

บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 ดาวคู่ (Binary stars)

ดาวที่ปรากฏให้เห็นบนท้องฟ้า มีจำนวนไม่น้อยที่เห็นเป็นสองดวงใกล้กัน แม้ว่าในความเป็นจริง ระยะห่างระหว่างดาวสองดวงจะไกลกันก็ตาม ซึ่งเรียกดาวเหล่านี้ว่า Optical Binary Stars อย่างไรก็ตาม มีจำนวนไม่น้อยที่เป็นดาวคู่จริง ๆ โคจรรอบซึ่งกันและกัน และดาวบนท้องฟ้ามากกว่าครึ่งหนึ่งเป็นระบบดาวโคจรรอบกัน ซึ่งถ้าสมาชิกในการโคจรมากกว่าสองดวง จะเรียกระบบเหล่านี้ว่า Multiple Systems เช่น Triple Systems ซึ่งเป็นระบบประกอบด้วยดาวเดี่ยวหนึ่งดวงโคจรรอบดาวคู่หนึ่งคู่หนึ่งเอง ในที่นี้จะกล่าวถึงระบบดาวคู่สองดวงโคจรรอบกันเรียกว่า Binary Systems

การจำแนกประเภทของดาวคู่ ได้จำแนกตามวิธีค้นพบได้ 4 ประเภทดังนี้

1. ดาวคู่ที่มองเห็นได้ (Visual Binaries)

ดาวคู่ประเภทนี้สามารถเห็นแยกออกจากกันได้เป็นสองดวง เช่น ระยะห่างเชิงมุมที่สามารถแยกดาวออกจากกันได้ มากกว่า 0.1 พิลิปดา เมื่อระยะเวลานานไป ตำแหน่งดาวที่สัมพันธ์กันจะเปลี่ยนแปลงไป และสามารถเขียนตำแหน่งวงโคจรเป็นวงรีบนท้องฟ้าได้ แต่ไม่สามารถรู้ถึงตำแหน่งและรูปร่างของวงโคจรที่แท้จริงได้ ยกเว้นกรณีที่สามารถหาระยะทางจากดาวคู่ถึงผู้สังเกต จากการตรวจวัดสมาชิกทั้งสองดวงสัมพันธ์กับจุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass) ดังรูปที่ 2.1 ได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (2.1)$$

โดยที่ a_1, a_2 คือ ค่าครึ่งแกนยาว ของดาวปฐมภูมิและดาวทุติยภูมิ ตามลำดับ

m_1, m_2 คือ มวลของดาวปฐมภูมิและดาวทุติยภูมิ ตามลำดับ

2. ดาวคู่โดยการวัดทางดาราศาสตร์ (Astrometric Binaries)

ดาวคู่ประเภทนี้ ประกอบไปด้วยดาวสองดวงซึ่งจะสามารถสังเกตเห็นได้เฉพาะดวงที่สว่างกว่าเท่านั้น ถ้าสามารถหามวลดาวดวงสว่าง เช่นหาจากกำลังส่องสว่าง จะสามารถ

ประมาณค่ามวลของดาวที่ไม่สว่างได้ การสังเกตดาวคู่ประเภทนี้ จะเห็นการส่ายไปมาของดาวดวงสว่างเราเรียกว่า Wobble สังเกตจากวิธีการ Proper Motion

3. ดาวคู่สเปกโตรสโคปี (Spectroscopic Binaries)

ดาวคู่ประเภทนี้ระยะแยกเชิงมุมน้อยมาก แม้จะใช้กล้องดูดาวกำลังขยายสูงแล้วก็ตาม ยังคงมองเห็นเป็นดาวดวงเดียว จากการถ่ายสเปกตรัมของดาวจะสังเกตเห็นสเปกตรัมของดาวมีการเลื่อน (Shift) ซึ่งเป็นผลของดอปเปลอร์ (Doppler Effect) ซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงของความเร็วในแนวรัศมี (Radial Velocity) ของดาว คาบการเลื่อนของสเปกตรัมเท่ากับคาบวงโคจรของดาว การวัดความเร็ว v สัมพันธ์กับความเร็วที่แท้จริง v_0 ดังนี้

$$v = v_0 \sin i \quad (2.2)$$

ซึ่ง i คือมุมระหว่างแนวสายตากับแกนตั้งฉากกับระนาบวงโคจรของดาวคู่

จาก $m_1 a_1 = m_2 a_2$ และ ให้ $a = a_1 + a_2$ จะสังเกตได้ว่า

$$a_1 = \frac{am_2}{m_1 + m_2} \quad (2.3)$$

ความเร็ววงโคจรจริงคือ

$$v_{0,1} = \frac{2\pi a_1}{P} \quad (2.4)$$

ความเร็วของวงโคจรที่สังเกตได้จากการวัด

$$v_1 = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P} \quad (2.5)$$

แทนในกฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์จะได้

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{v_1^3 P}{2\pi G} \quad (2.6)$$

เรียกสมการนี้ว่า ฟังก์ชันมวล (Mass Function Equation) ซึ่งสามารถถ่ายสเปกตรัมหาความเร็ว v_1 ของดาวได้ และทราบค่า P จากข้อมูลกราฟแสงได้ และจากการสังเกตโดยการถ่ายสเปกตรัม จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad (2.7)$$

และ จากหลักการ อนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

$$m_1 = \frac{m_2 v_2}{v_1} \quad (2.8)$$

แทนลงในสมการ (2.6) จะสามารถหามวลได้ เมื่อรู้ค่ามุมเอียง

4. ดาวคู่อุปราคา (Eclipsing Binaries or Photometric Binaries)

ดาวคู่นี้ประกอบด้วยสมาชิก 2 ดวงโคจรรอบจุดศูนย์กลางมวลเดียวกัน ความสว่างของกราฟแสงมีการเปลี่ยนแปลง นั่นคือดาวมีการโคจรบังซึ่งกันและกัน ทำให้แสงมีการเพิ่มลดเป็นคาบ ดาวจะเป็นรูปทรงรี (Ellipsoidal) เนื่องจากแรงดึงดูด มุมเอียงของวงโคจรเข้าใกล้ 90° ระนาบวงโคจรอยู่เกือบในแนวสายตา จากข้อมูล จะได้กราฟแสงซึ่งใช้จำแนกประเภทดาวคู่อุปราคาออกตามรูปร่างของกราฟแสง ได้ 3 ประเภทหลัก คือ

1. ประเภท Algol เป็นดาวคู่ที่มีคาบยาวที่สุด กราฟแสงที่ได้มีปริมาณแสงคงที่ อุปราคาปฐมภูมิจะลึกกว่าอุปราคาทุติยภูมิและลึกต่างกันมาก เช่น เมื่อดาวดวงใหญ่กว่าแต่อุณหภูมิต่ำกว่าเคลื่อนที่ผ่านดาวดวงเล็กซึ่งอุณหภูมิสูงกว่า จะทำให้เกิดความลึกของกราฟแสงมาก ในทางกลับกัน เมื่อดาวดวงเล็กเคลื่อนที่ผ่านหน้าดาวดวงใหญ่ จะทำให้ปริมาณแสงไม่เปลี่ยนแปลงไปมาก

