

บทที่ 3

1-แฟคเตอร์ และ 2-แฟคเตอร์ ของกราฟควบคู่จากสเปราทส์เกม

ในบทนี้จะกล่าวถึง กติกาการเล่นสเปราทส์เกม ทฤษฎีบท ที่จะนำมาประยุกต์ใช้ในการหา 1-แฟคเตอร์ และ 2-แฟคเตอร์ ของกราฟควบคู่ G^* และเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการมี 1-แฟคเตอร์ และ 2-แฟคเตอร์ ของกราฟควบคู่ G^* ที่เกิดจากทวิภาคีพลาแนร์กราฟ G ในสเปราทส์เกม

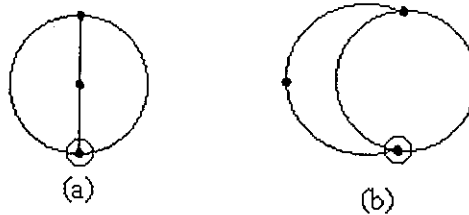
ซึ่งคำศัพท์บางคำที่ปรากฏใน ทฤษฎีบท หรือ ตัวอย่างในบทนี้ ผู้เขียนได้กำหนดไว้แล้วในบทที่ 2

กติกาการเล่นสเปราทส์เกม

- 1) กำหนดจุดซึ่งเป็นเซตจำกัดของจุด m จุด
- 2) ให้ผู้เล่นเพิ่มเส้นระหว่างจุดยอด 2 จุด หรือ เติมรูปล้อมรอบจุดยอดแต่ละจุด
- 3) การเพิ่มเส้นแต่ละครั้งต้องเพิ่มจุดขึ้นบนเส้นอีกหนึ่งจุดเสมอ
- 4) จุดใดๆห้ามมีดีกรีเกิน 3
- 5) ห้ามลากเส้นให้ตัดกัน

ตัวอย่าง 3.1

ถ้า $m = 1$ จะเล่นได้ 2 วิธี



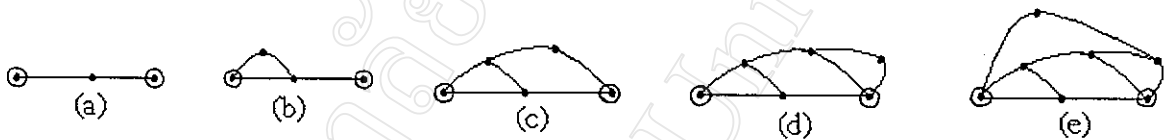
รูป 3.1

ถ้า $m = 2$ จะเล่นได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1



วิธีที่ 2



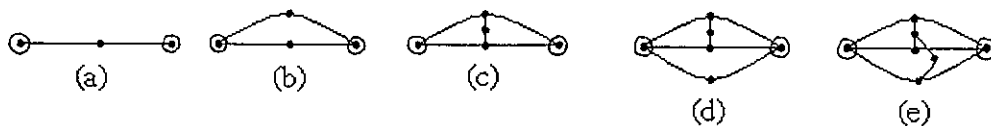
รูป 3.2

จากรูป 3.2 จะพบว่าทั้งสองวิธีบน $m = 2$ จะมีจำนวนครั้งการเล่นน้อยที่สุดเท่ากับ 4 และมากที่สุด เท่ากับ 5

จากตัวอย่างการเล่นเกมนี้น พบว่ากราฟสุดท้ายที่เกิดขึ้นคือกราฟที่ไม่สามารถเล่นต่อไปได้อีกนั้น แต่ละจุดจะมีดีกรีสูงสุดเท่ากับ 3 และดีกรีต่ำสุดเท่ากับ 2 ซึ่งจะกำหนดให้กราฟสุดท้ายเป็นกราฟ G_0 และจะได้ว่า G_0 เป็นคอนเนกเตดเพลนกราฟที่ไม่มีลูป

ตัวอย่าง 3.2 เป็นการเล่นสเปราทส์เกมที่ผิดกติกา

ถ้า $m = 2$



รูป 3.3

จากรูป 3.3 พบว่า รูป 3.3 (e) เกิดการตัดกันขึ้นซึ่งผิดกติกา

Proposition 3.1 การเล่นเกมสเปราทส์เกมบนจุด m จุด จะเล่นได้ไม่เกิน $3m - 1$ ครั้ง
พิสูจน์ กำหนดจุด m จุดในการเล่นและให้ p เป็นจำนวนครั้งของการเล่น
 หลังจากเล่นไป p ครั้งบน m จุด จะมีจำนวนจุดทั้งหมดเท่ากับ $m + p$ จุด
 (ในการเล่นแต่ละครั้ง การลากเส้นจะทำให้เกิดจุด 1 จุดเสมอ)
 พิจารณาการเล่นแต่ละครั้ง จะทำให้เกิดดีกรีเพิ่มขึ้นเท่ากับ 4 ทุกครั้ง นั่นคือดีกรี
 รวมในการเล่นเป็น $4p$ ตามกติกาการเล่นจุดแต่ละจุดจะมีดีกรีสูงเกิน 3 ไม่ได้
 นั่นคือในการเล่น p ครั้ง ซึ่งมีจำนวนจุดทั้งหมด $m + p$ จุดแล้วดีกรีรวมมากที่สุด
 เป็น $3(m + p)$

$$\text{ดังนั้นจากข้างต้นจะได้ว่า } 4p = 3(m + p)$$

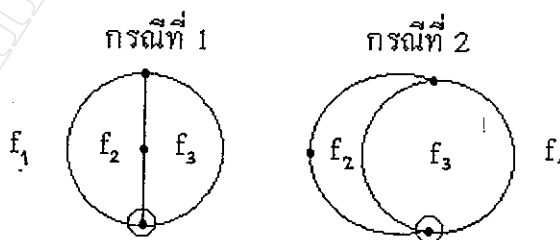
แต่จากการเล่นครั้งสุดท้าย หรือ 2 จุดใดๆในการเล่นครั้งสุดท้ายจะมี
 ดีกรีเท่ากับ 2 เสมอ ทำให้ได้ว่า

$$4p < 3(m + p) \text{ หรือ } p < 3m$$

$$\text{นั่นคือ } p \leq 3m - 1$$

ต่อไปจะอธิบายว่า เกมที่เล่นได้ถึง $3m - 1$ ครั้ง เล่นได้อย่างไร ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณา ถ้า $m = 1$ จะเล่นได้ 2 กรณี แต่ละกรณีจะแบ่งพื้นที่ออกเป็น 3 หน้า

