

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติทั่วไปของกราฟที่จำเป็นต้องนำไปใช้ในบทที่ 3 โดยจะกล่าวถึง นิยาม ทฤษฎีบท และการพิสูจน์ที่สำคัญพอสังเขป

ข้อตกลง

1) คำว่าแฟมิลี (family) ในงานวิจัยนี้จะหมายถึงกลุ่มของสมาชิกโดยที่แต่ละสมาชิกอาจจะซ้ำกันหลายๆครั้งก็ได้ เช่น $\{a, a, a, b, c, c\}$ ซึ่งแต่ละแฟมิลีนี้จะต่างจากเซต เพราะว่า ถ้าเป็นเซตจะเขียนว่า $\{a, b, c\}$

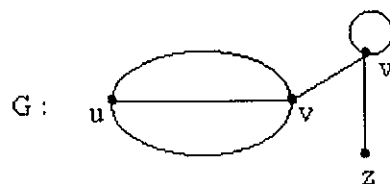
2) จะใช้สัญลักษณ์ (a, b) แทนคู่อันดับ (ordered pair) ของ a และ b

3) จะใช้สัญลักษณ์ $\{a, b\}$ แทนคู่อันดับ (unordered pair) ของ a และ b

นิยาม 2.1 กราฟ G คือคู่อันดับ $(V(G), E(G))$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างของสมาชิกที่เรียกว่าจุด (vertex) และ $E(G)$ เป็นแฟมิลีจำกัดของคู่อันดับของสมาชิกใน $V(G)$ ซึ่งเรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่าเส้น (edge)

โดยทั่วไปแล้วจะแทนกราฟ G ใดๆด้วยแผนภาพ (diagram) ซึ่งประกอบด้วยจุดและเส้น โดยที่จุดของภาพคือสมาชิกของ $V(G)$ และเส้นของภาพคือสมาชิกของ $E(G)$ และเส้น $e = \{u, v\}$ ใดๆใน $E(G)$ จะเป็นเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด u และจุด v

ตัวอย่าง 2.1



รูป 2.1

จากรูป 2.1 $V(G) = \{u, v, w, z\}$ และ $E(G) = \{\{u,v\}, \{u,v\}, \{u,v\}, \{v,w\}, \{w,w\}, \{w,z\}\}$

หมายเหตุ 1. เพื่อความสะดวกจะเขียน uv แทนเส้น $\{u,v\}$

2. เนื่องจาก $E(G)$ เป็นแฟมิลีของคู่ไม่อันดับของจุดใน $V(G)$ ดังนั้นเส้น uv และเส้น vu จึงเป็นเส้นเดียวกัน

นิยาม 2.3 มัลติเพิลเอดจ์ (multiple edges) คือเส้นกราฟที่มีมากกว่า 1 เส้น ซึ่งเชื่อมจุดคู่เดียวกัน

ตัวอย่าง 2.2 จากรูป 2.1 จะเรียก uv ว่ามัลติเพิลเอดจ์

นิยาม 2.4 จะเรียกจุด u และ v ว่าเป็นจุดประชิดกัน (adjacent vertices) ถ้ามีเส้นเชื่อมระหว่างจุด u กับ v

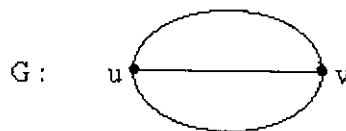
ตัวอย่าง 2.3 จากรูป 2.1 จะเรียก u ว่าประชิดกับ v (หรือ u, v เป็น adjacent vertices)

นิยาม 2.5 ลูป (loop) คือเส้นที่ลากเข้าหาตัวมันเอง

ตัวอย่าง 2.4 เส้น ww ในรูป 2.1

นิยาม 2.6 ถ้าจุด u และ v ของกราฟมีเส้น uv เชื่อมแล้วจะเรียก u หรือ v ของกราฟว่าเป็นจุดที่อินซิเดนต์กับเส้น uv

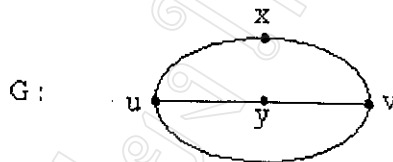
ตัวอย่าง 2.5



รูป 2.2

จากรูป 2.2 จะเรียกจุด u และ v ว่าเป็นจุดที่อินซิเดนต์กับเส้น uv

นิยาม 2.7 จะเรียกจำนวนเส้นของกราฟที่อินซิเดนท์กับจุด a ใดๆ ว่าดีกรี (degree) ของจุด a ตัวอย่าง 2.6