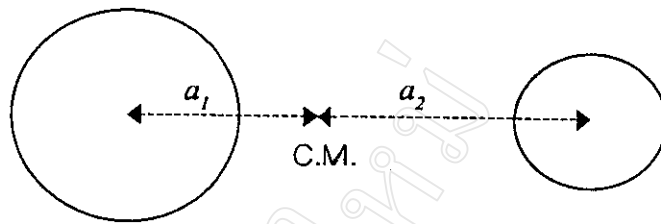
รูปร่างของกราฟแสงสามารถบอกถึงอุปราคาเต็มดวงหรืออุปราคาบางส่วน ในกรณีอุปราคาแบบเต็มดวง สมาชิกดวงที่โดนบังนั้นจะมองไม่เห็น ความสว่างน้อยสุดที่อุปราคานั้น จะมีรูปร่างเป็นเส้นแบนราบ รายละเอียดเกี่ยวกับมุมเอียงจะบอกได้ที่ตำแหน่งของอุปราคา เมื่อจำแนกตามแบบจำลองของโรช ดาวคู่ประเภทนี้เรียกว่า ดาวคู่แบบแยกกัน (Detached Binary) ดังรูปที่ 2.2 (a)

2. ประเภท β Lyrae กราฟแสงของดาวคู่ระบบนี้ จะมีความสว่างสูงสุดเปลี่ยนแปลงไปอย่างต่อเนื่อง สมาชิกทั้งสองดวงอยู่ใกล้กันมาก รูปร่างของดาวบิดเบี้ยวเป็นรูปทรงรีมาก ความสว่างขึ้นอยู่กับพื้นผิวของทรงรี สำหรับดาวคู่ระบบนี้ ดาวดวงหนึ่งจะมีชั้นบรรยากาศของดาวโตเต็มผิวของโรช มีการถ่ายเทมวลสาร (Mass Transfer) ไปสู่สมาชิกอีกดวงหนึ่ง ซึ่งเกิดจากการที่ดาว

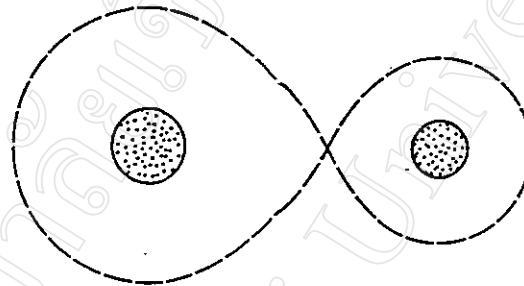
ดวงหนึ่งมีวิวัฒนาการถึงขั้นที่เกิดสภาวะไม่สมดุลย์ ระหว่างแรงโน้มถ่วงกับแรงดันภายใน (Non Hydrostatic Equilibrium) ซึ่งแรงดันจากภายในดาวมีมากกว่าแรงโน้มถ่วง ส่งผลให้ชั้นบรรยากาศของดาวขยายตัวเพิ่มขึ้น เมื่อชั้นบรรยากาศของดาวขยายตัวถึงจุด ลากранжеภายใน (Inner Lagrange, L_1) ซึ่งแรงลัทธิที่จุดนี้เท่ากับศูนย์ เมื่อมวลสารผ่านจุด L_1 ด้วยแรงลัทธิไม่เท่ากับศูนย์ จึงมีมวลสารไหลถ่ายไปยังดาวคู่สมาชิก ดังรูปที่ 2.3 เนื่องจากดาวทั้งสองดวงมีการโคจรรอบจุด ศูนย์กลางมวล จึงส่งผลให้มวลสารที่ไหลถ่ายเทไปนั้น ไม่ตกสู่บรรยากาศของดาวคู่สมาชิกโดยตรง แต่จะมีการวนของมวลสารรอบดาว ซึ่งเรียกว่า Accretion Disk ดังรูปที่ 2.4 บางส่วนของมวลสาร จะมีการหลุดรอดออกจากระบบ เช่นที่จุดลากранжеนอก (Outer Lagrange, L_2) หรืออาจมีการ ถ่ายเทกลับไปยังดาวดวงเดิมผ่านจุด L_1 ดังรูปที่ 2.5 Accretion disk เกิดขึ้นเนื่องจากการอนุรักษ์ โมเมนตัม หรือเรียกปรากฏการณ์ Coriolis ดาวดวงที่ถ่ายเทมวลเรียกว่า Contact Component ดาวดวงที่รับมวลเรียกว่า Detached Component ตามแบบจำลองของโรชซ์เรียกดาวประเภทนี้ว่า ดาวคู่แบบกึ่งติดกัน (Semi-Detached Binary) ดังรูปที่ 2.2 (b)

3. ประเภท W Uma ดาวคู่ระบบนี้ให้ข้อมูลกราฟแสงซึ่งมีรูปร่างที่อุปราคาไม่แหลม แต่มีความมนกลมและกว้าง เนื่องจากวิวัฒนาการตามแถบกระบวนหลักของดาว ดาวทั้งสองดวงจึงมี ชั้นบรรยากาศล้นพื้นผิวของโรชซ์ ส่งผลให้ชั้นบรรยากาศภายนอกของดาวติดกันเหมือนลูกดัมเบลล์ จากการที่ชั้นบรรยากาศภายนอกร่วมกันอยู่ ทำให้ทุกจุดบนพื้นผิวสมคัยมีอุณหภูมิที่เท่ากัน จากอุณหภูมิภายในที่ไม่เท่ากัน และจากการที่มีการถ่ายเทมวลไปมา ทำให้อุณหภูมิของดาวทั้งสองดวงต่างกันไม่มาก จึงส่งผลให้กราฟแสงมีความลึกของอุปราคาทั้งสองไม่ต่างกันมาก ตามแบบจำลองของโรชซ์เรียกดาวคู่ประเภทนี้ว่า ดาวคู่แบบติดกัน (Contact Binaries) ดังรูปที่ 2.2 (c) รูปร่างของดาวทั้งสองดวงเป็นรูปทรงรี เนื่องจากดาวสองดวงอยู่ใกล้กันมาก มีผลเนื่องจากแรงไทดัล (Tidal Force) จากการที่อยู่ใกล้กันมากจึงทำให้เกิดการสะท้อนที่ผิวของดาวเรียกว่า Albedo จะทำให้ชั้นบรรยากาศบางส่วนสว่างขึ้น

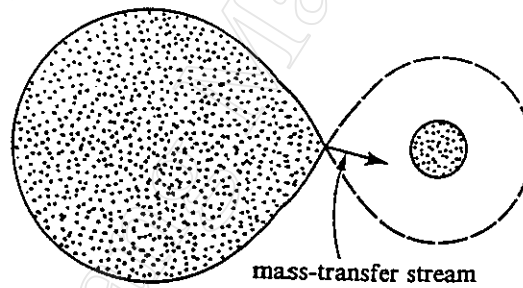
จากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมวิลสัน-เดวีนี ทราบว่ามีหลายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นบนระบบดาวคู่เหล่านี้ เช่น การมืดคล้ำที่ขอบดวง (Limb Darkening) ผลการสะท้อน (Reflection Effect) ผลของแรงไทดัล (Tidal Force) ทำให้รูปร่างของดาวบิดเบี้ยวไป (Ellipticity Effect) ทำให้กราฟแสงที่ได้มีความต่อเนื่อง



