3 ผลเฉลยของสมการ $x^4 - y^4 = z^4$ ใน Z[i]

การที่จะแสดงว่าสมการ $x^4 - y^4 = z^4$ ไม่มีคำตอบใน Z[i] ที่ $xyz \neq 0$ นั้น จะแสดงว่าสมการ $x^4 - y^4 = z^2$ ไม่มีคำตอบใน Z[i] ที่ $xyz \neq 0$ ก่อน และในการพิสูจน์ $x^4 - y^4 = z^2$ ไม่มีคำตอบใน Z[i] ที่ $xyz \neq 0$ นั้นจำเป็นต้องใช้ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบทใน [3] อ้างอิง ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบท นั้นคือ

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า (α,β,γ) ที่ $\alpha\beta\gamma \neq 0$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + y^2 = z^2$ ใน Z[i] ที่ α,β,γ แต่ละคู่เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน(ต่อไปจะเรียกว่า คำตอบปฐมฐาน) แล้วจะมี δ และ λ ใน Z[i] ที่ δ และ λ มีภาวะตรงกันข้ามและเป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ซึ่ง

$$\alpha = \delta^2 - \lambda^2 \quad , \quad \beta = 2\delta\lambda \ , \gamma = \delta^2 + \lambda^2$$

จากทฤษฎีบทนี้ จะได้ว่า α,γ จะต้องเป็นจำนวนคี่

ทฤษฎีบท 3.2 สมการ $x^4 + y^4 = z^2$ ไม่มีคำตอบใน Z[i] ที่ $xyz \neq 0$

ต่อไปจะแสดงว่า สมการ $x^4 - y^4 = z^2$ ไม่มีคำตอบใน Z[i] ที่ $xyz \neq 0$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3 สมการ $x^4 - y^4 = z^2$ ไม่มีคำตอบใน Z[i] ที่ $xyz \neq 0$

พิสูจน์ สมมุติให้ สมการ $x^4 - y^4 = z^2$ มีคำตอบใน Z[i] ที่ $xyz \neq 0$
กำหนดให้ (α,β,γ) เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - y^4 = z^2$ ใน Z[i] ที่ $\alpha\beta\gamma \neq 0$
และให้ $S = \{ N(\beta) \mid (\alpha,\beta,\gamma)$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - y^4 = z^2$ ใน Z[i] ที่ $\alpha\beta\gamma \neq 0 \}$
จะเห็นได้ว่า S เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเต็มบวกที่ไม่เป็นเซตว่าง ดังนั้น S จะมีสมาชิกตัวที่น้อยที่สุด

ให้ $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - y^4 = z^2$ ใน Z[i] ที่ $\alpha_0\beta_0\gamma_0 \neq 0$ และ $N(\beta_0)$ เป็นสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดใน S

ต่อไปจะแสดงว่า แต่ละคู่ของ $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

พิจารณา ห.ร.ม. ของ α_0 และ β_0

สมมุติว่ามี ρ เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวหารร่วมของ α_0 และ β_0 ดังนั้น $\rho \mid [(\alpha_0)^4-(\beta_0)^4]$ หรือ $\rho \mid (\gamma_0)^2$ จาก ρ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ $\rho \mid \gamma_0$ นั่นคือจะมี $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ ที่ $\alpha_0 = \rho\alpha_1$, $\beta_0 = \rho\beta_1$ และ $\gamma_0 = \rho\gamma_1$ แทนค่าในสมการ $x^4-y^4 = z^2$ จะได้

$$(\rho\alpha_1)^4-(\rho\beta_1)^4 = (\rho\gamma_1)^2$$

หรือ

$$(\alpha_1)^4-(\beta_1)^4 = \left(\frac{\gamma_1}{\rho}\right)^2$$

นั่นคือ $\left(\frac{\gamma_1}{\rho}\right)^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $\frac{\gamma_1}{\rho}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์

นั่นคือ $(\alpha_1,\beta_1,\frac{\gamma_1}{\rho})$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4-y^4 = z^2$ ใน $Z[i]$ ที่ $\alpha_1\beta_1\frac{\gamma_1}{\rho} \neq 0$ เพราะฉะนั้น $N(\beta_1)$ อยู่ใน S แต่ $N(\beta_0) = N(\rho\beta_1) = N(\rho)N(\beta_1) > N(\beta_1)$ ซึ่งขัดแย้งกับ $N(\beta_0)$ เป็นสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดใน S