รูป 2.3

จากรูป 2.3

จุด u มีดีกรีเท่ากับ 3

จุด v มีดีกรีเท่ากับ 3

จุด x มีดีกรีเท่ากับ 2

จุด y มีดีกรีเท่ากับ 2

นิยาม 2.8 จะเรียกกราฟที่ทุกจุดมีดีกรีเท่ากันหมดว่า เรกูลาร์กราฟ (regular graph) และถ้าดีกรีของทุกจุดเท่ากับ r จะเรียกว่าเรกูลาร์กราฟของดีกรี r หรือ r -เรกูลาร์

ถ้า r มีดีกรีเท่ากับ 3 จะเรียกเรกูลาร์กราฟว่าคิวบิกกราฟ (cubic graph)

นิยาม 2.9 กราฟว่าง (null graph) คือกราฟ G ที่มี $E(G)$ เป็นเซตว่าง

ตัวอย่าง 2.7



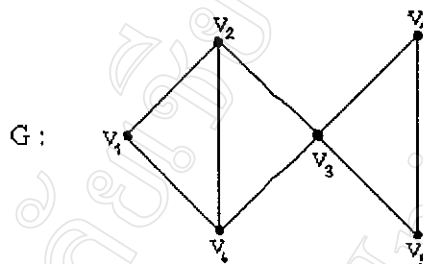
รูป 2.4

จากรูป 2.4 G เป็นกราฟว่างที่มี 4 จุด

นิยาม 2.10 จะเรียกกราฟที่มี 1 จุดว่า ทริวีลกราฟ (trivial graph) นอกนั้นจะเรียกว่า นอน-ทริวีลกราฟ (nontrivial graph)

นิยาม 2.11 ให้ u และ v เป็นจุดของกราฟ G u - v วอล์ค (u - v walk) ใน G คือลำดับจำกัดของจุดและเส้นที่ปรากฏในลักษณะสลับที่กัน โดยเริ่มต้นด้วยจุด u และสิ้นสุดที่จุด v และทุกๆเส้นจะอินซิเดนท์กับจุดที่อยู่หน้าและหลังเส้นนั้น

ตัวอย่าง 2.8



รูป 2.5

จากกราฟในรูป 2.5 จะได้ว่า $v_4, v_4, v_3, v_3, v_2, v_2, v_2, v_6, v_6, v_6, v_3, v_3, v_3, v_6, v_6$ เป็น v_4 - v_6 วอล์คใน G

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกในการเขียนวอล์ค จะแทนวอล์คด้วยลำดับจำกัดของจุดเพียงอย่างเดียว ดังนั้น v_4 - v_6 วอล์คในรูป 2.5 จะเขียนได้เป็น $v_4, v_3, v_2, v_6, v_3, v_6$

นิยาม 2.12 u - v พาท (u - v path) ในกราฟ G คือ u - v walk ที่มีจุดต่างกัน

ตัวอย่าง 2.9 จากรูป 2.5 จะได้ v_4, v_3, v_6 เป็น v_4 - v_6 พาท

นิยาม 2.13 จะเรียก u - v พาท ที่มี $u = v$ ว่าพาทปิด (closed path)

นิยาม 2.14 จะเรียกพาทปิดซึ่งประกอบด้วยเส้นอย่างน้อย 1 เส้นว่าเซอร์คิต (circuit)

หมายเหตุ 1. รูปใดๆจะเป็นเซอร์คิต และคู่ใดๆของมัลติเพิลเอดจ์ จะประกอบกันเป็นเซอร์คิต

2. จะเรียกเซอร์คิตที่ไม่เป็นรูป หรือ ไม่เป็นคู่ใดๆของมัลติเพิลเอดจ์ว่า ไซเคิล (cycle)

ตัวอย่าง 2.10 จากรูป 2.5 v_1, v_2, v_3, v_6, v_1 เป็นเซอร์คิต

นิยาม 2.15 จะเรียกพารปิดที่ประกอบด้วยเส้นอย่างน้อย 1 เส้นว่าเซอร์คิต (circuit)