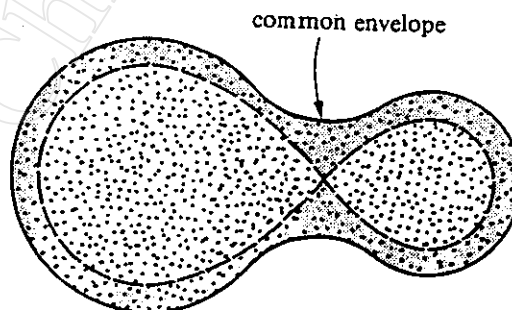
รูปที่ 2.1 แสดงระยะครึ่งแกนยาวของดาวแต่ละดวง



(a) detached binary

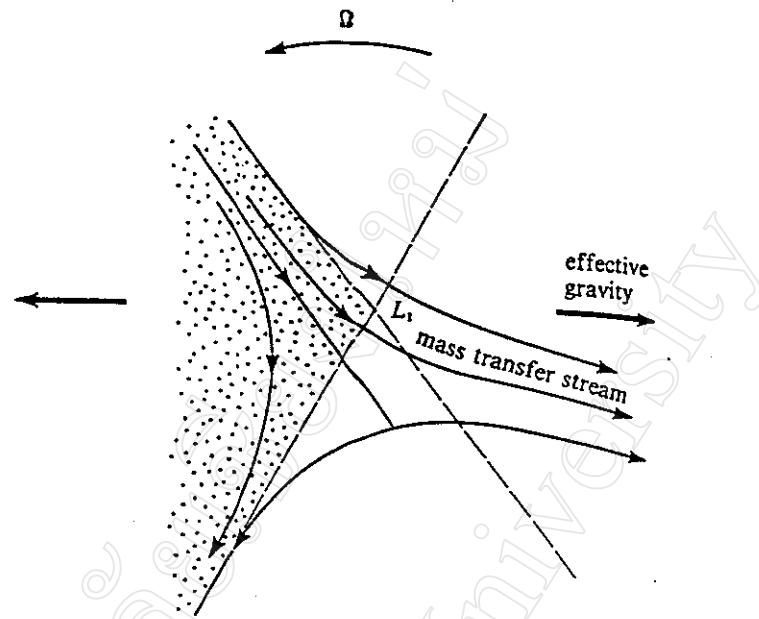


(b) semidetached binary

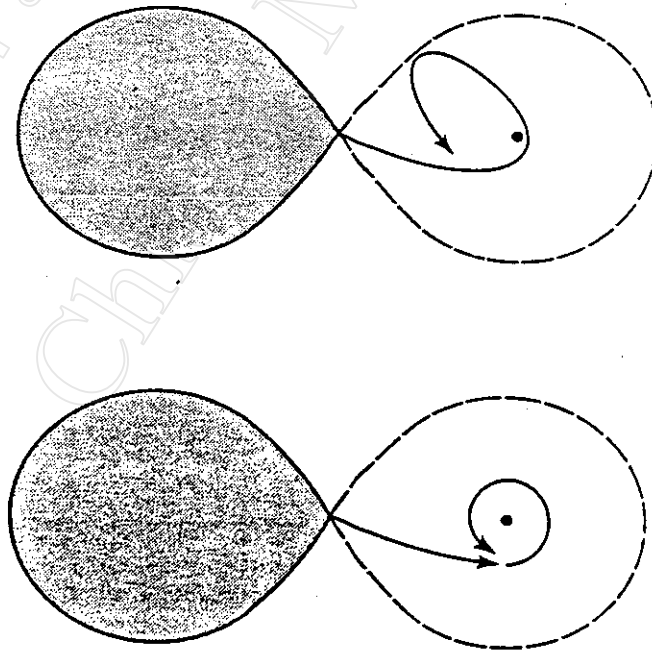


(c) contact binary

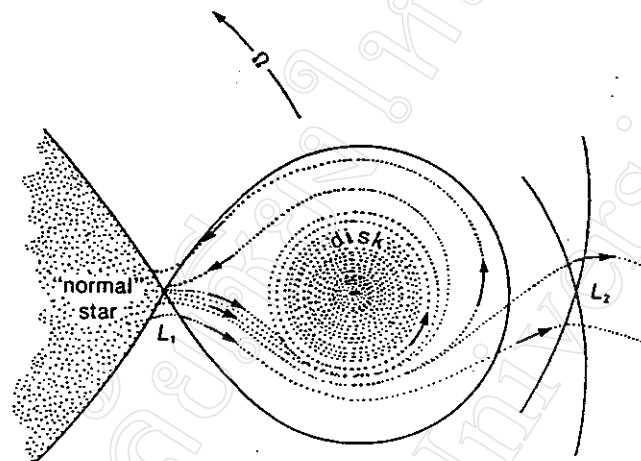
รูปที่ 2.2 ชนิดของดาวคู่อุปราคาตามแบบจำลองของโรช



รูปที่ 2.3 การถ่ายเทมวลสารผ่านจุด L_1 ของดาวคู่แบบกึ่งติดกัน



รูปที่ 2.4 ผลจากการ Coriolis ทำให้การของมวลไม่ตกลงบนผิวดาวโดยตรง

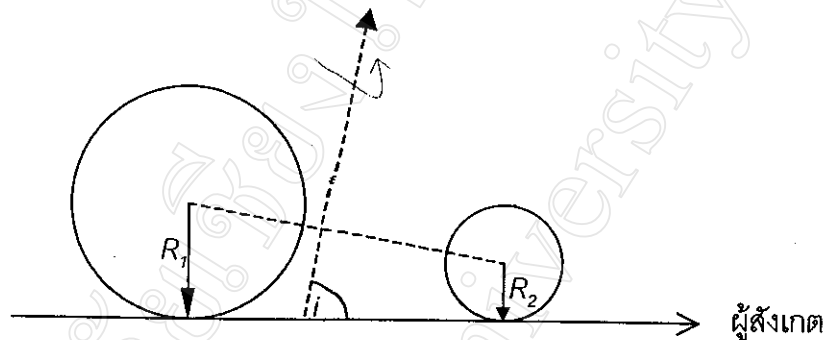


รูปที่ 2.5 มวลเสียออกจากระบบด้าน L_2 และบางส่วนไหลกลับคืนผ่านจุด L_1

2.2 การวิเคราะห์ดาวคู่อุปราคา

จากสมบัติทางกายภาพ ทั้งการถ่ายสเปกตรัม การวัดแสงดาว และเรขาคณิตจากมุมมองผู้สังเกตนั้น จะต้องสอดคล้องกับแบบจำลองอย่างง่าย ดังนี้

