บทนำ

ในปี ค.ศ. 1974 Chen และ Hsieh [1] ได้ศึกษาเซมิกรุปผกผันที่แยกแฟกเตอร์ได้ และในปี ค.ศ. 1979 ยุพาภรณ์ ถิระศุภะ [5] และ ค.ศ. 1981 ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์ [3] ได้ศึกษาเซมิกรุปของการแปลงที่แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย โดยในงานวิจัย [5] ได้ผลสรุปว่า เซมิกรุปของการแปลงบนเซต X จะแยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย ก็ต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด ในงานวิจัยชิ้นนี้คณะผู้วิจัยได้ศึกษาการแยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้ายของเซมิกรุปของการแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ V บนสนาม F ใดๆ ซึ่งได้ผลสรุปว่า เซมิกรุปของการแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ V บนสนาม F จะแยกแฟกเตอร์ทางซ้ายได้หรือไม่ขึ้นกับ มิติของปริภูมิเวกเตอร์ V

ในรายงานการวิจัยนี้จะเสนอความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในบทที่ 1 ส่วนในบทที่ 2 จะเป็นผลลัพธ์ที่สำคัญของงานวิจัยนี้ ซึ่งเป็นการให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของเซมิกรุปของการแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ V บนสนาม F ใดๆที่ทำให้เป็นเซมิกรุปที่แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

1. ความรู้พื้นฐาน

ให้ S เป็นเซมิกรุป เซตย่อย G ของ S จะเรียกว่ากรุปย่อย (subgroup) ของ S ถ้า G เป็นกรุป (group) ภายใต้การดำเนินการทวิภาค (binary operation) เดียวกันของ S สำหรับสมาชิก a ของ S จะเรียกว่า ไอเดมโพเทนต์ (idempotent) ถ้า $a^2 = a$ และให้ $E(S)$ คือเซตของไอเดมโพเทนต์ทั้งหมดของ S นั่นคือ $E(S) = \{a \in S \mid a^2 = a\}$ สมาชิก e ของ S จะเรียกว่าเอกลักษณ์ทางซ้าย (left identity) ถ้า $es = s$ ทุกสมาชิก $s \in S$ และจะ เรียกว่าเอกลักษณ์ทางขวา (right identity) ถ้า $se = s$ ทุกสมาชิก $s \in S$ สมาชิกของ S จะเรียกว่าเอกลักษณ์ (identity) ถ้าเป็นทั้งเอกลักษณ์ทางซ้ายและเอกลักษณ์ทางขวา ให้ S เป็นเซมิกรุปที่มีเอกลักษณ์ 1 และ $G = \{ a \in S \mid ab = ba = 1$ สำหรับบาง $b \in S \}$ จะได้ว่า G เป็นกรุปย่อยที่ใหญ่ที่สุดของ S ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ และเรียก G ว่ากรุปหนึ่งหน่วย (unit group)ของ S

ให้ S เป็นเซมิกรุป จะเรียก S ว่าแยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย ถ้ามีกรุปย่อย G ของ S ซึ่ง $S = GE(S)$ เห็นได้ชัดว่าทุกกรุปแยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย ให้ $S = [0,1]$ จะได้ว่า $(S,\min)$ และ $(S,\max)$ เป็นเซมิกรุปที่แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

<u>ทฤษฎีบทประกอบ 1</u> ถ้าเซมิกรุป S แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้ายเป็น $S = GE(S)$ แล้ว G จะเป็นกรุปย่อยใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ S และถ้า S มีเอกลักษณ์ 1 จะได้ว่า G เป็นกรุปหนึ่งหน่วยของ S

พิสูจน์ ดูใน [5]

ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Space)

ในงานวิจัยนี้จะให้ V แทนปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม(field) F ใดๆ เซตย่อยจำกัด $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ ของ V จะเรียกว่าอิสระต่อกันในตัวเอง (linearly independent) ถ้า $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots +a_nx_n = 0$ แล้ว $a_i = 0$ ทุก $i = 1,2,3, \ldots,n$ และ $a_i \in F$ ในกรณีทั่วไปเซตย่อย $\{e_i \mid i \in I\}$ จะเรียกว่าอิสระต่อกันในตัวเองถ้าทุกเซตย่อยจำกัดของ $\{e_i \mid i \in I\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง เซตย่อย $\{e_i \mid i \in I\}$ ของ V จะเรียกว่ามูลฐาน (basis) ของ V ถ้า $\{e_i \mid i \in I\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเองใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม (maximal linearly independent set) และเรียก $|\{e_i \mid i \in I\}|$ จำนวนเชิงการนับ (cardinal number) ของ เซตมูลฐานว่า มิติ (dimension) ของปริภูมิเวกเตอร์ V และเขียนแทนด้วย $\dim V$ ต่อไปจะใช้สัญลักษณ์ $\{e_i\}$