นิยาม 2.16 จะเรียก G ว่าเป็นคอนเนคเตดกราฟ (connected) ถ้าทุก 2 จุดใดๆ ในกราฟ G มี พาร (path) เชื่อมอยู่ และจะเรียกกราฟ G ที่ไม่เป็นคอนเนคเตดกราฟว่าดิสคอนเนคเตดกราฟ (disconnected)

หมายเหตุ กราฟที่มี 1 จุด จะเป็นคอนเนคเตดกราฟ

นิยาม 2.17 ถ้า e เป็นเส้นของกราฟ G ซึ่งเมื่อลบเส้นออก จะทำให้กราฟเป็นดิสคอนเนคเตด แล้วเราจะเรียก e ว่าบริดจ์ (bridge)

ตัวอย่าง 2.11

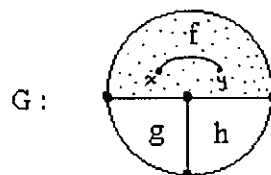


รูป 2.6

จากรูป 2.6 เส้น e จะเรียกว่าบริดจ์

นิยาม 2.18 ถ้า G เป็นคอนเนคเตดกราฟ หน้า (face) ของ G ที่บรรจุจุด x คือเซตของจุด ทั้งหมดในระนาบ ซึ่งสามารถโยงจาก x ไปยัง y ได้โดยไม่ตัดกับเส้นของกราฟ

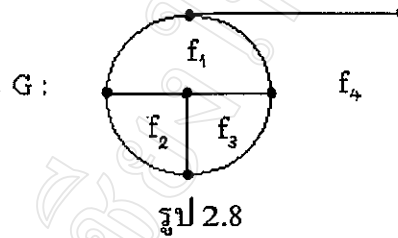
ตัวอย่าง 2.12



รูป 2.7

จากรูป 2.7 จะได้ว่า f เป็นหน้าของกราฟ G และ g กับ h ก็เป็นหน้าของกราฟ G ด้วย

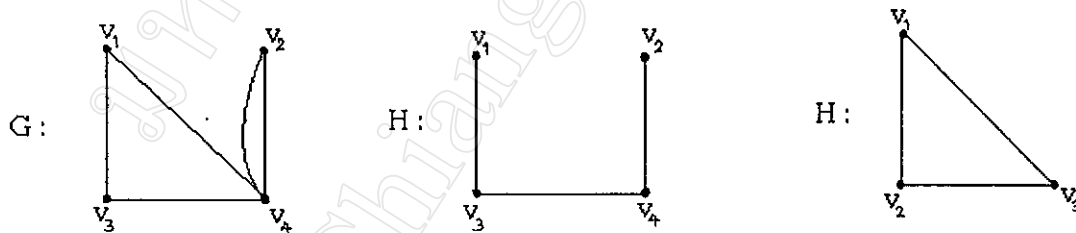
นิยาม 2.19 จะเรียกหน้าที่ไม่จำกัดขอบเขต (unbound) ของ G ว่าหน้าไม่จำกัด (infinite face)
ตัวอย่าง 2.13



จากรูป 2.8 จะเรียก f_4 ว่าหน้าไม่จำกัด (infinite face)

นิยาม 2.20 จะเรียกกราฟ G ว่า 2-คอนเนคเตด (2-connected) ก็ต่อเมื่อ G เป็นคอนเนคเตดกราฟ และ ไม่มีบริดจ์

นิยาม 2.21 จะเรียกกราฟ H ว่าเป็นสับกราฟ (subgraph) ของกราฟ G ถ้าทุกจุดของ H เป็นจุดของ G และทุกเส้นของ H เป็นเส้นของ G
ตัวอย่าง 2.14



รูป 2.9

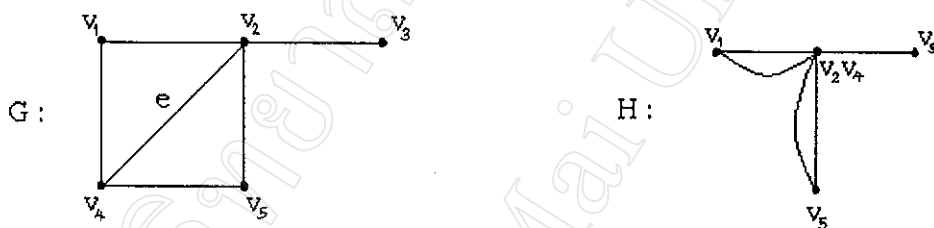
จากรูป 2.9 จะเห็นว่า H_1 และ H_2 เป็นสับกราฟของ G