พิจารณา ดาวคู่อุปราคาที่มีการโคจรบังกันเต็มดวงดังรูป 2.6



รูปที่ 2.6 ลักษณะการวางตัวของดาวคู่เทียบกับผู้สังเกต

กำหนดให้ R_1, R_2 คือ รัศมีดาวดวงใหญ่และเล็กตามลำดับ

และ a คือ ระยะห่างระหว่างดาวสองดวง โดยที่ $a = a_1 + a_2$

a_1, a_2 คือระยะครึ่งแกนยาวดาวดวงที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

จะได้สมการดังนี้

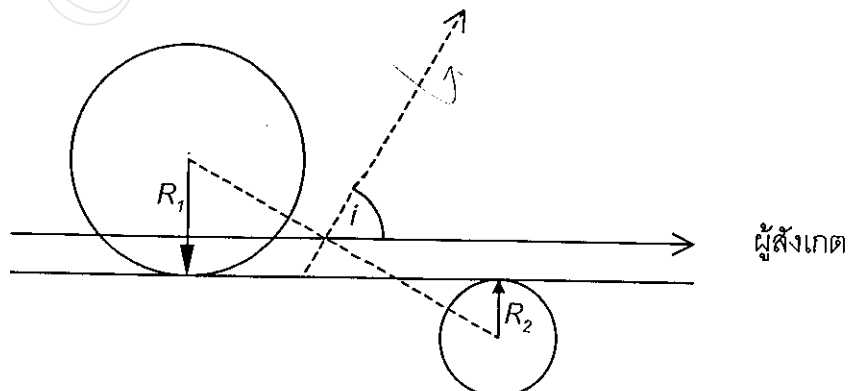
$$\cos i = \frac{R_1 - R_2}{a} \quad (2.9)$$

หรือ

$$\cos i \leq R_1 - R_2 \quad (2.10)$$

สมการด้านบนบ่งบอกการกำหนดขอบเขตมุมเอียง i สำหรับดาวคู่อุปราคาเต็มดวงนั่นเอง

พิจารณา แบบจำลองดาวคู่อุปราคาที่ไม่มีการโคจรบังกันดังรูป 2.7



รูปที่ 2.7 ลักษณะการวางตัวของดาวคู่เทียบกับผู้สังเกต

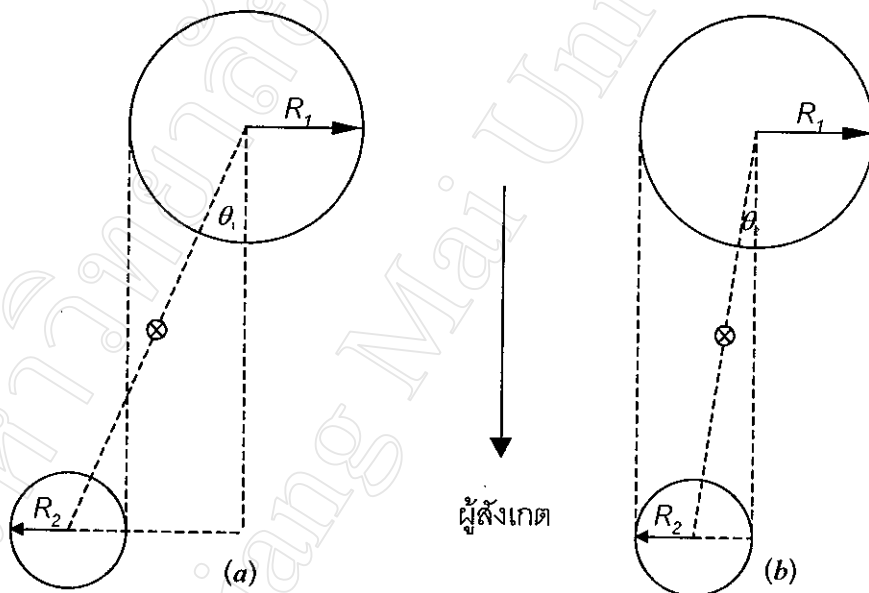
จากแบบจำลองจะเห็นได้ว่า $\cos i = \frac{R_1 + R_2}{a}$ (2.11)

หรือ $\cos i \geq R_1 + R_2$ (2.12)

ดังนั้นการวิเคราะห์ดาวคู่อุปราคานั้น จะต้องสอดคล้องทั้งสมการที่ 3 และ 4 เป็นตามเงื่อนไขนี้ คือ

$$\cos i < R_1 + R_2 \quad (2.13)$$

จากเรขาคณิตของการเคลื่อนที่ของดาวและบังกันตามเรขาคณิตของแบบจำลองได้ดังรูป 2.8



รูปที่ 2.8 แบบจำลองแสดงการเริ่มเข้าบังกัน ตลอดจนเข้าบังเต็มดวง ตามรูป a และ b ตามลำดับ

จากเรขาคณิตจะได้ว่า $\frac{R_1 + R_2}{a} = \sin \theta_1$ (2.14)

และ $\frac{R_1 - R_2}{a} = \sin \theta_2$ (2.15)

แก้สมการหาค่าได้ $R_1 = \frac{a}{2}(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$ (2.16)

และ
$$R_2 = \frac{a}{2}(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \quad (2.17)$$