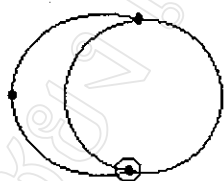


รูป 3.4 (a)

จากรูป 3.4 (a) สังเกตจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 2 จะอยู่บนเส้นขอบของหน้า
 2 หน้าเสมอ

ต่อมาจะพิจารณากรณีที่มี m จุด

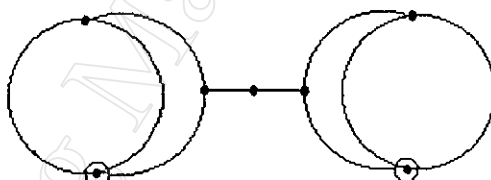
ขั้นที่ 1 ให้เล่นเกมทีละจุด แต่มีเงื่อนไขว่าให้จุดที่เหลืออยู่ภายในหน้าไม้จำกัดเสมอ



รูป 3.4 (b)

ขั้นที่ 2 ให้เล่นจากจุดที่เหลืออีกเหมือนขั้นตอนแรก โดยเล่นทีละจุด แล้วเชื่อมต่อ

2 จุดที่มีดีกรี 2 จะทำให้ได้เป็นลูกตุ้มน้ำหนัก



รูป 3.4 (c)

จากรูป 3.4 (b) และรูป 3.4 (c) จุดที่ 1 เล่นได้ 2 ครั้ง

จุดที่ 2 เล่นได้ 3 ครั้ง

จุดที่ 3 เล่นได้ 3 ครั้ง

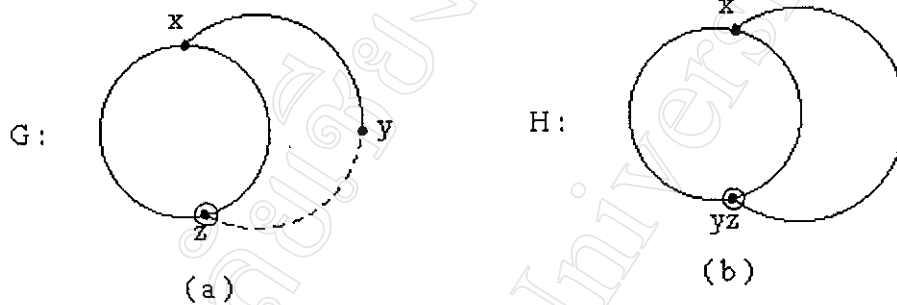
⋮

จุดที่ m เล่นได้ 3 ครั้ง

เพราะเนื่องจากเล่นบน m จุด จะมีกรณีที่เล่นได้ 2 ครั้งเพียงกรณีเดียวที่จุดแรก จึงทำให้ได้ว่า ในการเล่น m จุด จะเล่นได้ $3m - 1$ ครั้ง จากการพิสูจน์แสดงว่า ถ้าเล่นสเปราทส์เกมบน m จุดแล้วจะเล่นได้มากถึง $3m - 1$ ครั้งและเป็นไปได้เสมอ

หมายเหตุ กราฟ G_0 ที่เกิดจากการเล่นเกม เราสามารถคอนแทรคเส้นที่มีดีกรีเท่ากับ 2 แล้วทำให้กราฟที่ได้เป็นคิวบิกกราฟ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.4 กำหนดให้กราฟ G_0 เกิดจากการเล่นสเปราทส์เกม เมื่อ $m = 1$ และ $p = 2$ และ เส้นประ แทนเส้นที่อินซิเดนซ์กับจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 2



รูป 3.5

จากรูป 3.5 (a) จุด y และ z อินซิเดนซ์กับเส้น yz ซึ่งจุด y มีดีกรีเท่ากับ 2 เมื่อทำการคอนแทรคเส้น yz โดยการยกจุด y มาทับกับจุด z จะได้ว่า กราฟ H เป็นคิวบิกกราฟ ซึ่งทุกจุดมีดีกรีเท่ากับ 3 ดังรูป 3.5 (b)

ทฤษฎีบท 3.2 ให้คิวบิกพลาเนียร์กราฟ G เกิดจากการเล่นสเปราทส์เกม บนจุด m จุด และเล่น p ครั้ง จะได้ว่า

$$f = 2 + p - m$$

พิสูจน์ ให้ r เป็นจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 2 ในกราฟ G_0 และให้ f เป็นจำนวนหน้า e เป็นจำนวนเส้น และ n เป็นจำนวนจุดของกราฟ G_0 จาก ทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าดีกรีรวมมากที่สุดของกราฟ G_0 คือ $4p$ หรือ $3(m + p)$ แต่ในคิวบิกพลาเนียร์กราฟ G จะได้ดีกรีรวมเท่ากับ $3(m + p) - r$

$$\text{ดังนั้น} \quad 3(m + p) - r = 4p$$

$$3m + 3p - r = 4p$$

$$3m - r = p$$

$$\text{นั่นคือ} \quad r = 3m - p$$

พิจารณาในการเล่นแต่ละครั้งในกราฟ G_0 จะพบว่า เล่น 1 ครั้ง จะเกิดเส้น 2 เส้น
เสมอ ดังนั้นในกราฟ G_0 จำนวนเส้นทั้งหมดจะเท่ากับ $2p$ เส้น