นิยาม 2.22 สเปนนิ่งสับกราฟ (spanning subgraph) ของ G หมายถึง สับกราฟ H ของ G ซึ่ง $V(G) = V(H)$

ตัวอย่าง 2.15 จากรูป 2.9 จะได้ว่า H_1 เป็นสเปนนิ่งสับกราฟของ G แต่ H_2 ไม่เป็นสเปนนิ่งสับกราฟของ G

นิยาม 2.23 ถ้า e เป็นเส้นใดๆของ G แล้ว การคอนแทรค (contract) เส้น e คือการยกจุด 2 จุด ที่อินซิเดนท์กับเส้น e มาทับกัน

ตัวอย่าง 2.16



รูป 2.10

จากรูป 2.10 กราฟ H เป็นการคอนแทรคเส้น e คือยกจุด v_2 มาทับกับจุด v_4

นิยาม 2.24 ไอโซมอร์ฟิซึม (isomorphism) จากกราฟ G_1 ไปยังกราฟ G_2 จะหมายถึง ฟังก์ชัน

$\theta : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ โดยที่ θ มีคุณสมบัติ 2 ข้อคือ

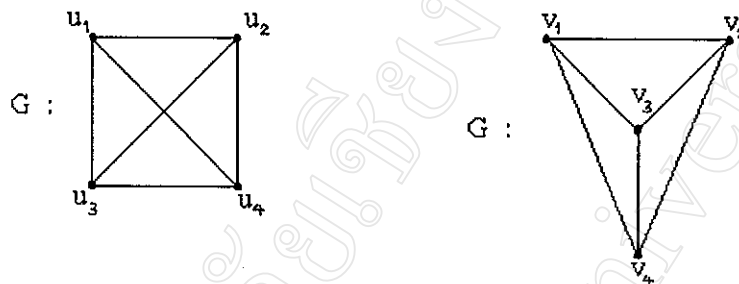
- 1) θ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one) จาก $V(G_1)$ ไปบน (onto) $V(G_2)$
- 2) จุด u และ v จะประชิดกันใน G_1 ก็ต่อเมื่อ จุด $\theta(u)$ และ $\theta(v)$ ประชิดกันใน G_2

หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ถ้า $u, v \in V(G_1)$ แล้ว

$$u, v \in E(G_1) \Leftrightarrow \theta(u), \theta(v) \in E(G_2)$$

นิยาม 2.25 กราฟ G_1 จะไอโซมอร์ฟิก (isomorphic) กับกราฟ G_2 (ใช้สัญลักษณ์ $G_1 \cong G_2$) ก็ต่อเมื่อมี ไอโซมอร์ฟิซึมจาก G_1 ไปยัง G_2

ตัวอย่าง 2.17 พิจารณากราฟ G_1 และ G_2



รูป 2.11

จากรูป 2.11 ถ้าให้ $\theta : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ โดยที่

$$\theta(u_1) = v_1, \theta(u_2) = v_2, \theta(u_3) = v_3, \theta(u_4) = v_4$$

จะได้ว่า θ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(G_1)$ ไปบน $V(G_2)$ และ

$$u_1 u_2 \in E(G_1) \Leftrightarrow \theta(u_1) \theta(u_2) = v_1 v_2 \in E(G_2)$$

$$u_1 u_3 \in E(G_1) \Leftrightarrow \theta(u_1) \theta(u_3) = v_1 v_3 \in E(G_2)$$

$$u_1 u_4 \in E(G_1) \Leftrightarrow \theta(u_1) \theta(u_4) = v_1 v_4 \in E(G_2)$$

$$u_2 u_3 \in E(G_1) \Leftrightarrow \theta(u_2) \theta(u_3) = v_2 v_3 \in E(G_2)$$

$$u_2 u_4 \in E(G_1) \Leftrightarrow \theta(u_2) \theta(u_4) = v_2 v_4 \in E(G_2)$$

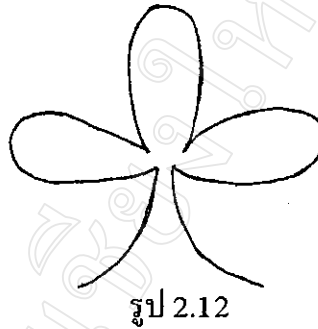
$$u_3 u_4 \in E(G_1) \Leftrightarrow \theta(u_3) \theta(u_4) = v_3 v_4 \in E(G_2)$$