จากความสัมพันธ์
$$\theta = \frac{2\pi t}{P} \quad (2.18)$$

จะได้ว่า
$$\theta_1 = \frac{\pi t_e}{P} \quad (2.19)$$

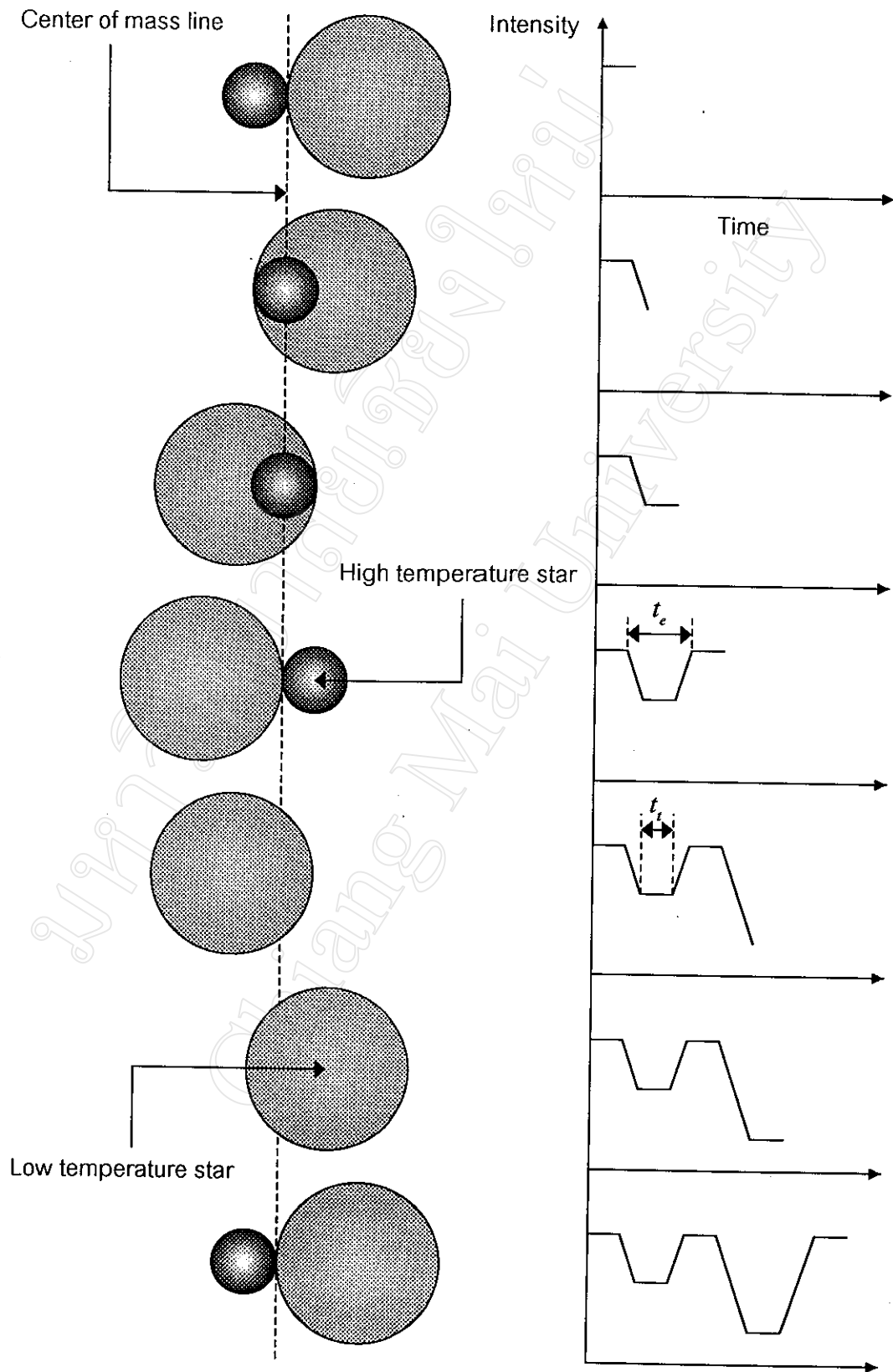
และ
$$\theta_2 = \frac{\pi t_t}{P} \quad (2.20)$$

โดยที่ t_e, t_t คือช่วงเวลาของการเกิดอุปราคาและช่วงเวลาการเกิดอุปราคาเต็มดวง
แทนสมการ 2.19 , 2.20 ลงในสมการ 2.16 , 2.17

จะได้ว่า
$$R_1 = \frac{a}{2} \left(\sin \frac{2\pi t_e}{P} + \sin \frac{2\pi t_t}{P} \right) \quad (2.21)$$

และ
$$R_2 = \frac{a}{2} \left(\sin \frac{2\pi t_e}{P} - \sin \frac{2\pi t_t}{P} \right) \quad (2.22)$$

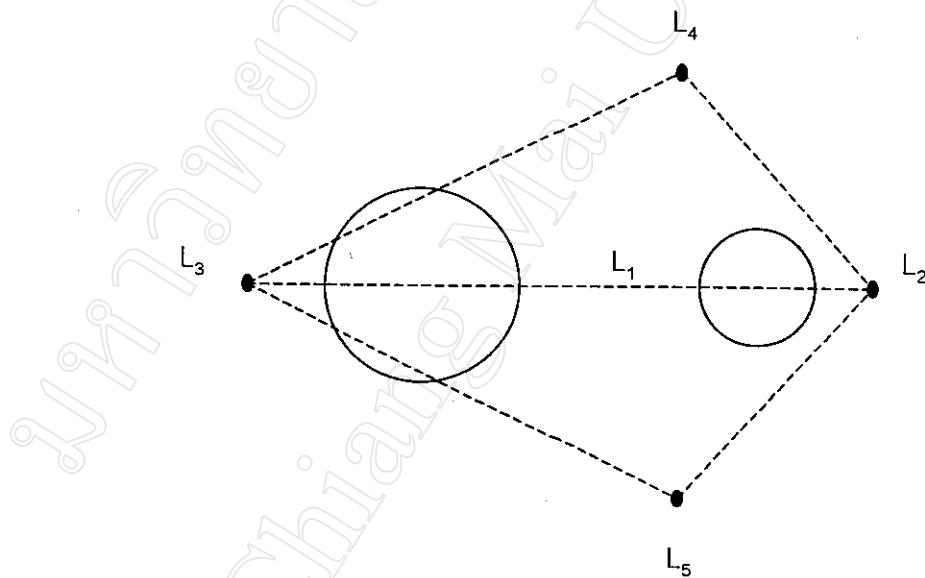
จากสมการด้านบน เมื่อสามารถรู้ค่า a และหาค่า t_e และ t_t จากกราฟแสง จะสามารถหา
รัศมีดาวแต่ละดวงได้



รูปที่ 2.9 ความสัมพันธ์ระหว่างกราฟแสง และตำแหน่งของดาวแต่ละดวง ที่มุมเอียง 90° ของแบบจำลองดาวคู่แบบไม่ติดกัน (Detached Binary System)

2.3 Roche Lobe

เมื่อเราพิจารณาระบบดาวคู่แบบใกล้เคียงกันโดยอาศัยแบบจำลองของโรช นั่นคือ ดาวทั้งสองดวงมีอันตรกริยากัน และล้อมรอบด้วยผิวสมศักย์ของโรช (Roche Equipotential Surface) จากแนวคิด Three-Body Problem การเคลื่อนที่ของ Infinitesimal Particle ในสนามโน้มถ่วงของดาวทั้งสองดวง ซึ่งในระบบดาวคู่จะมีอยู่ 5 ตำแหน่งที่ทำให้ Infinitesimal Particle หยุดนิ่งเมื่อเทียบกับดาวคู่ทั้งสองดวง แต่จะหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมที่เท่ากับกับดาวทั้งสองดวงรอบจุดศูนย์กลางโน้มถ่วง (Center of Gravity) ตำแหน่งดังกล่าวเรียกว่า จุดลากรางจ์ (Lagrange Point L_1, L_2, L_3, L_4, L_5) จุดลากรางจ์ L_1 อยู่ระหว่างดาวทั้งสองดวง L_2 จะอยู่ด้านนอกของดาวมวลที่น้อยกว่า L_3 จะอยู่ด้านนอกของดาวมวลที่มากกว่า จุดลากรางจ์ L_1, L_2, L_3 รวมทั้งดาวทั้งสองดวงจะเรียงเป็นเส้นตรงเดียวกัน เรียกว่า Straight Line Solution ส่วน L_4, L_5 จะอยู่นอกแนวเส้นตรง เป็นแนวสามเหลี่ยม เรียกว่า Equilateral Triangle Solution ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 แสดงตำแหน่งจุดลากรางจ์ทั้งห้าจุด และ Equilateral Triangle Solution

ซึ่งในธรรมชาติ ดวงอาทิตย์ ดาวพฤหัสบดี และ ดาวเคราะห์น้อยโทรจัน (Trojan Asteroid) เป็น Equilateral Triangle Solution