นั่นคือ α_0 และ β_0 ไม่มีตัวหารร่วมที่เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า α_0 และ β_0 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ในทำนองเดียวกัน จะสามารถแสดงได้ว่า α_0 กับ γ_0 และ β_0 กับ γ_0 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

เพราะฉะนั้น จะสรุปได้ว่า แต่ละคู่ของ $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

จาก $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4-y^4 = z^2$ จะได้ว่า

$$(\alpha_0)^4-(\beta_0)^4 = (\gamma_0)^2 \qquad \text{.............................(*)}$$

หรือ

$$((\alpha_0)^2)^2+(i(\beta_0)^2)^2 = (\gamma_0)^2$$

นั่นคือ $((\alpha_0)^2,i(\beta_0)^2,\gamma_0)$ เป็นคำตอบปฐมฐานของสมการ $x^2+y^2 = z^2$ จะได้ว่า γ_0 เป็นจำนวนคี่ และในทำนองเดียวกัน สมการ (*)สามารถเขียนได้เป็น

$$((\alpha_0)^2)^2 = ((\beta_0)^2)^2 + (\gamma_0)^2$$

นั่นคือ $(\gamma_0, (\beta_0)^2,(\alpha_0)^2)$ เป็นคำตอบปฐมฐานของสมการ $x^2+y^2 = z^2$ จะได้ว่า $(\alpha_0)^2$ เป็นจำนวนคี่ α_0 เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นจาก α_0,γ_0 เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า β_0 ต้องเป็นจำนวนคู่

จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า จะมี δ และ λ ใน $Z[i]$ ที่ δ และ λ มีภาวะตรงกันข้ามและเป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ซึ่ง

$$\gamma_0 = \delta^2 - \lambda^2 \quad , \quad (\beta_0)^2 = 2\delta\lambda \ , (\alpha_0)^2 = \delta^2 + \lambda^2$$

เราสามารถกำหนดให้ δ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น จะได้ $(\delta, 2) = 1$ จาก $(\delta,\lambda) = 1$ จะได้ว่า $(\delta,2\lambda) = 1$
นั่นคือ $$(\beta_0)^2 = 2\delta\lambda = \delta(2\lambda) \ .$$

จาก $Z[i]$ มีคุณสมบัติเป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็มที่มีการแยกตัวประกอบ ออกเป็นจำนวนเฉพาะได้แบบเดียว (Unique Factorization Domain) จะได้ว่า มีสมาชิกหนึ่งหน่วย $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ และจำนวนเต็มเกาส์ φ, κ ที่

$$\delta = \varepsilon_1\varphi^2 \quad \text{และ} \quad 2\lambda = \varepsilon_2\kappa^2$$

จะเห็นได้ว่า κ^2 เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น κ เป็นจำนวนคู่ ให้ $\kappa^2 = (1+i)\upsilon$ บาง υ ที่อยู่ใน $Z[i]$
แทนค่าจะได้ $2\lambda = \varepsilon_2((1+i)\upsilon)^2 = \varepsilon_2 2i\upsilon^2$ หรือ $\lambda = \varepsilon_2 i\upsilon^2$ แทนค่า δ, λ ลงใน

$$(\alpha_0)^2 = \delta^2 + \lambda^2$$

จะได้

$$(\alpha_0)^2 = (\varepsilon_1\varphi^2)^2 + (\varepsilon_2 i\upsilon^2)^2$$
$$= (\varepsilon_1)^2\varphi^4 - (\varepsilon_2)^2\upsilon^4 \quad \text{.............................}(**)$$

จาก $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย จะได้ $(\varepsilon_1)^2 = \pm 1$ และ $(\varepsilon_2)^2 = \pm 1$
พิจารณา ถ้า $(\varepsilon_1)^2 = 1$ และ $(\varepsilon_2)^2 = 1$ สมการ(**) จะกลายเป็น

$$(\alpha_0)^2 = \varphi^4 - \upsilon^4$$

นั่นคือ $(\varphi,\upsilon,\alpha_0)$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - y^4 = z^2$ ใน $Z[i]$ ที่ $\varphi\upsilon\alpha_0 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $N(\upsilon)$ อยู่ใน S