ดังนั้น θ จะเป็นไอโซมอร์ฟิซึมจาก G_1 ไปยัง G_2

นั่นคือ $G_1 \cong G_2$

นิยาม 2.26 เส้นโค้งจอร์แดน (Jordan curve) ในระนาบ คือ เส้นโค้งที่ต่อเนื่อง และไม่ตัดกับเส้นของมันเอง

ตัวอย่าง 2.18



รูป 2.12

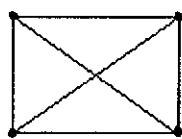
จากรูป 2.12 เป็นเส้นโค้งจอร์แดนในระนาบ

นิยาม 2.27 จะเรียกกราฟ G ว่าสามารถถูกเอมเบด (embed) หรือมีเอมเบดดิงค์ (embedding) ในสเปซที่กำหนดให้ ถ้า G ไอโซมอร์ฟิกกับกราฟที่วาดในสเปซนั้นๆ โดยกราฟที่วาดในสเปซมีจุดซึ่งแทนจุดของ G และมีเส้นเป็นเส้นโค้งจอร์แดนซึ่งแทนเส้นของ G และเส้นโค้งจอร์แดนเหล่านี้จะไม่ตัดกัน

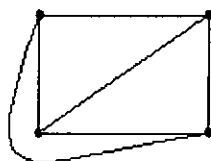
นิยาม 2.28 เพลนกราฟ (plane graph) คือกราฟที่วาดในระนาบ โดยที่เส้นของกราฟไม่ตัดกัน (จะมีเส้นตัดกันตรงจุดของกราฟเท่านั้น)

นิยาม 2.29 พลาเนียร์กราฟ (planar graph) คือกราฟที่ไอโซมอร์ฟิกกับเพลนกราฟรูปใดรูปหนึ่ง หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า คือกราฟที่สามารถถูกเอมเบดในระนาบโดยที่ เอมเบดดิงค์จะเป็นเพลนกราฟ

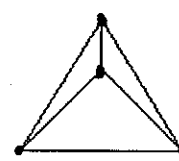
ตัวอย่าง 2.19



(a)



(b)



(c)

รูป 2.13

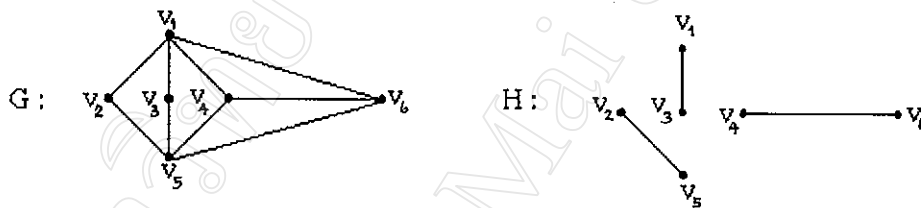
จะเห็นว่า กราฟรูป 2.13(a) 2.13(b) และ 2.13(c) เป็นพลาเนียร์กราฟ และ ไอโซมอร์ฟิกกัน ทั้ง 3 รูป แต่เฉพาะกราฟในรูป 2.13(b) และ 2.13(c) เท่านั้นที่เป็นเพลนกราฟ

นิยาม 2.31 คิวบิกพลาเนียร์กราฟ (cubic planar graph) คือกราฟที่ไอโซมอร์ฟิกกับเพลนกราฟรูปใดรูปหนึ่ง และทุกจุดมีดีกรีเท่ากับ 3

ตัวอย่าง 2.20 กราฟในรูป 2.13(c)

นิยาม 2.32 จะเรียกกราฟ G ว่ามี 1-แฟกเตอร์ ก็ต่อเมื่อ สเปนนิงสับกราฟ H ของ G มีดีกรีของทุกจุดเท่ากับ 1

ตัวอย่าง 2.21

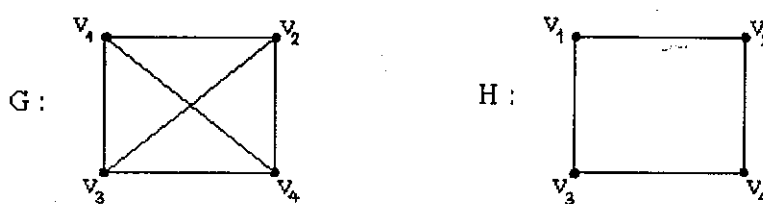


รูป 2.14

จากรูป 2.14 จะเห็นว่า กราฟ H เป็นสเปนนิงสับกราฟของ G ที่ทุกจุดมีดีกรีเท่ากับ 1 ดังนั้น กราฟ G มี 1-แฟกเตอร์

