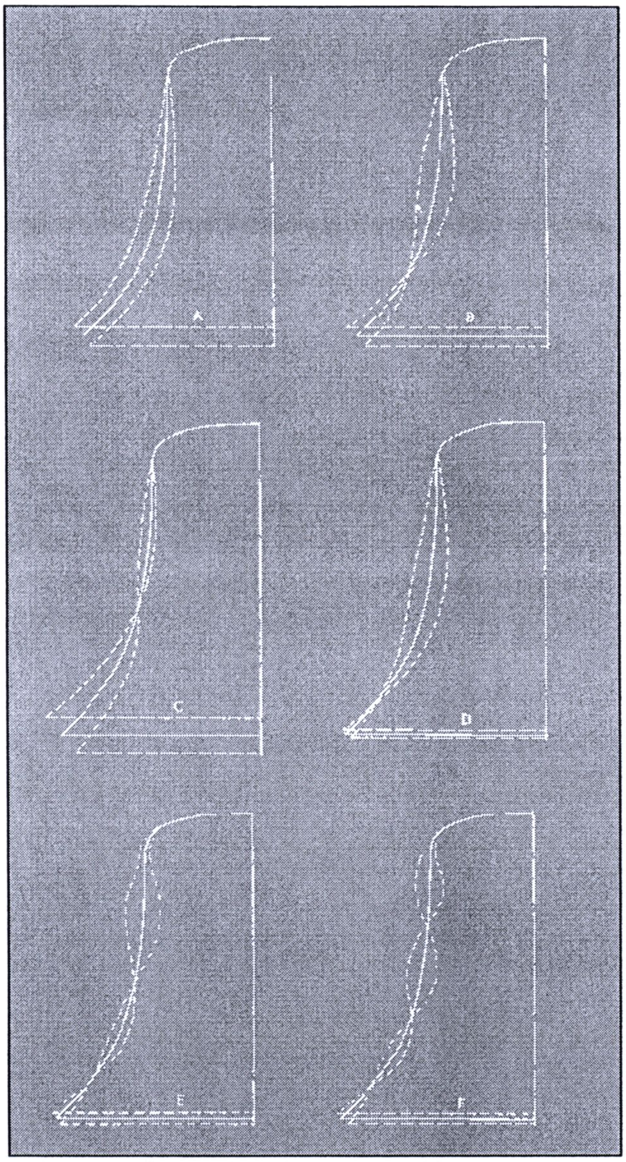
เนื่องจากการเปลี่ยนรูปทรงของระฆังเมื่อถูกเคาะไม่ได้เป็นรูปวงรีเพียงอย่างเดียว ดังนั้นระฆังสามารถสั่นในโหมดอื่น ๆ ได้ ถ้าการสั่นเกิดจุดบัพ 8 จุด จะให้เสียงคู่แปด (octave) ของความถี่หลัก และเนื่องจากการสั่นเกิดขึ้นตลอดเส้นเมอริเดียน ระฆังจึงให้เสียงที่มีความยาวคลื่นและความถี่หลากหลายออกมา



ภาพ 11 โหมดการสั่นตามแนวเส้นรอบวงของระฆัง

ที่มา. จาก *The Acoustics of Bells*, by James daggy, by Wendell Westcott, Retrieved October 5, 2009, from https://www.msu. edu/~carillon/batmbook/chapter5.html

นอกจากการสั่นตามแนวเส้นรอบวงแล้ว ยังมีการสั่นของระฆังอีกแบบหนึ่ง คือ การสั่นตามแนวตั้ง ซึ่งจะมียอดของระฆังเป็นจุดบัพและมีโหมดในการสั่นต่าง ๆ ดังแสดงในภาพ 12

