2 ความรู้พื้นฐาน

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติบางประการที่จำเป็นต้องรู้จักของจำนวนเต็มเกาส์

เซตของจำนวนเต็มเกาส์ (Gaussian Integers) จะเป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเชิงซ้อน(Complex numbers) มีคุณสมบัติเป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม(Integral Domain) สมาชิกเขียนอยู่ในรูปของ $a+bi$ เมื่อ a,b เป็นจำนวนเต็ม $i=\sqrt{-1}$ และเขียนแทนเซตของจำนวนเต็มเกาส์ด้วย $Z[i]$ สำหรับ α,β ใน $Z[i]$ จะกล่าวว่า α หาร β ลงตัวใน $Z[i]$ ถ้ามี γ ใน $Z[i]$ ที่ $\alpha\gamma=\beta$ และเขียนแทนด้วย $\alpha \mid \beta$ สำหรับ $\alpha=a+bi$ ใน $Z[i]$ ค่าประจำ(norm)ของ α (เขียนแทนด้วย $N(\alpha)$) คือ $N(\alpha)=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ จะเห็นว่า ค่าประจำของจำนวนเต็มเกาส์ใด ๆ จะเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และทุก α,β ใน $Z[i]$ $N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$, ถ้า $\alpha \neq 0$ และ $\alpha \mid \beta$ แล้ว $N(\alpha) \mid N(\beta)$ ในเซตของจำนวนเต็ม จำนวนเต็มเกาส์ ε ใดๆ จะเรียกว่า สมาชิกหนึ่งหน่วย(unit) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มเกาส์ ε'ที่ $\varepsilon\varepsilon'=1$ ซึ่งจะสามารถแสดงต่อไปได้ว่า $N(\varepsilon)=1$ และสมาชิกหนึ่งหน่วยของ $Z[i]$ จะมีเพียง 4 ตัวคือ $1,-1,i,-i$ และ จำนวนเต็มเกาส์ α,β จะเรียกว่า เป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกัน(Associate) ถ้ามีสมาชิกหนึ่งหน่วย ε ใน $Z[i]$ ที่ $\alpha\varepsilon=\beta$ และจะเรียก α ว่าเป็นจำนวนเฉพาะ(Prime) ใน $Z[i]$ ก็ต่อเมื่อ α ไม่เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยและถ้า $\rho \mid \alpha$ ใน $Z[i]$ แล้ว ρ จะเป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยหรือเป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกับ α และ $Z[i]$ จะมีคุณสมบัติเป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็มที่มีการแยกตัวประกอบ ออกเป็นจำนวนเฉพาะได้แบบเดียว (Unique Factorization Domain)

ถ้า $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ จะกล่าวว่า ρ เป็น ห.ร.ม. (Greatest Common Divisor) ของ α กับ β ถ้า $\rho|\alpha$, $\rho|\beta$ และถ้ามี γ ใน $Z[i]$ ที่ $\gamma|\alpha$, $\gamma|\beta$ แล้ว $\gamma|\rho$ ถ้า ห.ร.ม.ของจำนวนเต็มเกาส์ α กับ β เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย เราจะเรียก α กับ β ว่าเป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน(Relatively Prime) ใน $Z[i]$

ในการกำหนดจำนวนเต็มเกาส์คู่และจำนวนเต็มเกาส์คี่นั้น ใน [5] ได้แสดงว่า จำนวนเต็มเกาส์ $a+bi$ หารด้วย $1+i$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $a+b$ หารด้วย 2 ลงตัวในเซตของจำนวนเต็ม และยังพบว่า สำหรับจำนวนเต็มเกาส์ α ใดๆ α หารด้วย $1+i$ ลงตัว หรือ $\alpha -1$ หารด้วย $1+i$ ลงตัว เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น และจะเรียก α ใน $Z[i]$ ที่หารด้วย $1+i$ ลงตัวว่า จำนวนเต็มเกาส์คู่ และเรียก α ใน $Z[i]$ ที่ $\alpha-1$ หารด้วย $1+i$

ลงตัวว่า จำนวนเต็มเกาส์คี่ สำหรับ α, β ใน Z[i] จะเรียก α, β ว่ามีภาวะตรงกันข้าม(opposite Parity) ถ้า α และ β มีจำนวนใดจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนคู่และอีกจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนคี่ และ จะเรียก α, β ว่ามีภาวะเดียวกัน (same Parity) ถ้า α และ β เป็นจำนวนคู่ทั้งสองจำนวนหรือ เป็นจำนวนคี่ทั้งสองจำนวน

จากการกำหนดจำนวนเต็มเกาส์คู่และจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะได้ว่า

1. ผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คู่หรือผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่
2. ผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คู่กับจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่
3. ผลคูณของจำนวนเต็มเกาส์คู่กับจำนวนเต็มเกาส์คู่หรือคี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่
4. ให้ α เป็นจำนวนเต็มเกาส์ใด ๆ

   4.1 ถ้า α^2 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ แล้ว α จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่

   4.2 ถ้า α^2 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ แล้ว α จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่

และจากความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. รากที่สองของ i คือ $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ และ $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
2. รากที่สองของ -i คือ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ และ $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 ให้ α,β เป็นจำนวนเต็มเกาส์ ถ้า $(\frac{\alpha}{\beta})^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ แล้ว $\frac{\alpha}{\beta}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์

พิสูจน์ ให้ α,β เป็นจำนวนเต็มเกาส์ที่ $(\frac{\alpha}{\beta})^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ เราสามารถสมมุติให้ ห.ร.ม. ของ α กับ β เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย จาก $(\frac{\alpha}{\beta})^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ จะมีจำนวนเต็มเกาส์ γ ที่ $\alpha^2 = \gamma\beta^2$ นั่นคือ $\beta|\alpha^2$ จาก ห.ร.ม. ของ α กับ β เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย จะได้ $\beta|\alpha$

เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{\beta}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์

□

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2 ไม่มีจำนวนเต็มเกาส์ α,β ที่ไม่ใช่ศูนย์ซึ่ง $\alpha^4 = -\beta^4$

พิสูจน์ สมมุติว่ามีจำนวนเต็มเกาส์ α,β ที่ไม่ใช่ศูนย์ซึ่ง $\alpha^4 = -\beta^4$ เพราะฉะนั้น $\alpha^4 + \beta^4 = 0$ หรือ $\alpha^4 - i^2\beta^4 = 0$ จะได้ว่า $(\alpha^2 + i\beta^2)(\alpha^2 - i\beta^2) = 0$ เพราะฉะนั้น $(\frac{\alpha}{\beta})^2 = i$ หรือ $(\frac{\alpha}{\beta})^2 = -i$

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ $\frac{\alpha}{\beta}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ ซึ่งขัดแย้งกับ รากที่สองของ $\pm i$ มีส่วนจริงและส่วนจินตภาพเป็นจำนวนอตรรกยะ

นั่นคือสรุปได้ว่า ไม่มีจำนวนเต็มเกาส์ α,β ที่ไม่ใช่ศูนย์ซึ่ง $\alpha^4 = -\beta^4$

$\square$