นิยาม 2.33 จะเรียกกราฟ G ว่ามี 2-แฟกเตอร์ ก็ต่อเมื่อ สเปนนิงสับกราฟ H ของ G มีดีกรีของทุกจุดเท่ากับ 2 หรือกล่าวได้ว่า G มีสเปนนิงไซเคิล (spanning cycle)

ตัวอย่าง 2.22



รูป 2.15

จากรูป 2.15 จะเห็นว่ากราฟ H เป็นสเปนนิงสับกราฟของ G ที่ทุกจุดมีดีกรีเท่ากับ 2 ดังนั้นกราฟ G มี 2-แฟกเตอร์

ทฤษฎีบท 2.1 (สูตรของออยเลอร์) ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟ และให้ n, e และ f เป็นจำนวนจุด จำนวนเส้น และจำนวนหน้าของ G ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า

$$n - e + f = 2$$

พิสูจน์

จะพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนจำนวนเส้นของ G

ถ้า $e = 0$ ดังนั้น $p = 1$ (เพราะ G เป็นคอนเนคเตดกราฟ) และ $f = 1$ (เพราะเป็นหน้าไม่จำกัด)

จะได้ว่า $n - e + f = 2$ นั่นคือทฤษฎีบทเป็นจริง

สมมติให้ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง สำหรับทุกกราฟซึ่งมีอย่างมากที่สุดเท่ากับ $e-1$ เส้น

ให้ G เป็นกราฟที่มี e เส้น

- ถ้า G เป็นทรี จะได้ว่า $e = n - 1$ และ $f = 1$

ดังนั้น $n - e + f = 2$

- ถ้า G ไม่เป็นทรี จะให้ q เป็นเส้นที่อยู่ในบางเซอร์คิตของ G

ดังนั้น $G - q$ จะเป็นคอนเนคเตดเพเลนกราฟ ซึ่งมี n จุด $e-1$ เส้น และ $f-1$ หน้า จากสมมติฐานของวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$n - (e-1) + (f-1) = 2$$

นั่นคือ $n - e + f = 2$

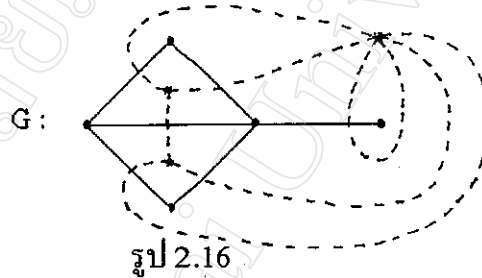
□

หมายเหตุ สูตรของออยเลอร์นี้บางทีจะเรียกว่า สูตรทรงหลายหน้า (polyhedron)

นิยาม 2.34 ถ้า G เป็นเพลนกราฟ แล้วจีโอเมตริก-ควอล (geometric dual) ของ G ซึ่งแทนด้วย G^* จะหมายถึงกราฟที่ถูกสร้างขึ้นตามขั้นตอนต่อไปนี้

- 1) ภายในแต่ละหน้า F_i ของ G จะเลือกจุด n_i^* ให้เป็นจุดของ G^*
- 2) จะหาเส้นสมนัยกับเส้น e ของ G โดยการลากเส้น e^* ผ่านเส้น e (แต่ไม่ตัดกับเส้นอื่นๆ ของ G) และให้เส้น e^* นี้เชื่อมระหว่างจุด n_i^* ซึ่งอยู่ในหน้า F_i ที่มี e เป็นเส้นขอบของหน้าทั้งสอง เส้น e^* เหล่านี้จะเป็นเส้นของ G^*

ตัวอย่าง 2.23



รูป 2.16

จากรูป 2.16 ถ้าเส้นทึบคือเส้นของกราฟ G แล้วจะได้จีโอเมตริกควอลของ G คือ G^* จะประกอบด้วยจุด n_i^* ซึ่งแทนด้วยเครื่องหมายกากบาท และมีเส้น e^* แทนด้วยเส้นประ