กำหนด ให้แกน X เป็นแกนหลักระหว่างดาวทั้งสอง และ แกน Z เป็นแกนตั้งฉากกับระนาบวงโคจร จากการอินทิเกรตสมการการเคลื่อนที่ของ Infinitesimal Particle เป็นดังนี้

$$\dot{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(1-\mu)/r_1 + 2\mu/r_2 - C \quad (2.23)$$

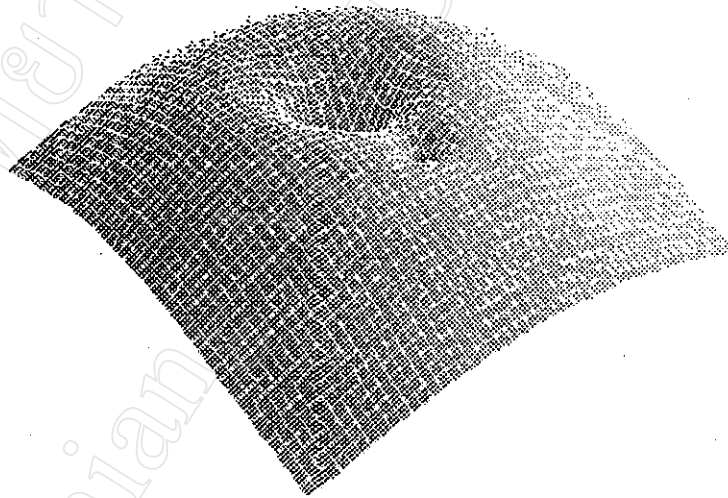
โดยที่ μ คือ สัดส่วนของมวลที่พิจารณาต่อมวลทั้งหมด

r_1, r_2 คือ ระยะทางจากดาวดวงที่ 1 และ 2 ถึง Infinitesimal Particle ในหน่วยของ a โดยที่ $a = a_1 + a_2$

v คือ ความเร็วของ Infinitesimal Particle

ค่าคงที่ C หาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น ถ้าเราสามารถรู้ได้ถึงค่าคงที่ เราจะสามารถรู้สมการการเคลื่อนที่ของทุกๆจุดได้

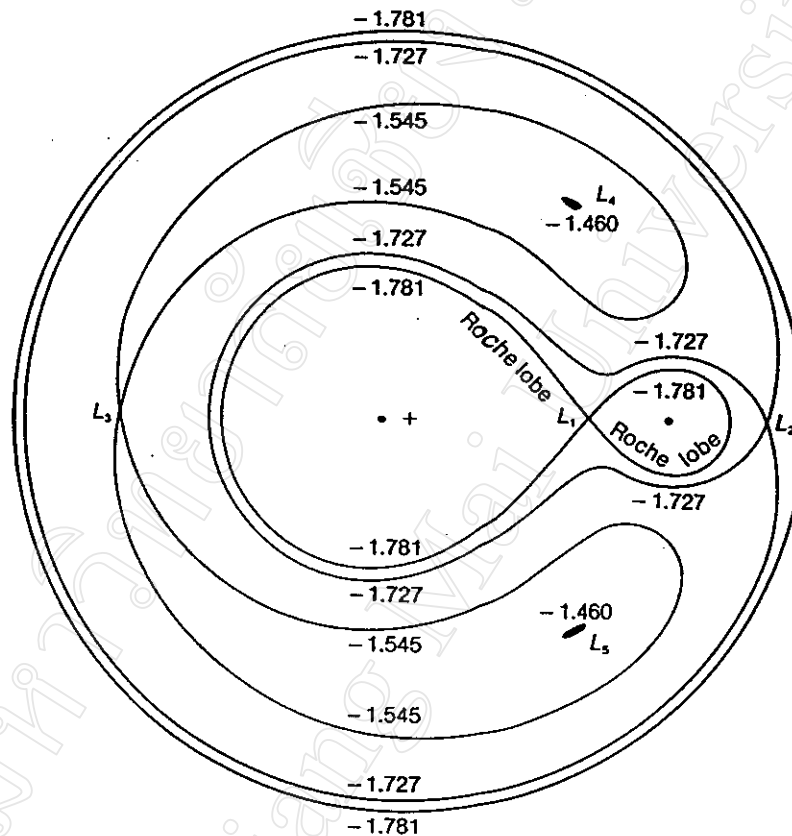
เมื่อ v มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ เราพิจารณาพื้นผิวที่เรียกว่า Zero Relative Velocity Surface ผลลัพธ์ที่ได้จากสมการจะได้ค่าที่เป็นจริงด้านหนึ่ง และค่าที่เป็นจินตภาพด้านหนึ่ง เราสามารถกล่าวได้ว่า ค่าทางกายภาพต้องเป็นค่าจริง ซึ่งหมายความว่า Infinitesimal Particle เคลื่อนที่อยู่ได้เพียงด้านใดด้านหนึ่ง คือด้านที่ผลลัพธ์เป็นค่าจริง เท่านั้น รูปร่างของพื้นผิวของโรชนั้นขึ้นกับค่าคงที่ C ซึ่งค่าคงที่นี้ทำให้เกิดพื้นผิวดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 แสดงพื้นผิวสมศักย์ (Equipotential Surface)

ค่า C นี้เอง ทำให้พื้นผิวมีจุดที่ตัดกันขึ้นมาเรียกว่าจุดลากรางจ์ L_1, L_2, L_3 นั่นเอง สมมติให้ค่าคงที่ C มีขนาดใหญ่ จากการแก้สมการจะทำให้พื้นผิวของโรชใกล้พื้นผิวของดาวทั้งสอง และมีรูปร่างค่อนข้างกลม เมื่อค่าคงที่ C มีค่าน้อยลงจะทำให้พื้นผิวของโรชขนาดโตขึ้นและรูปร่างรีขึ้นมา เมื่อค่าคงที่ C เล็กลงถึงค่าๆหนึ่งจะทำให้พื้นผิวของโรชตัดกันที่จุด L_1 นั่นเอง จุด L_2, L_3 ที่เกิดขึ้นก็เกิดมาจากค่าคงที่ C ที่เล็กลงทำให้พื้นผิวของโรชตัดกันได้จุดดังกล่าว และค่าคงที่ C เล็กลงกว่านี้ จะได้พื้นผิวของโรชที่เล็กลง และแยกออกจากกัน นอกแกน X เป็นที่ตำแหน่งของจุด L_4, L_5

พื้นผิวที่ทำให้เกิดจุด L_1 เรียกว่า Inner Contact Surface ส่วนพื้นผิวที่ทำให้เกิดจุด L_2, L_3 เรียกว่า Outer Contact Surface ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 แสดงพื้นผิวสมศักย์ (Equipotential Surface) ที่ค่า C ต่างๆกัน

จากสภาวะของดาวตามแบบจำลองของ Chandrasekha มวลประมาณ 90% ของดาวจะอัดแน่นอยู่ภายในไม่ถึงครึ่งของรัศมีดาว หมายความว่า ดาวมีความหนาแน่นที่ใจกลางสูงมากกว่าที่ผิว จึงส่งผลให้พื้นผิวของโรชค่อนข้างกลม เพราะฉะนั้นในการประเมินสภาวะที่ไม่มีการถ่ายเทมวล แบบจำลองพื้นผิวของโรชยังคงใช้ได้