ถ้าในคิวบิคพลานาร์กราฟ G จำนวนเส้น (e) จะเท่ากับ $2p-r$ เส้น
ดังนั้น

$$e = 2p - r$$

แทนค่า $r = 3m - p$ จะได้ว่า

$$e = 2p - (3m - p)$$

$$e = 2p - 3m + p$$

$$e = 3p - 3m$$

$$e = 3(p - m)$$

ส่วนจำนวนจุดทั้งหมดในกราฟ G_0 จะเท่ากับ $m + p$ จุด นั่นคือ จำนวนจุดทั้งหมดใน
คิวบิคพลานาร์กราฟ เท่ากับ $(m + p) - r$

ดังนั้น

$$n = (m + p) - r$$

แทนค่า $r = 3m - p$ จะได้ว่า

$$n = (m + p) - (3m - p)$$

$$n = m + 2p - 3m$$

$$n = 2p - 2m$$

ดังนั้น

$$n = 2(p - m)$$

พิจารณาสูตรของออยเลอร์

$$f - e + n = 2$$

แทนค่า e และ n ลงในสูตรของออยเลอร์ จะได้ว่า

$$f - [3(p - m)] + [2(p - m)] = 2$$

$$f - [3p - 3m] + [2p - 2m] = 2$$

$$f - 3p + 3m + 2p - 2m = 2$$

$$f - p + m = 2$$

นั่นคือ

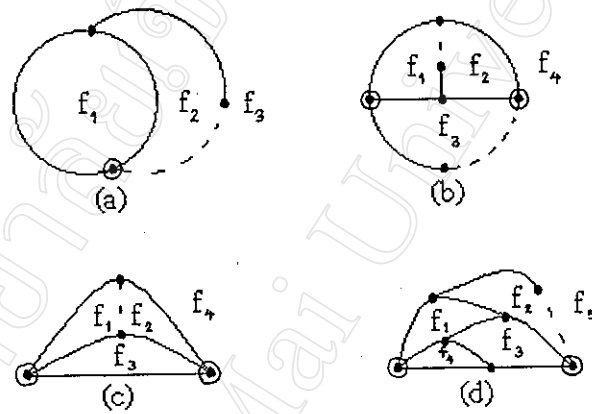
$$f = 2 + p - m$$

□

ทฤษฎีบท 3.3 ให้คิวิบิพลานาร์กราฟ G เกิดจากการเล่นสเฟรทส์เกมบน m จุด ในการเล่น p ครั้ง และถ้าคิวิบิกราฟ G เป็น 2-คอนเนคเตด แล้ว $p \geq \frac{7m}{3} - \frac{2}{3}$

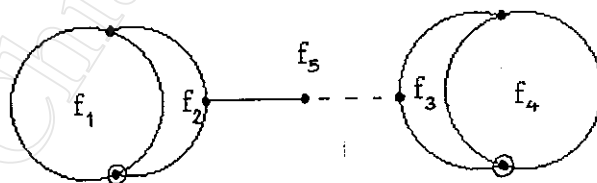
พิสูจน์ กำหนดให้ r เป็นจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 2 เนื่องจากในการเล่นสเฟรทส์เกมพบว่า จะเกิดจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 2 และจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 2 จะแบ่งหน้าออกเป็น 2 หน้าเสมอ เป็นผลให้ $f \geq 2r$

พิจารณากราฟที่เกิดจากการเล่นสเฟรทส์เกม



รูป 3.6

จากรูป 3.6 รูปที่ 3.6 (a) $f > 2r$, รูปที่ 3.6 (b) $f > 2r$, รูปที่ 3.6 (c) $f > 2r$, รูปที่ 3.6 (d) $f > 2r$



รูป 3.7

จากรูป 3.7 $f > 2r$ จริง แต่คิวิบิพลานาร์กราฟ G ไม่ใช่ 2-คอนเนคเตด นั่นคือ ถ้าเอาเส้น r ออกแล้วกราฟจะเป็นดิสคอนเนคเตด

เนื่องจาก $r = 3m - p$ ดังนั้น แทนค่า $r = 3m - p$ ลงใน $f \geq 2r$

$$\text{จะได้ว่า} \quad f \geq 2(3m - p)$$

$$\text{แต่จากทฤษฎีบท 3.2} \quad f = 2 + p - m$$

ดังนั้น

$$2 + p - m \geq 2(3m - p)$$

$$2 + p - m \geq 6m - 2p$$

$$2 + p + 2p \geq 7m$$

$$2 + 3p \geq 7m$$

$$3p \geq 7m - 2$$

$$p \geq \frac{7m - 2}{3}$$

นั่นคือ ถ้าตัวบิคพลานาร์กราฟ G เกิดจากการเล่นสเพราทส์เกมบน m จุด p ครั้ง และ ถ้าตัวบิคพลานาร์กราฟ G เป็น 2-คอนเนคเตด

$$\text{แล้ว } p \geq \frac{7m - 2}{3}$$

□

จากทฤษฎีบทข้างต้น สามารถนำตัวบิคพลานาร์กราฟ G ที่เกิดจากการเล่นสเพราทส์เกม มาศึกษาต่อบนกราฟควบคู่ G^* และจะได้ทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการมี 1-แฟคเตอร์ และ 2-แฟคเตอร์ ของกราฟควบคู่ G^* ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