พิจารณา

$$N((\beta_0)^2) = N(2\delta\lambda) = N(2\varepsilon_1\varphi^2\varepsilon_2 i\upsilon^2) = N(2)N(\varepsilon_1)N(\varphi^2)N(\varepsilon_2)N(i)N(\upsilon^2)$$
$$(N(\beta_0))^2 = 4N(\varphi^2)N(\upsilon^2)$$
$$N(\beta_0) = 2N(\varphi)N(\upsilon)$$

จาก $N(\beta_0)$,$N(\varphi)$,$N(\upsilon)$ เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $N(\beta_0) > N(\upsilon)$ ซึ่งขัดแย้งกับ $N(\beta_0)$ จำนวนที่น้อยที่สุดใน S ดังนั้น $(\varepsilon_1)^2 = 1$ และ $(\varepsilon_2)^2 = 1$ จึงเป็นไปไม่ได้
ในกรณีที่ $(\varepsilon_1)^2 = -1$ และ $(\varepsilon_2)^2 = -1$ จะสามารถทำได้คล้ายกับกรณี $(\varepsilon_1)^2 = 1$ และ $(\varepsilon_2)^2 = 1$
ต่อไปพิจารณากรณีที่ $(\varepsilon_1)^2 = 1$ และ $(\varepsilon_2)^2 = -1$ สมการ(**) จะกลายเป็น

$$(\alpha_0)^2 = \varphi^4 + \upsilon^4$$

นั่นคือ $(\varphi,\upsilon,\alpha_0)$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4+y^4=z^2$ ใน $Z[i]$ ที่ $\varphi\upsilon\alpha_0 \neq 0$
ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 3.2

ต่อไปพิจารณากรณีที่ $(\varepsilon_1)^2=-1$ และ $(\varepsilon_2)^2=1$ สมการ(**) จะกลายเป็น

$$(\alpha_0)^2 = -\varphi^4 - \upsilon^4$$

หรือ

$$(i\alpha_0)^2 = \varphi^4 + \upsilon^4$$

นั่นคือ $(\varphi,\upsilon,i\alpha_0)$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4+y^4=z^2$ ใน $Z[i]$ ที่ $\varphi\upsilon i\alpha_0 \neq 0$
ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 3.2

นั่นคือ เราสามารถสรุปได้ว่า สมการ $x^4-y^4=z^2$ ไม่มีคำตอบใน $Z[i]$ ที่ $xyz \neq 0$

□

จากทฤษฎีบทนี้ จะทำให้สามารถสรุปได้ทันทีว่าสมการ $x^4-y^4=z^4$ ไม่มีคำตอบใน $Z[i]$ ที่ $xyz \neq 0$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.4 สมการ $x^4-y^4=z^4$ ไม่มีคำตอบใน $Z[i]$ ที่ $xyz \neq 0$

พิสูจน์ สมมุติว่า (α,β,γ) เป็นคำตอบของสมการ $x^4-y^4=z^4$ ใน $Z[i]$ ที่ $\alpha\beta\gamma \neq 0$ จะได้ว่า (α,β,γ^2) เป็นคำตอบของสมการ $x^4-y^4=z^2$ ใน $Z[i]$ ที่ $\alpha\beta\gamma^2 \neq 0$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 3.3

□

จากทฤษฎีบท 3.2 , ทฤษฎีบท 3.3 และ ทฤษฎีบท 3.4 จะสามารถนำไปพิจารณาคำตอบของสมการต่าง ๆ ต่อไปนี้ได้อีกเช่น

บทแทรก 3.5 สมการ $x^4-y^4=2z^2$ ไม่มีคำตอบใน $Z[i]$ ที่ $xyz \neq 0$

พิสูจน์ สมมุติให้ (α,β,γ) เป็นคำตอบของสมการ $x^4-y^4=2z^2$ ใน $Z[i]$ ที่ $\alpha\beta\gamma \neq 0$