ให้ Ω เป็นพลังงานศักย์ (Potential Energy) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $-U$ ซึ่ง $U = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + (1-\mu)/r_1 + \mu/r_2$ จากสมการที่ 2.23 จะเขียนได้ว่า $v^2 = -2\Omega - C$ เรียก C ว่า Jacobi Constant จากการสามารถบอกได้ว่า พลังงานศักย์ สอดคล้องกับแบบจำลองของโรชนั่นเอง

รูปร่างของพื้นผิวของระบบดาวคู่แบบไม่ติดกันจะมี 2 พื้นผิวแยกกัน ส่วนระบบดาวคู่แบบกึ่งติดกันหรือติดกันนั้น มวลสารของดาวจะถูกส่งถ่ายผ่านจุด L_1, L_2, L_3 ซึ่งจุด L_2, L_3 เป็นตำแหน่งที่ควบคุมการไหลของมวลสารว่าจะไหลออกจากระบบหรือไม่

เงื่อนไขของระบบดาวคู่ที่ต้องยอมรับมีดังนี้

1. ระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดกันนี้อยู่ในสมดุล Radiative Equilibrium
2. การประมาณมวลของดาวประมาณได้ว่าเป็นจุด
3. ดาวมีการโคจรเป็นวงกลม
4. การหมุนของดาวจะต้อง Synchronous กับการโคจรรอบจุดศูนย์กลางโน้มถ่วง
5. แกนหมุนของดาวตั้งฉากกับระนาบวงโคจร

จากเงื่อนไขข้างบนถ้าผิดจากข้อ 4 จะมีผลทำให้จุด L_1 ใกล้จุดศูนย์กลางโน้มถ่วงของดาวดวงที่หมุนเร็วกว่า และส่งผลให้ Critical Surface ยุบตัวเล็กลง ถ้าผิดเงื่อนไขข้อ 5 จะทำให้จุด L_1 เปลี่ยนไปและรูปร่างของพื้นผิวจะผิดไปด้วย

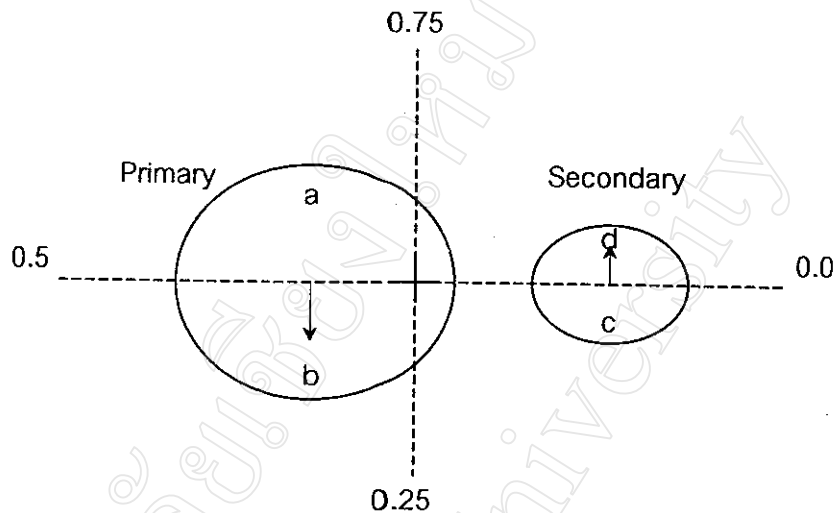
2.4 ปรากฏการณ์ O'Connell effect

ในการวิเคราะห์ระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดกัน ข้อมูลที่สำคัญในการวิเคราะห์คือกราฟแสงและกราฟความเร็ว ระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดกันนั้น โดยส่วนมากจะมีสมาชิกดาวดวงที่ไม่ค่อยสว่างอยู่ และสมาชิกดวงนี้เองเป็นปัญหาในการถ่ายสเปกตรัม เพราะว่าไม่ค่อยจะได้ข้อมูลที่สมบูรณ์ กราฟความเร็วที่ต้องการจึงไม่สมบูรณ์ด้วย ส่งผลถึงการหาค่าอัตราส่วนระหว่างมวล (Mass Ratio, q) ได้ยาก ข้อมูลกราฟแสงที่ได้ส่วนใหญ่มาจากแสงของดาวดวงที่สว่างนั่นเอง

มีกราฟแสงของระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดกันบางดวง มีความสว่างสูงสุดปฐมภูมิสว่างกว่าความสว่างสูงสุดทุติยภูมิ เป็นความไม่สมมาตรของกราฟแสงซึ่งเราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า O'Connell ซึ่งจะพบมากในการศึกษาระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดกัน (Near-Contact Binary System)

ในการอธิบายความไม่สมมาตรของกราฟแสงนั้น สมมติแบบจำลองของระบบดาวคู่ โดยให้ดาวปฐมภูมิเป็นดาวมวลมาก ขนาดใหญ่ และเป็นดาวที่มีอุณหภูมิสูง กว่าดาวทุติยภูมิ ความ

สว่างที่เฟส 0.25 สว่างกว่า ความสว่างที่เฟส 0.75 กราฟแสงจะมีความสว่างสูงสุดปฐมภูมิ (Primary Maximum, Max I) สว่างกว่าความสว่างสูงสุดทุติยภูมิ (Secondary Maximum, Max II)



รูปที่ 2.13 แสดงตำแหน่งของด้านแต่ละด้านบนผิวดาว และเฟสของการบังกัน

พิจารณาจากรูป 2.13 หากเกิดความไม่สมมาตรของกราฟแสงแล้ว แสดงว่าความสว่างผิวดาวด้าน b และ c จะสว่างมากกว่าผิวดาวด้าน a และ d ซึ่งโดยปกติแล้ว ผิวดาวด้าน d (ดาวทุติยภูมิ) จะให้แสงแก่ระบบน้อยกว่า 1% แต่ความไม่สมมาตรของแสงนั้น ได้มีความต่างของแสงมากกว่า 5% ของแสงทั้งระบบ ดังนั้นผลของแสงจากผิวดาวด้าน d ไม่ใช่สาเหตุหลักที่ทำให้เกิดความไม่สมมาตรของกราฟแสง

โดยมีสมมติฐานว่าผิวดาวด้าน a ของดาวปฐมภูมิ อาจจะมีอุณหภูมิต่ำกว่าด้าน b หรืออาจเกิดจากการบดบังดูดซับพลังงานที่ผิวดาว แต่จากหลักฐานการถ่ายสเปกตรัม Lyman α Emission เพื่อทำการวิเคราะห์หากราฟความเร็วนั้น ได้ว่าฟลักซ์รวมของ Lyman α ที่เฟส 0.25 มีมากกว่า 2 เท่า ของที่เฟส 0.75 ซึ่งหมายความว่าความเข้มของ Lyman α เข้มกว่าที่เฟส 0.75 นั้นเอง