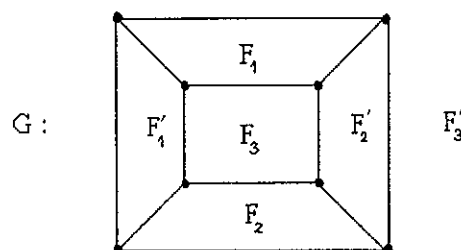
นิยาม 3.1 ให้ G เป็นคอนเนคเตดเพลนกราฟ ให้ F_1 และ F_2 เป็นหน้าใดๆของ G จะเรียก F_1 ติดกับ F_2 ถ้ามีเส้นอย่างน้อย 1 เส้นที่เป็นเส้นร่วมของ F_1 และ F_2

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ G เป็นคอนเนคเตดเพลนกราฟ ที่ไม่มีลูป และไม่มีบริดจ์ ถ้า G มีจำนวนหน้าเท่ากับ f โดยที่ f เป็นจำนวนคู่ แล้วจะมีพาร์ติชัน

$\{F_1, F'_1, F_2, F'_2, \dots, F_a, F'_a\}$ โดยที่ $f = 2a$ เมื่อ $F_i, i = 1, 2, 3, \dots, a$ เป็นหน้าของ G ซึ่ง F_i และ F'_i ติดกันทุกๆค่า $i = 1, 2, 3, \dots, a$

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยสร้างขั้นตอนการพาร์ติชันของกราฟ G ดังนี้

1. พิจารณาว่าหน้า F_1 ใดมีหน้าอื่นล้อมรอบอยู่น้อยที่สุด และเป็นหน้าที่ติดกับหน้าไม่จำกัด จะสมมติให้หน้านี้เป็น F_1
2. พิจารณาต่อว่ามีหน้าใดบ้างอยู่ติดกับหน้า F_1 (สมมติว่า F'_1) โดยเลือก F'_1 ให้มีหน้าอื่นล้อมรอบอยู่น้อยที่สุด และอยู่ติดกับหน้าไม่จำกัดเสมอ
3. ตัดหน้า F_1 ออก โดยการตัดเส้นที่ติดกับหน้าไม่จำกัดเท่านั้น จะได้ว่ากราฟที่เหลือจากการตัดเส้นนี้ยังคงเป็นคอนเนคเตดเพลนกราฟ
4. ตัดหน้า F'_1 ออก โดยการตัดเส้นที่ติดกับหน้าไม่จำกัดเท่านั้น จะได้ว่ากราฟที่เหลือจากการตัดเส้นนี้ยังคงเป็นคอนเนคเตดเพลนกราฟ ซึ่งเมื่อตัดหน้า F_1 และ F'_1 ออก จำนวนหน้าที่เหลืออยู่จะเท่ากับ $2a - 2$ หน้า ซึ่งเป็นจำนวนคู่
5. ทำตามขั้นตอน ข้อ 1-4 คือพิจารณาทีละคู่ของ F_i และ F'_i ที่ติดกันไปเรื่อยๆ จะได้ว่า สามารถพาร์ติชัน $\{F_1, F'_1, F_2, F'_2, \dots, F_a, F'_a\}$ เมื่อ $F_i, i = 1, 2, 3, \dots, a$ เป็นหน้าของ G ดังแสดงในรูป 3.8



รูป 3.8

จากรูป 3.8 จะสามารถพาร์ติชันกราฟ G ตามขั้นตอนการสร้างข้างต้น เรียงตามลำดับดังนี้

$$\{F_1, F'_1\}, \{F_2, F'_2\}, \{F_3, F'_3\}$$

□

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ G เป็นคอนเนคเตดเพเลนกราฟ ที่มีกราฟควบคู่ G^* เป็น 2-คอนเนคเตด ถ้ากราฟควบคู่ G^* มีจำนวนจุดเป็นจำนวนคู่ แล้ว จะได้ว่า

1. กราฟควบคู่ G^* จะมี 1-แฟกเตอร์อย่างน้อย 2 รูป
2. กราฟควบคู่ G^* จะมี 2-แฟกเตอร์

พิสูจน์ 1. จะแสดงว่า G^* มี 1-แฟกเตอร์อย่างน้อย 2 รูป

ให้ G เป็นคอนเนคเตดเพเลนกราฟ และมี n จุด e เส้น และ f หน้า และให้ G^* เป็นกราฟควบคู่ของ G โดยมี n^* เป็นจำนวนจุด e^* เป็นจำนวนเส้น และ f^* เป็นจำนวนหน้า

จากกำหนดให้ G^* มีจุดเป็นจำนวนคู่ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า กราฟ G จะมีจำนวนหน้าเป็นจำนวนคู่ แต่จากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า คอนเนคเตดเพเลนกราฟ G ที่มีจำนวนหน้าเป็นจำนวนคู่ จะมีพาร์ติชัน $\{F_1, F'_1, F_2, F'_2, \dots, F_a, F'_a\}$ โดยที่ $f = 2a$

เมื่อ $F_i, i=1,2,3,\dots,a$ เป็นหน้าของ G ซึ่ง F_i และ F'_i ติดกันทุกๆค่า $i=1,2,3,\dots,a$

พิจารณาทีละคู่ของ F_i และ F'_i เมื่อ $i=1,2,3,\dots,a$ ถ้าให้ v_i และ v'_i เป็นจุดของ G^* ที่อยู่ในหน้า F_i และ F'_i ตามลำดับ แล้วจะมีเส้น $v_i v'_i$ ของ G^* ที่เชื่อมระหว่างหน้า F_i และ F'_i ดังนั้นแต่ละคู่ของ F_i และ F'_i จะมีเส้น 1 เส้นที่สมนัยกับหน้า F_i และ F'_i เนื่องจาก $i=1,2,3,\dots,a$ ดังนั้นจะมีเส้นทั้งหมด a เส้น