แทน$\{e_i \mid i \in I\}$ ถ้า S เป็นเซตย่อยของ V ปริภูมิย่อยของ V ที่ก่อกำเนิดโดยเซต S จะเขียนแทนด้วย $\langle S\rangle$ เป็นปริภูมิย่อยของ V ที่เล็กที่สุดที่มี S เป็นเซตย่อย ซึ่งสมาชิกของ $\langle S\rangle$ จะอยู่ในรูปผลบวกเชิงเส้นแบบจำกัดของสมาชิกของ S ถ้า $\{e_i\}$ เป็นมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ V แล้ว $V = \langle\{e_i\}\rangle$ และสมาชิกของ V จะเขียนอยู่ในรูปผลบวกเชิงเส้นแบบจำกัดของสมาชิกของ $\{e_i\}$ ได้เพียงแบบเดียวกล่าวคือ สำหรับ $v \in V$ จะมีสเกล่าร์ $a_1, a_2, \ldots a_n$ เพียงชุดเดียวที่ $v = a_1e_{i_1}+a_2e_{i_2}+\ldots+a_ne_{i_n}$ [ดูใน [4] หน้า 200] เพื่อความสะดวกจะใช้สัญลักษณ์ Σa_ie_i แทนผลบวก เชิงเส้นแบบจำกัดดังกล่าว

ถ้า A และ B เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V จะกล่าวว่า V เป็นผลบวกตรง (direct sum) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $V = A\oplus B$ ถ้า $V = A+B$ และ $A \cap B = \{0\}$

ถ้า $\{e_i\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเองใน V จะสามารถขยาย $\{e_i\} \cup \{e_j\}$ เป็นมูลฐานของ V [Theorem A. หน้า 197 ใน [4]]

การแปลงเชิงเส้น (Linear Transformations)

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนามใดๆ ฟังก์ชัน α จาก V ไปยัง V จะเรียกว่าการแปลงเชิงเส้น ถ้า $(x+y)\alpha = x\alpha + y\alpha$ และ $(ax)\alpha = a(x\alpha)$ สำหรับเวกเตอร์ x, y และสเกล่าร์ a ($x\alpha$ คือค่าของ αที่ x เป็นสัญลักษณ์ที่นิยมใช้ใน เซมิกรุป) ให้ L(V) แทนเซตของการแปลงเชิงเส้นทั้งหมดใน V

นั่นคือ $L(V) = \{ \alpha \mid \alpha$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง V $\}$

จะได้ว่า L(V) ภายใต้คอมโพสิตฟังก์ชัน จะเป็นเซมิกรุปที่มีเอกลักษณ์ 1_V ซึ่งจะเขียน 1 แทน 1_V ฟังก์ชันเอกลักษณ์บน V ต่อไปสัญลักษณ์ α,β,γ จะแทนสมาชิกของ L(V) x, y, e จะแทนเวกเตอร์ และ a, b, c จะแทนสเกล่าร์ สำหรับ $\alpha \in L(V)$ ให้ ker α แทน เคอเนอของ α และ Im α แทนอิมเมจ α จะเห็นว่า ker α และ Im α เป็นปริภูมิย่อยของ V

ให้ $GL(V) = \{ \alpha \in L(V) \mid \alpha$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ onto $\}$ จะได้ว่า GL(V) เป็นกรุปย่อยหนึ่งหน่วยของ L(V) ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์

ทฤษฎีบทต่อไปจะให้ลักษณะของการแปลงเชิงเส้นที่เป็นไอเดมโพเทนต์

<u>ทฤษฎีบทประกอบ 2</u> ให้ $\alpha \in L(V)$ จะได้ว่า $\alpha^2 = \alpha$ ก็ต่อเมื่อ $x\alpha = x$ ทุกเวกเตอร์ $x \in \text{Im}\,\alpha$

พิสูจน์ ให้ $\alpha \in L(V)$

ถ้า $\alpha^2 = \alpha$ แล้วจะได้ว่า สำหรับ $x \in \text{Im}\,\alpha$ จะมี $x' \in V$ ที่ $x'\alpha = x$ ทำให้

$$x\alpha = ((x'\alpha)\alpha) = x'\alpha^2 = x'\alpha = x$$

นั่นคือ $x\alpha = x$ ทุกเวกเตอร์ $x \in \operatorname{Im} \alpha$

สมมติให้ $x\alpha = x$ ทุกเวกเตอร์ $x \in \operatorname{Im} \alpha$ จะได้ว่า สำหรับ x ใดๆใน V $x\alpha \in \operatorname{Im} \alpha$ ทำให้ $(x\alpha)\alpha = x\alpha$ นั่นคือ $\alpha^2 = \alpha$ ❑