มีหลักฐานการตรวจวัดดาว V1010 Oph พบว่า ที่ดาวทุติยภูมิซึ่งมีการโคจรด้วยความเร็วสูงนั้น จะทำให้เกิดเส้น Lyman α ที่ได้จากการถ่ายสเปกตรัมกว้างขึ้น ซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะตัวร่วมกับแหล่งกำเนิดสเปกตรัม Lyman α ที่ผิวดาวด้าน c ทำให้มีความเข้มของ Lyman α ซึ่งอยู่ในความยาวช่วงคลื่น UV มีความเข้มเป็นพิเศษ ซึ่งอธิบายได้ใกล้เคียงกับปรากฏการณ์ O'Connell และยังพบอีกว่า คาบของดาว V1010 Oph มีการเปลี่ยนแปลงในทางที่ลดลง ซึ่งมีโมเมนตัมเชิงมุม

ที่ลดลง (Angular Momentum Loss, AML) อาจเกิดกระบวนการถ่ายเทมวลสาร ส่งผลให้เกิดการสูญเสียมวลสารออกจากระบบได้

จากแบบจำลอง ถ้ามีการถ่ายเทมวลสารจากดาวปฐมภูมิไปสู่ดาวทุติยภูมิ เราสามารถคำนวณพลังงานจากการถ่ายเท รวมถึงพลังงานจากจุดสว่างบนดาวทุติยภูมิ ส่งผลให้ผลต่างของความสว่างสูงสุดปฐมภูมิกับความสว่างสูงสุดทุติยภูมิเท่ากับ 0.03 Magnitude ซึ่งใกล้เคียงกับข้อมูลกราฟแสงของดาว V1010 Oph ซึ่งมีผลต่างของความสว่างสูงสุดปฐมภูมิกับความสว่างสูงสุดทุติยภูมิเท่ากับ 0.025 magnitude กล่าวได้ว่าแบบจำลองสามารถอธิบายได้ใกล้เคียงกับข้อมูลจากการตรวจวัด

ดาวคู่แบบใกล้ชิดติดกัน แบ่งได้เป็น 2 ประเภท

1. V1010 Ophiuchi Binary
2. FO Virginis Binary

ดาวคู่ประเภท V1010 Oph นั้น ดาวปฐมภูมิจะเป็นดาวที่มีอุณหภูมิสูง และใกล้กับช่วงปลายของแถบกระบวนการหลัก (Terminal Main Sequence) ขนาดของดาวปฐมภูมิจะโตใกล้เคียงเต็ม หรืออาจจะเต็ม Roche Lobe มีการถ่ายเทมวลสารไปสู่ดาวทุติยภูมิ ส่วนดาวทุติยภูมินั้นจะมีขนาดของชั้นบรรยากาศใหญ่กว่าดาวที่อยู่ในแถบกระบวนการหลัก เมื่อเทียบในขนาดของมวลที่ใกล้เคียงกัน หรือเรียกว่า Oversize for Mass และกราฟแสงเป็นแบบไม่สมมาตร

ดาวคู่ประเภท FO Vir นั้น ดาวทุติยภูมิจะมีขนาดโตใกล้เคียงเต็ม หรืออาจจะเต็ม Roche Lobe และมีขนาดของชั้นบรรยากาศใหญ่กว่าดาวอื่นที่มีมวลใกล้เคียงกัน ส่วนดาวปฐมภูมิมีวิวัฒนาการตามปกติ กราฟแสงของดาวคู่ประเภทนี้มีความสมมาตร อาจเกิดจากมีการถ่ายเทมวลสารน้อยจนไม่สามารถตรวจวัดการเปลี่ยนแปลงของคาบที่เปลี่ยนแปลงได้ หรือ ความร้อนที่เกิดจากการถ่ายเทมวลสารจากดาวปฐมภูมิสู่ดาวทุติยภูมินั้น ไม่ต่างจากความสว่างบนผิวของดาวปฐมภูมิ จึงทำให้ไม่เห็นความเปลี่ยนแปลงของกราฟแสงและกราฟความเร็วนั่นเอง

เป็นที่น่าสังเกตสำหรับ ระบบดาวคู่แบบติดกันประเภท W-type และ A-type (W UMa Contact Binary) เป็นดาวคู่ที่มีอายุประมาณ 1-7 Gyr ซึ่งเป็นดาวคู่ที่มีอายุค่อนข้างแก่มาก ในขณะที่ดาวคู่ประเภท V1010 Oph สเปกตรัมของดาวปฐมภูมิเป็นชนิด A-F (Spectral Type) ซึ่งเป็นช่วงปลายของแถบกระบวนการหลัก ถ้าไม่พิจารณาการเป็นดาวคู่แบบติดกันแล้ว ดาวคู่ประเภท FO Vir มีความคล้ายคลึงกับดาวคู่แบบติดกันประเภท A-type ทั้งดาวปฐมภูมิของดาวคู่ประเภท V1010 Oph และดาวทุติยภูมิของดาวคู่ประเภท FO Vir ต่างก็มีขนาดของดาวใหญ่ผิดปกติ ขนาด

ใหญ่กว่าดาวที่อยู่ในแถบกระบวนหลักไม่น้อยกว่าสองเท่า ในขณะที่ดาวคู่แบบติดกันประเภท A-type ดาวฤกษ์มีขนาดใหญ่มากกว่าดาวที่อยู่ในแถบกระบวนหลักถึงสามเท่า

เราอาจกล่าวได้ว่าดาวคู่ประเภท FO Vir เป็นดาวคู่ที่วิวัฒนาการไปเป็นดาวคู่ประเภท A-Type W UMa ก็ได้ แต่แปลกตรงที่ดาวคู่ประเภท A-type W UMa เป็นดาวที่ค่อนข้างแก่กว่ามาก และมีมวลที่น้อยกว่าดาวคู่ประเภทใกล้เคียงกัน ในขณะที่ดาวปฐมภูมิของดาวคู่ประเภท V1010 Oph มีวิวัฒนาการบนแถบกระบวนหลักเหมือนกับดาวคู่แบบติดกันประเภท W-type อย่างไรก็ตาม ถ้าจะกล่าวว่าดาวคู่แบบติดกันประเภท W-type วิวัฒนาการมาจากดาวคู่ประเภท V1010 Oph ต้องสามารถอธิบายได้ถึงการสูญเสียมวลทิ้งไปไม่น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ แต่ปัจจุบันยังไม่มีหลักฐานยืนยันการสูญเสียมวลสารออกนอกระบบมากนัก ดังนั้นเราไม่สามารถบอกได้ว่าเกิดวิวัฒนาการจากดาวคู่ประเภทใกล้เคียงกัน เปลี่ยนแปลงโดยตรงไปเป็น ดาวคู่ประเภทติดกันเช่นนั้นได้

โดยสรุป ดาวคู่ประเภทใกล้เคียงกัน มีคุณสมบัติไม่เหมือนกับระบบดาวคู่ประเภทติดกัน (Contact Binary) เช่น ไม่มีการถ่ายเทพลังงาน และมีอุณหภูมิพื้นผิวด้านข้างแตกต่างกันมาก