ให้ H เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเส้นที่ได้ a เส้นนี้ เนื่องจากทุกๆจุดใน H มีดีกรีเท่ากับ 1 ดังนั้น H จะเป็น 1-แฟกเตอร์ และ H จะเป็นสับกราฟของ G^* ด้วย แต่เนื่องจากจำนวนจุดของ H เท่ากับ $2a$ ซึ่ง $f = 2a$ และจากทฤษฎีบท 2.2 ได้ว่า

$$f = n^* \text{ ดังนั้น } 2a = n^* \text{ ทำให้ได้ว่า } H \text{ เป็นสเปนนิงสับกราฟของ } G^*$$

นั่นคือ G^* มี 1-แฟกเตอร์ เนื่องจาก G^* เป็น 2-คอนเนคเตด ที่มี 1-แฟกเตอร์ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า G^* มี 1-แฟกเตอร์ที่ต่างกันอย่างน้อย 2 รูป

2. จะแสดงว่า G^* มี 2-แฟกเตอร์

จากการพิสูจน์ในกรณีที่ 1 จะได้ว่า G^* จะมี 1-แฟกเตอร์ที่ต่างกันอย่างน้อย 2 รูป ดังนั้นถ้าทุกๆ 2 จุดใดๆที่เป็นจุดประชิดกันในรูปแรกแล้ว จะพบว่า 2 จุดนั้นๆ จะไม่ประชิดกันในรูปที่ 2 และเนื่องจาก 1-แฟกเตอร์ในแต่ละรูป ทุกจุดจะมีดีกรีเท่ากับ 1 จะได้ว่า เมื่อนำ 1-แฟกเตอร์ ทั้ง 2 รูปที่ต่างกันมาหาผลรวม แล้ว ผลรวมที่ได้นี้จะ เป็นสเปนนิงสับกราฟของ G^* ที่ทุกจุดมีดีกรีเท่ากับ 2

นั่นคือ G^* จะมี 2-แฟกเตอร์ □

ทฤษฎีบท 3.6 ให้คิวบิคพลานาร์กราฟ G เกิดจากการเล่นสเฟราทส์เกม บน m จุด p ครั้ง ถ้า $m + p$ เป็นจำนวนคู่แล้ว กราฟควบคู่ G^* จะมีจำนวนจุดเป็นจำนวนคู่ พิสูจน์ ให้ m เป็นจำนวนจุดที่กำหนดขึ้นในการเล่น และ p เป็นจำนวนครั้งในการเล่น ให้ G เป็นคิวบิคพลานาร์กราฟที่เกิดจากการเล่นเกม และมี n จุด e เส้น และ f หน้า และให้ G^* เป็นกราฟควบคู่ของ G โดยมี n^* เป็นจำนวนจุด e^* เป็นจำนวนเส้น และ f^* เป็นจำนวนหน้า

จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$$n^* = f, e^* = e, f^* = n \quad \dots\dots\dots(1)$$

จากกำหนดให้ $m + p$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจะได้ 2 กรณี คือ

m และ p ต้องเป็นจำนวนคู่ หรือ m และ p ต้องเป็นจำนวนคี่ แต่จากทฤษฎีบทหน้า 3.2 จะได้ว่า ถ้าคิวบิคพลานาร์กราฟ G เกิดจากการเล่นสเฟราทส์เกม บน m จุด p ครั้ง แล้ว

$$f = 2 + p - m \quad \dots\dots\dots(2)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า m และ p ทั้ง 2 กรณี ลงในสมการ (2) จะได้ว่า

f ต้องเป็นจำนวนคู่ และจากสมการ (1) ทราบว่า $f = n^*$ นั่นคือ n^* เป็นจำนวนคู่สรุปว่า G^* จะมีจำนวนจุดเป็นจำนวนคู่ □

ทฤษฎีบท 3.7 ให้คิวบิคลานาร์กราฟ G เกิดจากการเล่นสเฟรทส์เกม บน m จุด p ครั้ง ถ้า $m + p$ เป็นจำนวนคู่ และกราฟควบคู่ G^* เป็น 2-คอนเนคเตด แล้ว

1. กราฟควบคู่ G^* จะมี 1-แฟคเตอร์ที่ต่างกันอย่างน้อย 2 รูป
2. กราฟควบคู่ G^* จะมี 2-แฟคเตอร์

พิสูจน์ ให้ m เป็นจำนวนจุดที่กำหนดขึ้นในการเล่น และ p เป็นจำนวนครั้งในการเล่น ให้ G เป็นคิวบิคลานาร์กราฟที่เกิดจากการเล่นเกม และมี n จุด e เส้น และ f หน้า และให้ G^* เป็นกราฟควบคู่ของ G โดยมี n^* เป็นจำนวนจุด e^* เป็นจำนวนเส้น และ f^* เป็นจำนวนหน้า

จากทฤษฎีบท 3.6 จะได้ว่า ถ้า $m + p$ เป็นจำนวนคู่แล้ว G^* จะมีจุดเป็นจำนวนคู่ และจากทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า ถ้ากราฟควบคู่ G^* เป็น 2-คอนเนคเตด ที่มีจำนวนจุดเป็นจำนวนคู่แล้ว