เพราะฉะนั้น จะได้

$$\alpha^4-\beta^4 = 2\gamma^2$$

หรือ

$$(\alpha^4-\beta^4)^2 = (2\gamma^2)^2$$

$$\alpha^8-2\alpha^4\beta^4+\beta^8 = 4\gamma^4$$

$$\alpha^8+2\alpha^4\beta^4+\beta^8 = 4\gamma^4+4\alpha^4\beta^4$$

$$(\alpha^4+\beta^4)^2 = 4(\gamma^4+\alpha^4\beta^4)$$

$$\left(\frac{\alpha^4+\beta^4}{2}\right)^2 = \gamma^4+\alpha^4\beta^4$$

นั่นคือ $\left(\gamma, \alpha\beta, \frac{\alpha^4+\beta^4}{2}\right)$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4+y^4=z^2$ ใน Z[i] จากทฤษฎีบท 3.2

จะได้ว่า $\gamma = 0$ หรือ $\alpha\beta = 0$ หรือ $\frac{\alpha^4+\beta^4}{2} = 0$ แต่ $\gamma \neq 0$ และ $\alpha\beta \neq 0$ ดังนั้นจะได้

$\frac{\alpha^4+\beta^4}{2} = 0$ ซึ่งทำให้ $\alpha^4+\beta^4 = 0$ หรือ $\alpha^4 = -\beta^4$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 2.2

นั่นคือ สมการ $x^4-y^4=2z^4$ ไม่มีคำตอบใน Z[i] ที่ $xyz \neq 0$

□

บทแทรก 3.6 สมการ $x^4+y^4=2z^2$ ไม่มีคำตอบใน Z[i] ที่ $xyz \neq 0$ ยกเว้น $x^4 = y^4 = z^2$

พิสูจน์ สมมุติให้ (α,β,γ) เป็นคำตอบของสมการ $x^4+y^4=2z^2$ ใน Z[i] ที่ $\alpha\beta\gamma \neq 0$

เพราะฉะนั้น จะได้

$$\alpha^4+\beta^4 = 2\gamma^2$$

หรือ

$$(\alpha^4+\beta^4)^2 = (2\gamma^2)^2$$

$$\alpha^8+2\alpha^4\beta^4+\beta^8 = 4\gamma^4$$

$$\alpha^8-2\alpha^4\beta^4+\beta^8 = 4\gamma^4 - 4\alpha^4\beta^4$$

$$(\alpha^4-\beta^4)^2 = 4(\gamma^4 - \alpha^4\beta^4)$$

$$\left(\frac{\alpha^4-\beta^4}{2}\right)^2 = \gamma^4 - \alpha^4\beta^4$$

นั่นคือ $\left(\gamma, \alpha\beta, \frac{\alpha^4-\beta^4}{2}\right)$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4-y^4=z^2$ ใน Z[i] จากทฤษฎีบท 3.3

จะได้ว่า $\gamma = 0$ หรือ $\alpha\beta = 0$ หรือ $\frac{\alpha^4-\beta^4}{2} = 0$ แต่ $\gamma \neq 0$ และ $\alpha\beta \neq 0$ ดังนั้นจะได้

$\frac{\alpha^4-\beta^4}{2} = 0$ ซึ่งทำให้ $\alpha^4-\beta^4 = 0$ หรือ $\alpha^4 = \beta^4$

นั่นคือ $\alpha^4 = \beta^4 = \gamma^2$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4+y^4=2z^2$ ใน Z[i]

□

บทแทรก 3.7 สมการ $\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{y^4} = \dfrac{1}{z^4}$ ไม่มีคำตอบใน $Z[i]$

พิสูจน์ สมมุติให้ (α,β,γ) เป็นคำตอบของสมการ $\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{y^4} = \dfrac{1}{z^4}$ ใน $Z[i]$ เพราะฉะนั้น

จะได้
$$\frac{1}{\alpha^4} - \frac{1}{\beta^4} = \frac{1}{\gamma^4}$$

หรือ
$$(\beta\gamma)^4 - (\alpha\gamma)^4 = (\alpha\beta)^4$$

นั่นคือ $(\beta\gamma, \alpha\gamma, \alpha\beta)$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - y^4 = z^4$ ใน $Z[i]$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 3.4

ดังนั้น สมการ $\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{y^4} = \dfrac{1}{z^4}$ ไม่มีคำตอบใน $Z[i]$

□