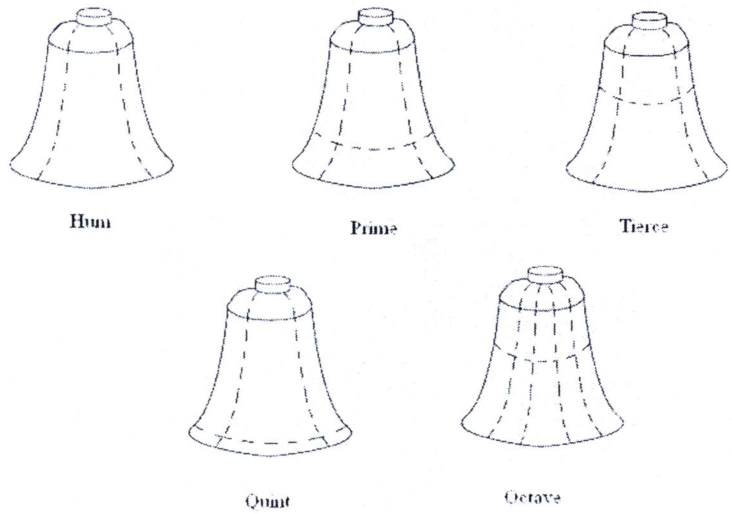


ภาพ 12 โหมดการสั่นตามแนวเส้นเมอริเดียนของระฆัง

ที่มา. จาก The Acoustics of Bells, by Wendell Westcott, Retrieved October 5, 2009, from https://www.msu. edu/~carillon/batmbook/chapter5.htm

เนื่องจากระฆังมีการสั่นทั้งในแนวรัศมีและแนวเส้นเมอริเดียน ดังนั้นโหมดในการสั่นของระฆังจะระบุการสั่นทั้งสองแนวพร้อมกัน ดังแสดงในภาพ 13 โดยโหมดแรกของการสั่นเรียกว่าเสียงฮัม (Hum tone) ซึ่งจะให้เสียงที่มีความต่ำที่สุด โหมดที่สองของ

การสั่นเรียกว่าความถี่ฐาน (fundamental tone หรือ prime) ซึ่งความถี่จะเป็นสองเท่าของเสียงฮัม (Rossing, 1982, pp. 252-253)

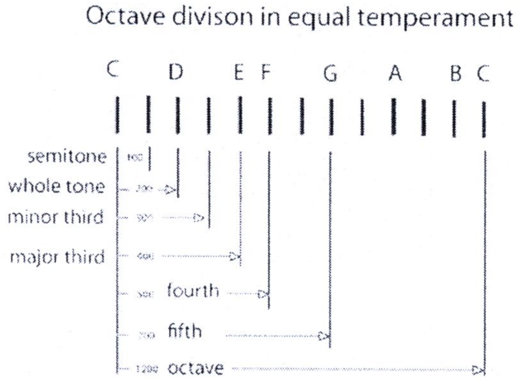


ภาพ 13 โหมดการสั่นของระฆังในแนวรัศมีและในแนวเส้นเมอริเดียนพร้อมกัน

ที่มา. จาก *The Science of Sound* (p. 253), by T. D. Rossing, 1982, New York: Addison-Wesley Publishing.

การกำหนดช่วงความถี่เสียงในทางดนตรีของระฆัง

สำหรับระฆังใช้การกำหนดช่วงความถี่เสียงทางดนตรีเช่นเดียวกับเครื่องดนตรีอื่น ๆ นั่นคือกำหนดด้วยค่าเซ็นต์ (cents) และใช้ระบบการแบ่งค่าเซ็นต์เท่ากันในหนึ่งคู่แปด (equal tempered octave) ดังแสดงในภาพ 15