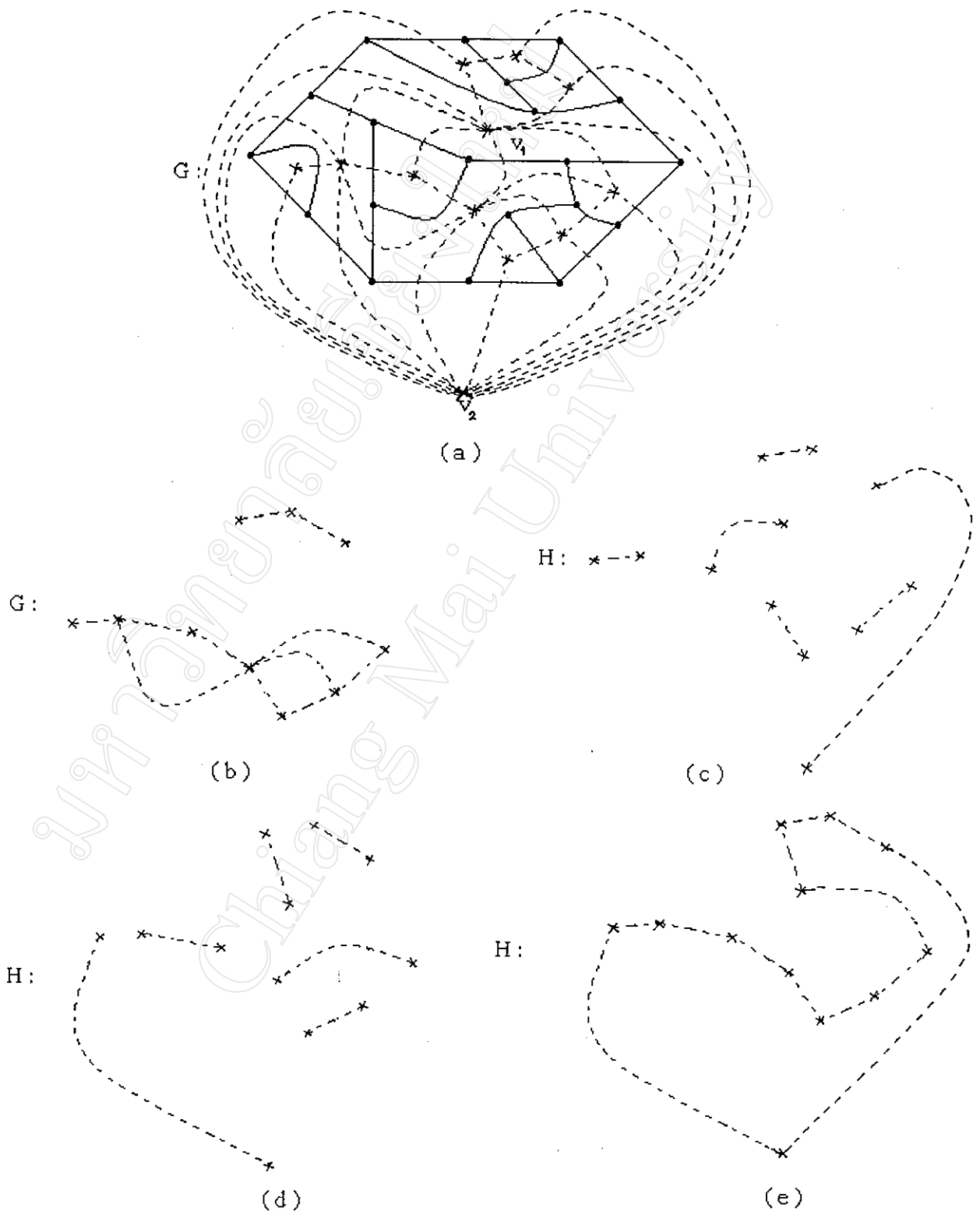
1. กราฟควบคู่ G^* จะมี 1-แฟคเตอร์ที่ต่างกันอย่างน้อย 2 รูป
2. กราฟควบคู่ G^* จะมี 2-แฟคเตอร์

นั่นคือ ถ้า $m + p$ เป็นจำนวนคู่ และ G^* เป็น 2-คอนเนคเตด แล้ว

1. กราฟควบคู่ G^* จะมี 1-แฟคเตอร์ที่ต่างกันอย่างน้อย 2 รูป
2. กราฟควบคู่ G^* จะมี 2-แฟคเตอร์

□

ตัวอย่าง 3.7 กำหนดให้ G เป็นคิวบิคลานาร์กราฟที่เกิดจากการเล่นสเฟรทส์เกม บนจุด 7 จุด และเล่น 17 ครั้ง ให้เส้นทึบ แทนเส้นของ G และเส้นประ แทนเส้นของ G^* ให้เครื่องหมายกากบาทแทนจุดของ G^* ดังรูป