ข้อสังเกต ถ้า G บรรจุเส้นที่เป็นบริจ์ แล้ว G^* จะบรรจุนูน และถ้าหน้า 2 หน้าใดๆ ของ G ที่มีเส้นร่วมกันมากกว่า 1 เส้น แล้ว G^* จะบรรจุนูนคิเพิลเอดจ์

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ G เป็นคอนเนคเตดเพลนกราฟที่มี n จุด e เส้น และ f หน้า และให้กราฟควบู่ G^* มี n^* จุด e^* เส้น และ f^* หน้าแล้วจะได้ว่า $n^* = f$, $e^* = e$ และ $f^* = n$

พิสูจน์ จากนิยามของจีโอเมตริก-ควอลกราฟ จะได้ว่า $n^* = f$ และ $e^* = e$

จากสูตรของออยเลอร์ จะได้ว่า $n - e + f = 2$

ดังนั้นกราฟ G จะมี $n - e + f = 2$ และ G^* จะมี $n^* - e^* + f^* = 2$

จะได้ว่า $n - e + f = n^* - e^* + f^*$

นั่นคือ $n = f^*$

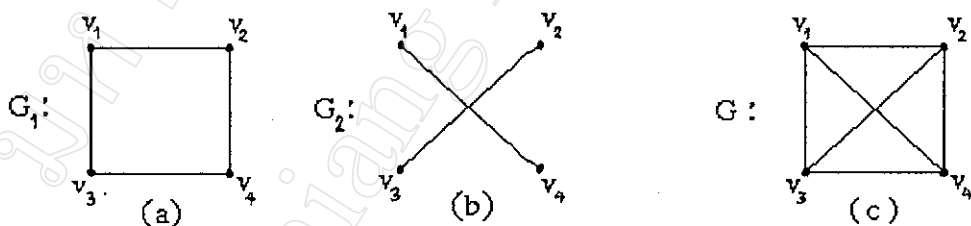
□

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ G เป็นคอนเนคเตดเพลนกราฟ ดังนั้นจะได้ว่า G^{**} ไอโซมอร์ฟิกกับ G
พิสูจน์ จากวิธีการสร้าง G^* จาก G เราสามารถนำมาเป็นวิธีการสร้าง G จาก G^*
 ได้เช่นเดียวกัน และเนื่องจาก $n^{**} = f^* = n$ โดยที่ n^{**} คือจำนวนจุดของ G^{**}
 ดังนั้นจะได้ว่า $G \cong G^{**}$

หมายเหตุ ถ้า G^* มีบริดจ์ แล้วจะได้ว่า G^{**} มีรูปลูก แต่จากทฤษฎีบท 2.3 ได้ว่า
 $G \cong G^{**}$ ดังนั้น ถ้า G^* มีบริดจ์ แล้วจะได้ว่า G มีรูปลูก นั่นคือ ถ้า G ไม่มีรูปลูก
 แล้วจะได้ว่า G^* ไม่มีบริดจ์

นิยาม 2.35 กราฟ G จะเป็นผลรวม (sum) ของกราฟ G_i เมื่อ $i=1,2,3,\dots,a$ เขียนแทนโดย
 $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus \dots \oplus G_a$ ถ้านำทุกเส้นของแต่ละ G_i เมื่อ $i=1,2,3,\dots,a$ มาประกอบกัน โดยที่
 $V(G_i) = V(G)$ เมื่อ $i=1,2,3,\dots,a$