ภาพ 14 การระบุโน้ตดนตรีตามระบบ equal tempered octave

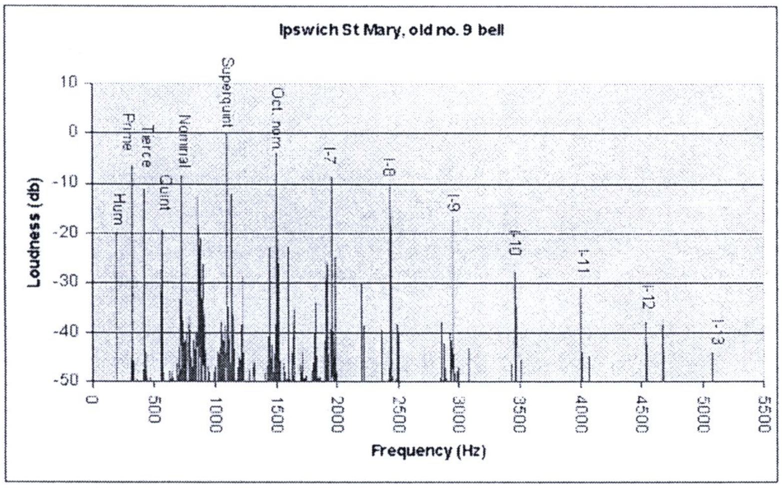
ที่มา. จาก *The musical interval*, by C. R. Nave, Retrieved October 7, 2009, from https://hyperphysics. phy-astr.gsu.edu.HBASE/Music/cents.html

พาร์เชียลหลักของระฆัง เรียกว่า โนมินอล (Nominal) ส่วนพาร์เชียลที่มีความถี่ต่ำลง 500 เซ็นต์ จากโนมินอล เรียกว่า ควินซ์ (Quint) พาร์เชียลที่ต่ำลง 900 เซ็นต์ เรียกว่า เทียซ (Tierce) พาร์เชียลที่มีค่าเซ็นต์ต่ำกว่าอยู่หนึ่งคู่แปด (1200 เซ็นต์) เรียกว่า ไพร์ม (Prime) และพาร์เชียลที่มีค่าเซ็นต์ต่ำกว่าอยู่สองคู่แปด (2400 เซ็นต์) เรียกว่าฮัม (Hum) ทั้งห้าพาร์เชียลจัดเป็นพาร์เชียลสำคัญของเสียงระฆัง หากระฆังใบใดมีพาร์เชียลโนมินอล ไพร์ม และฮัมอยู่ในระบบเสียงคู่แปด จะจัดเป็นระฆังที่มีฮาร์มอนิกแท้ (true harmonics) (Hibbert, 2008, p. 33)

การศึกษาวิเคราะห์ความถี่และการสั่นของระฆัง

การวิเคราะห์ความถี่ของระฆังในยุโรปและรัสเซีย กระทำโดยฮิบเบิรตซ์ (Hibbert, 2008, p. 32) ตัวอย่างสเปกตรัมของเสียงระฆังในหอคอยเซนต์แมรี เมือง อิปซวิช ประเทศอังกฤษ แสดงดังภาพ 15 เมื่อแกนตั้ง คือ ความดังเสียงในหน่วยเดซิเบล คำนวณจากสมการ $20\log\left(a/a_0 \right)$ เมื่อ a คือ แอมพลิจูดของพาร์เชียล และ a_0 คือ

แอมพลิจูดของพาร์เชียลที่ดังที่สุด ในที่นี้คือ ซูเปอร์ควินซ์ (superquint) วิเคราะห์เพียงช่วง 2 วินาทีแรกหลังการเคาะ เนื่องจากพาร์เชียลที่มีความถี่สูงจะหายไปอย่างรวดเร็ว และเมื่อวิเคราะห์โน้ตดนตรีที่สอดคล้องกันของแต่ละพาร์เชียลได้ผล ดังแสดงในภาพ 16



ภาพ 15 พาร์เชียลของเสียงระฆังในหอคอยเซนต์แมรี เมืองอิปซวิช

ที่มา. จาก *The Quantification of Strike Pitch and Pitch Shifts in Church Bells* (p. 2), by W. A. Hibbert, 2008, Unpublished doctoral dissertation, The Open University.

Partial	Freq (Hz)	Note	Ratio to lowest frequency	Ratio to nominal
Hum	201.9	G#(3) - 48	1.00	0.28
Prime	323.7	E(4) - 30	1.60	0.45
Tierce	424.2	G#(4) + 37	2.10	0.59
Quint	562.8	C#(5) + 26	2.79	0.78
Nominal	723.4	F#(5) - 38	3.58	1.00
Superquint	1091.4	C#(6) - 26	5.41	1.51
Octave Nominal	1507.3	F#(6) + 32	7.47	2.08
I-7	1959.3	B(6) - 13	9.70	2.71
I-8	2443.2	D#(7) - 31	12.10	3.38
I-9	2948.3	F#(7) - 6	14.60	4.08
I-10	3467.6	A(7) - 25	17.17	4.79
I-11	4000.8	B(7) + 22	19.82	5.53
I-12	4536.5	C#(8) + 39	22.47	6.27
I-13	5077.1	D#(8) + 34	25.15	7.02