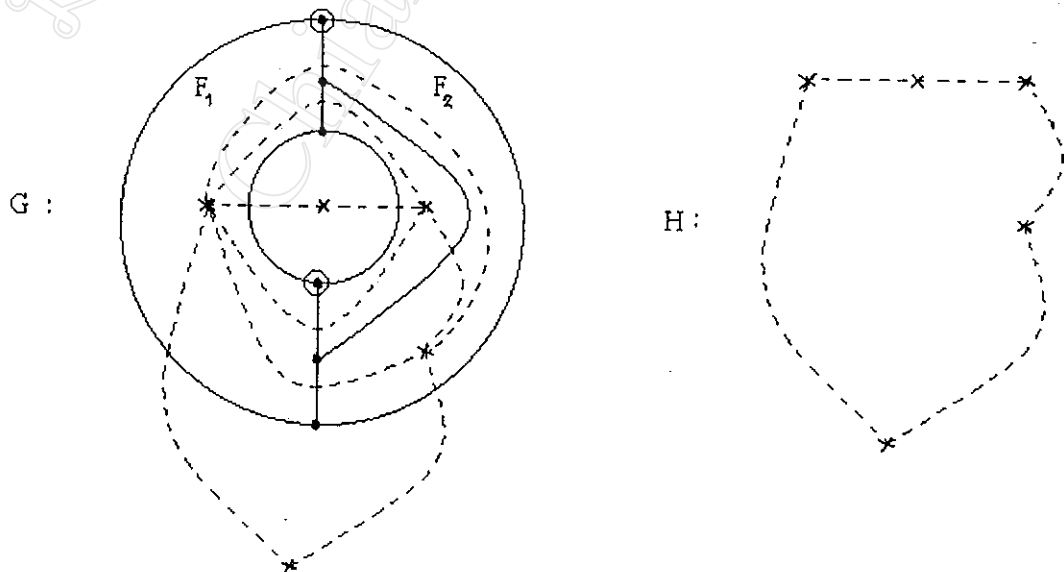
รูป 3.9

จากรูป 3.9 (a) จะได้ว่า G^* เป็น 2-คอนเนคเตด นั่นคือ ถ้าตัดจุด v_1 และ v_2 ออก กราฟที่เหลือจะเป็นดิสคอนเนคเตดกราฟ ดังรูป 3.9 (b) เนื่องจาก $m = 7$ และ $p = 17$ จะได้ว่า $m + p = 24$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจาก ทฤษฎีบท 3.6 ข้อ 1 G^* จะมี 1-แฟกเตอร์ที่ต่างกันอย่างน้อย 2 รูป ดังรูป 3.9 (c) และรูป 3.9 (d) ตามลำดับ และเมื่อนำ 1-แฟกเตอร์ 2 รูป มาหาผลรวม จากทฤษฎีบท 3.6 ข้อ 2 จะได้ว่า G^* จะมี 2-แฟกเตอร์

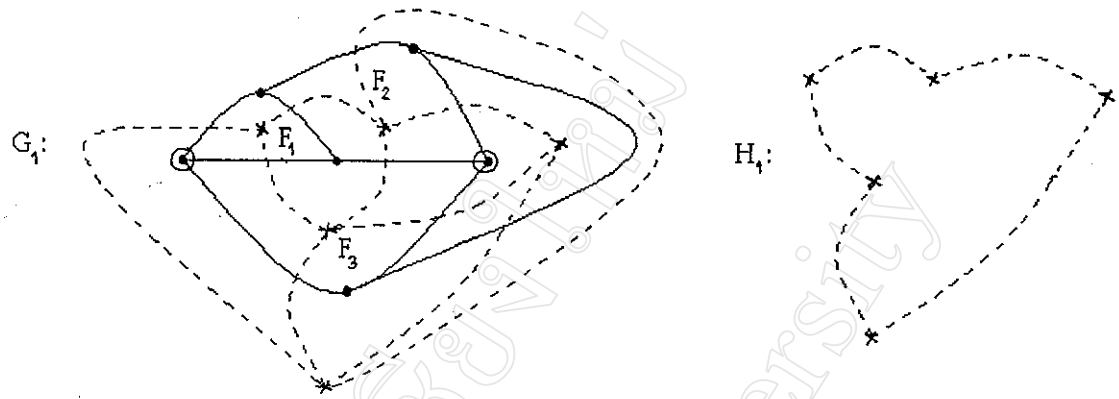
Conjecture 3.1 ให้คิวิคพลานาร์กราฟ G เกิดจากการเล่นสเฟรทส์เกม บน m จุด p ครั้ง ถ้า G มีหน้าจำกัดที่ติดกับหน้าไม่จำกัดอย่างน้อย 2 หน้าติดกัน โดยหน้าจำกัดแต่ละหน้ามีเส้นอย่างน้อย 1 เส้นที่เป็นเส้นร่วมของหน้าแต่ละหน้า และถ้า $m + p$ เป็นจำนวนคี่ แล้วกราฟควบคู่ G^* จะมี 2-แฟกเตอร์

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

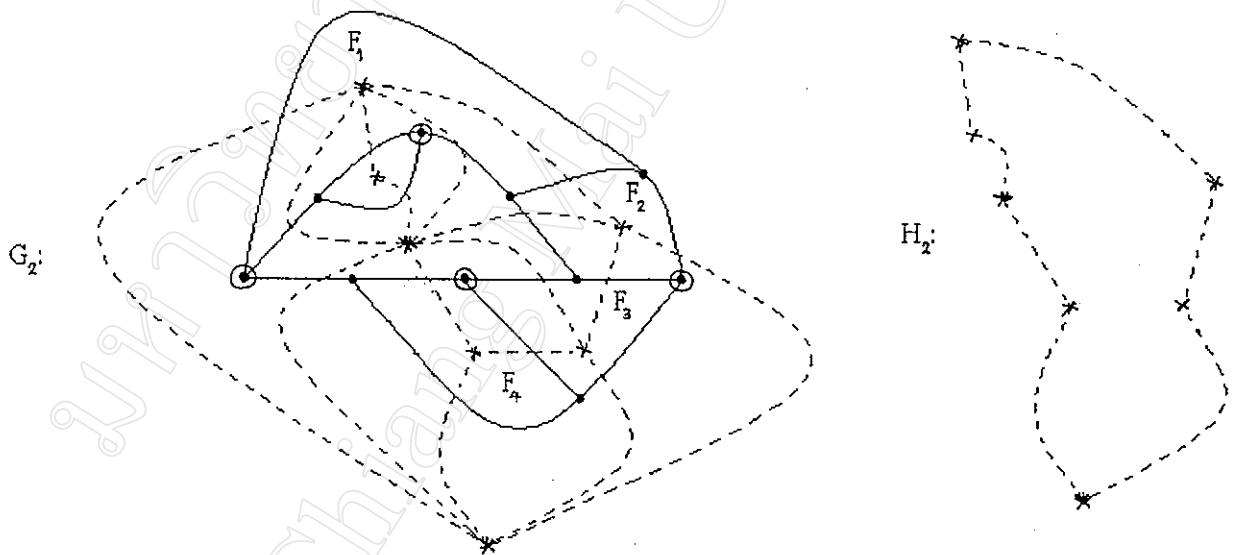
ตัวอย่าง 3.8 กำหนดให้ G เป็นคิวิคพลานาร์กราฟที่เกิดจากการเล่นสเฟรทส์เกม ให้เส้นทึบ แทนเส้นของกราฟ G และเส้นประ แทนเส้นของกราฟ G^* ให้เครื่องหมายกากบาทแทนจุดของ G^* ดังรูป