จากทฤษฎีบทประกอบนี้ทำให้ได้ว่า

$E(L(V)) = \{ \alpha \in L(V) \mid x\alpha = x \quad \forall x \in \operatorname{Im} \alpha \}$

<u>**ทฤษฎีบทประกอบ 3**</u> ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ $B = \{e_i\}$ เป็นมูลฐานของ V และ α เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง V จะมีการแปลงเชิงเส้น α' จากV ไปยัง V เพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้นที่ $e_i\alpha' = e_i\alpha$ ทุกค่า i

พิสูจน์ ให้ α เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง V กำหนดฟังก์ชัน $\alpha' : V \to V$ โดย

สำหรับ $x = \Sigma a_i e_i \in V$ ให้ $x\alpha' = \Sigma a_i(e_i\alpha)$

เห็นได้ชัดว่า $e_i\alpha' = e_i\alpha$ ทุก i สำหรับ $x = \Sigma a_i e_i$, $y = \Sigma b_i e_i$ ใน V และสเกลาร์ a, b จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(ax+by)\alpha' &= (a\Sigma a_i e_i + b\Sigma b_i e_i)\alpha' \\
&= (\Sigma(aa_i + bb_i)e_i)\alpha' \\
&= \Sigma(aa_i + bb_i)(e_i\alpha) \\
&= a(\Sigma a_i(e_i\alpha)) + b(\Sigma b_i(e_i\alpha)) \\
&= a(x\alpha') + b(y\alpha')
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\alpha' \in L(V)$

สมมติว่า β เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง V ที่ $e_i\beta = e_i\alpha$ ทุก i จะได้ว่า สำหรับ $x = \Sigma a_i e_i \in V$

$$x\beta = (\Sigma a_i e_i)\beta = \Sigma a_i(e_i\beta) = \Sigma a_i(e_i\alpha) = x\alpha'$$

นั่นคือ $\beta = \alpha'$ ❑

<u>**ทฤษฎีบทประกอบ 4**</u> ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด และ $\alpha \in L(V)$ ให้ $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_m\}$ เป็นมูลฐานของ $\operatorname{Im} \alpha$ สำหรับแต่ละ i เลือก $d_{x_i} \in V$ ซึ่ง $d_{x_i}\alpha = x_i$ จะได้ว่า $A = \{ d_{x_1}, d_{x_2}, d_{x_3}, \ldots , d_{x_m}\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง และ $V = \langle A \rangle \oplus \ker \alpha$

พิสูจน์ ถ้า $\Sigma a_i d_{x_i} = 0$ แล้วจะได้ $0 = 0\alpha = (\Sigma a_i d_{x_i})\alpha = \Sigma a_i(d_{x_i}\alpha) = \Sigma a_i x_i$

เนื่องจาก $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_m\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ทำให้ $a_i = 0$ ทุก i นั่นคือ A เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง

ต่อไปจะแสดงว่า $V = \langle A \rangle \oplus \ker \alpha$ ให้ $x \in V$ ดังนั้น $x\alpha \in \operatorname{Im} \alpha$ ทำให้

$$x\alpha = \Sigma a_i x_i = \Sigma a_i (d_{x_i} \alpha)$$

ดังนั้น $x - \Sigma a_i d_{x_i} \in \ker \alpha$

และทำให้ได้ว่า $x = \Sigma a_i d_{x_i} + (x - \Sigma a_i d_{x_i}) \in \langle A \rangle + \ker \alpha$

เนื่องจาก $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_m\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ทำให้ $\langle A \rangle \cap \ker \alpha = \{0\}$

นั่นคือ $V = \langle A \rangle \oplus \ker \alpha$ ❑

2. ผลลัพธ์ที่สำคัญ (Main Results)

ผลลัพธ์ที่สำคัญของการวิจัยนี้ จะเป็นการศึกษาถึงลักษณะของปริภูมิเวกเตอร์ V ว่าเมื่อไหร่ถึงจะทำให้ L(V) แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

เนื่องจาก L(V) เป็นเซมิกรุปที่มี GL(V) เป็นกรุปย่อยหนึ่งหน่วย ดังนั้นโดยทฤษฎีบทประกอบ 1 จะได้ว่า L(V) แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย ก็ต่อเมื่อ L(V) = GL(V)E(L(V))

ทฤษฎีบท 1 ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด แล้ว L(V) จะแยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

พิสูจน์ ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัดสมมติว่าเป็น n จะแสดงว่า L(V) = GL(V)E(L(V)) โดยที่ GL(V) และ E(L(V)) เป็นกรุปย่อยหนึ่งหน่วยและ เซตของไอเดมโพเทนต์ทั้งหมดของ V ตามลำดับ