ตัวอย่าง 2.24

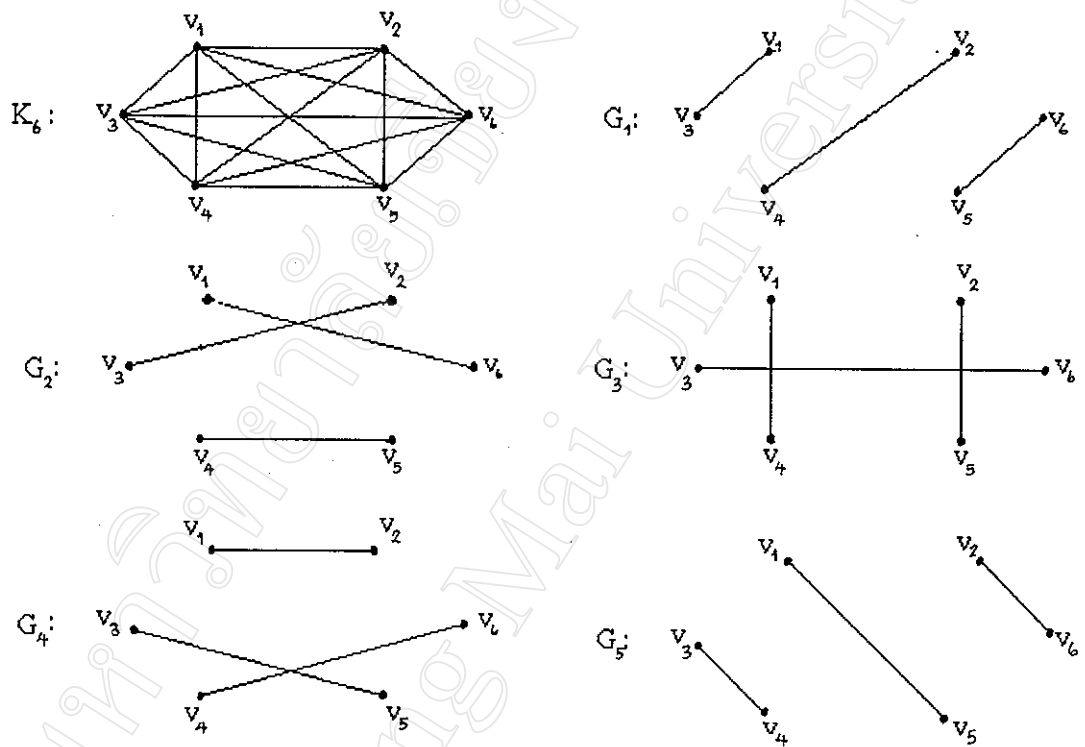


รูป 2.17

จากรูป 2.17 กราฟ G ในรูป 2.17 (c) เป็นการนำเส้นทุกเส้นของกราฟ G_1 และกราฟ G_2
 ในรูป 2.17 (a) และรูป 2.17 (b) มารวมกันโดยที่จำนวนจุดของกราฟ G_1 และกราฟ G_2 เท่ากับ
 จำนวนจุดของกราฟ G หรือเขียนแทนด้วย $G = G_1 \oplus G_2$

นิยาม 2.36 กราฟ G จะถูกเรียกว่า 1-แฟกเตอร์เรเบิล ถ้า G เป็นผลรวมของทุกรูปที่เป็น 1-แฟกเตอร์

ตัวอย่าง 2.25



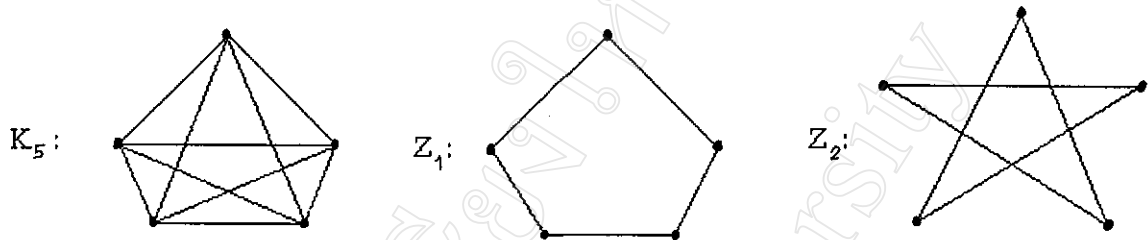
รูป 2.18

จากรูป 2.18 คอมพลีทกราฟ K_6 จะเรียกว่า 1-แฟกเตอร์เรเบิล

เพราะว่า $K_6 = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5$

นิยาม 2.37 กราฟ G จะถูกเรียกว่า 2-แฟกเตอร์เรเบิล (2-factorable) ถ้า G เป็นผลรวมของทุกรูปที่เป็น 2-แฟกเตอร์

ตัวอย่าง 2.26



รูป 2.19

จากรูป 2.19 คอมพลีทกราฟ K_5 จะเรียกว่า 2-แฟกเตอร์เรเบิล

$$\text{เพราะว่า } K_5 = Z_1 \oplus Z_2$$

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้ากราฟ G เป็น 2-คอนเนคตดกราฟ แล้ว จะมี 1-แฟกเตอร์ที่แตกต่างกัน
อย่างน้อย 2 รูป

พิสูจน์ ใน [4] หน้า 85