รูป 3.10 (a)



រូប 3.10 (b)



រូប 3.10 (c)

จากรูป 3.10 (a) จะพบว่ากราฟ G มีหน้า F_1 และ F_2 เป็นหน้าจำกัดที่ติดกับหน้าไม่จำกัด 2 หน้าติดกัน และมีเส้นอย่างน้อย 1 เส้นที่เป็นเส้นร่วมของหน้าจำกัดแต่ละหน้า เนื่องจาก $m = 2$ และ $p = 5$ จะได้ว่า $m + p = 7$ ซึ่งเป็นจำนวนคี่ และสามารถหา 2-แฟกเตอร์ของ G^* ได้ดังกราฟ H

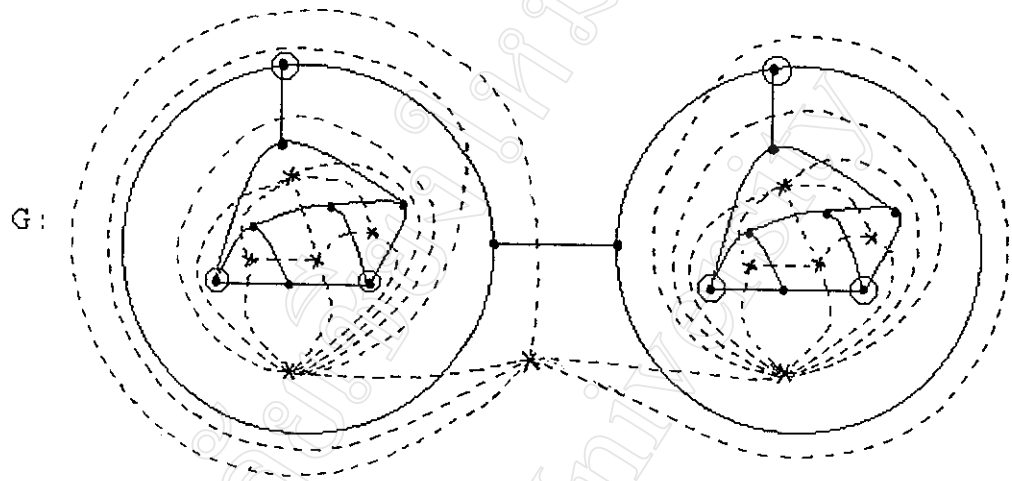
จากรูป 3.10 (b) จะพบว่ากราฟ G_1 มีหน้า F_1, F_2 และ F_3 เป็นหน้าจำกัดที่ติดกับหน้าไม่จำกัด 3 หน้าติดกัน และมีเส้นอย่างน้อย 1 เส้นที่เป็นเส้นร่วมของหน้าจำกัดแต่ละหน้า เนื่องจาก $m = 2$ และ $p = 5$ จะได้ว่า $m + p = 7$ ซึ่งเป็นจำนวนคี่ และสามารถหา 2-แฟกเตอร์ของ G^* ได้ดังกราฟ H_1

จากรูป 3.10 (c) จะพบว่ากราฟ G_2 มีหน้า F_1, F_2, F_3, F_4 เป็นหน้าจำกัดที่ติดกับหน้าไม่จำกัด 4 หน้าติดกัน และมีเส้นอย่างน้อย 1 เส้นที่เป็นเส้นร่วมของหน้าจำกัดแต่ละหน้า เนื่องจาก $m = 4$ และ $p = 9$ จะได้ว่า $m + p = 13$ ซึ่งเป็นจำนวนคี่ และสามารถหา 2-แฟกเตอร์ของ G^* ได้ดังกราฟ H_2

จากตัวอย่างข้างต้น คาดว่าในการเล่นสเปราทส์เกม ถ้า G มีหน้าจำกัด n หน้าติดกับหน้าไม่จำกัด ซึ่งมีเส้นอย่างน้อย 1 เส้นที่เป็นเส้นร่วมของหน้าจำกัดแต่ละหน้า และ $m + p$ เป็นจำนวนคี่แล้ว G^* จะมี 2-แฟกเตอร์ ถ้า $m + p$ เป็นจำนวนคี่ แต่ G ไม่สามารถหาหน้าจำกัดที่ติดกับหน้าไม่จำกัดอย่างน้อย 2 หน้าติดกัน และมีเส้นอย่างน้อย 1 เส้น ที่เป็นเส้นร่วมของหน้าจำกัดแต่ละหน้า แล้ว G^* จะไม่มี 2-แฟกเตอร์

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.9 กำหนดให้ G เป็นคิวบิกพลาเนาร์กราฟที่เกิดจากการเล่นสเปราทส์เกมบน 6 จุด และเล่น 15 ครั้ง ให้เส้นทึบ แทนเส้นของ G และเส้นประ แทนเส้นของ G^* ดังรูป



รูป 3.11

จากรูป 3.11 จะพบว่ากราฟ G^* ของ G ไม่สามารถหา 2-แฟกเตอร์ได้ แม้ว่า $m+p$ จะเป็นจำนวนคี่ เนื่องจากไม่มีหน้าจำกัดที่ติดกับหน้าไม่จำกัดอย่างน้อย 2 หน้าติดกัน ซึ่งหน้าจำกัดแต่ละหน้ามีเส้นอย่างน้อย 1 เส้น เป็นเส้นร่วมของหน้าจำกัดแต่ละหน้า