ภาพ 16 ชื่อ พาร์เชียลและความถี่ของเสียงระฆังในหอคอยเซนต์แมรี เมืองอิปซวิช

ที่มา. จาก *The Quantification of Strike Pitch and Pitch Shifts in Church Bells* (p. 3), by W. A. Hibbert, 2008, Unpublished doctoral dissertation, The Open University.

ตัวเลขในวงเล็บด้านหลังตัวโน้ตแสดงเสียงคู่แปด และตัวเลขบวกลบต่อท้ายแสดงค่าเซ็นต์ที่เบี่ยงเบนไปจากโน้ตพื้นฐานซึ่งใช้ A(4) = 440 Hz โดยค่าเซ็นต์ของเสียงที่มีความถี่ต่างกัน 2 ความถี่ คำนวณได้ตามสมการ (2.13)

$$cents = \frac{1200}{\log_e(2)} \times \log_e\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \cong 1731.234 \times \log_e\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \qquad (2.13)$$

นอกจากนี้ยังมีผู้ศึกษาการสั่นและความถี่ของระฆังอีกหลายคณะด้วยกัน โดย Lee, Kim and Lee (2002, pp. 779-790) ได้ศึกษาลักษณะการสั่นของระฆังขนาดใหญ่ในประเทศเกาหลี ชื่อโบซินกักซึ่งสร้างใหม่ในปี ค.ศ. 1987 (New Bosingak Bell) ตามแบบระฆังใบเก่าพบว่าเสียงฮัมมีค่าอยู่ในช่วง 60-65 เฮิรตซ์ และเกิดบีตส์ที่มีคาบ 3-5 วินาที ซึ่งส่งผลให้เกิดเสียงที่เป็นลักษณะเฉพาะและพบว่าเสียงในฮาร์มอนิกที่สูงกว่าความถี่หลักจะหายไปอย่างรวดเร็วเหลือเพียงเสียงฮัมและความถี่หลักเท่านั้นที่ทำให้เกิดเสียงดังก้องต่อไปอีกระยะหนึ่ง

Cheng and Lan (2003, pp. 351-358) ได้ศึกษาลักษณะของเสียงและการสั่นของระฆังสันติภาพของจีน (Chinese Peace Bell) โดยการวิเคราะห์และได้ทดลองวัดการสั่นของระฆังตามจุดต่าง ๆ รอบระฆัง พบว่าระฆังจะสั่นในโหมด (2, 0)a และ (3, 0)

Kim, Lee and Lee (2005, pp. 21-41) ได้ศึกษาลักษณะเสียงบีตส์และทำแผนผังบีตส์โดยรอบระฆังของกษัตรย์ซองด๊อก (King Seong-deok Divine Bell) ที่มีความเก่าแก่เป็นอันดับสองของประเทศเกาหลี ผลการศึกษาพบว่าเสียงบีตส์เกิดจากการที่ระฆังเสียสมมาตรไปซึ่งเกิดขึ้นทั้งในขั้นตอนการหล่อขึ้นรูปและเนื่องจากลวดลายที่ตกแต่งอยู่โดยรอบระฆัง จากการทดลองพบว่าเสียงระฆังใบนี้ประกอบไปด้วยความถี่ที่ต่ำกว่า 2000 เฮิรตซ์มากกว่า 130 ค่า โดยมีเสียงฮัมที่ความถี่ 64 เฮิรตซ์ เสียงไพร์ม 168 เฮิรตซ์ มีคาบของบีตส์เท่ากับ 2.9 วินาที ผลที่ได้สอดคล้องกับการศึกษาบีตส์ของวัตถุที่มีรูปทรงแบบระฆังโดย Kim, Soedel and Lee (1994, pp. 517-536)