ให้ $\alpha \in L(V)$ และเลือก $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_m\}$ เป็นมูลฐานของ $\operatorname{Im}\alpha$

สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$ เลือก $d_{x_i} \in V$ ซึ่ง $d_{x_i}\alpha = x_i$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 4 จะได้ว่า $A = \{d_{x_1}, d_{x_2}, d_{x_3}, \ldots, d_{x_m}\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง และ $V = \langle A\rangle \oplus \ker\alpha$ ให้ $\{y_1, y_2, y_3, \ldots y_k\}$ เป็นมูลฐานของ $\ker\alpha$ จะได้ว่า

$$B_1 = \{d_{x_1}, d_{x_2}, d_{x_3}, \ldots, d_{x_m}\} \cup \{y_1, y_2, y_3, \ldots y_k\}$$

เป็นมูลฐานชุดหนึ่งของ V

เนื่องจาก $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_m\}$ เป็นมูลฐานของ $\operatorname{Im}\alpha$ จะสามารถขยาย

$$B_2 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_m\} \cup \{z_1, z_2, z_3, \ldots z_k\}$$

เป็นมูลฐานของ V

กำหนดฟังก์ชัน $\gamma: B_1 \to B_2$ โดย

$d_{x_i}\gamma = x_i$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$

$y_i\gamma = z_i$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,3,\ldots,k\}$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3 จะมีการแปลงเชิงเส้น γ' จาก V ไปยัง V ซึ่ง

$d_{x_i}\gamma' = x_i$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$

$y_i\gamma' = z_i$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,3,\ldots,k\}$

เนื่องจาก B_1 และ B_2 เป็นมูลฐานของ V และ $\gamma: B_1 \to B_2$ เป็น 1-1 และ onto จะได้ว่า γ' เป็น 1-1 และ onto นั่นคือ $\gamma' \in GL(V)$ กำหนดฟังก์ชัน $\beta: B_2 \to \operatorname{Im}\alpha$ โดย

$x_i\beta = x_i$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$

$$z_i\beta = 0 \quad \text{สำหรับแต่ละ } i \in \{1,2,3,\ldots,k\}$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3 จะมีการแปลงเชิงเส้น β' จาก V ไปยัง Im α ซึ่ง

$$x_i\beta' = x_i \quad \text{สำหรับแต่ละ } i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$$

$$z_i\beta' = 0 \quad \text{สำหรับแต่ละ } i \in \{1,2,3,\ldots,k\}$$

เห็นได้โดยง่ายว่า สำหรับ $v \in \mathrm{Im}\,\alpha$, $v\beta' = v$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 2 จะได้ว่า $\beta' \in E(L(V))$

ต่อไปจะแสดงว่า $\alpha = \gamma\beta'$ ให้ $x \in V$ เนื่องจาก $B_1 = \{d_{x_1}, d_{x_2}, d_{x_3}, \ldots, d_{x_m}\} \cup \{y_1, y_2, y_3, \ldots y_k\}$ เป็นมูลฐานชุดหนึ่งของ V ดังนั้น $x = \Sigma a_i d_{x_i} + \Sigma b_j y_j$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x\alpha &= (\Sigma a_i d_{x_i} + \Sigma b_j y_j)\alpha \\ &= \Sigma a_i d_{x_i}\alpha + \Sigma b_j y_j \alpha \\ &= \Sigma a_i x_i + 0 \\ &= \Sigma a_i x_i \beta' + \Sigma b_j z_j \beta' \\ &= \Sigma a_i d_{x_i}\gamma\beta' + \Sigma b_j y_j \gamma\beta' \\ &= (\Sigma a_i d_{x_i} + \Sigma b_j y_j)\gamma\beta' \\ &= x\gamma\beta' \end{aligned}$$

นั่นคือ $\alpha = \gamma\beta' \in GL(V)E(L(V))$ แต่เนื่องจาก $GL(V)$ และ $E(L(V))$ ต่างก็เป็นเซตย่อยของ $L(V)$ ดังนั้น $L(V) = GL(V)E(L(V))$ ❑

<u>**ทฤษฎีบท 2**</u> ถ้า L(V) แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย แล้ว V มีมิติจำกัด

พิสูจน์ ให้ L(V) แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย จะแสดงว่า V มีมิติจำกัด

สมมติว่าไม่จริง นั่นคือ V มีมิติอนันต์ ให้ $B = \{e_i\}$ เป็นมูลฐานของ V ดังนั้น $|B| \geq \aleph_0$ เมื่อ $\aleph_0$ คือจำนวนเชิงการนับของจำนวนเต็มบวก เลือก $e_0 \in B$ เนื่องจาก B เป็นเซตอนันต์ จะได้ว่า $|B| = |B-\{e_0\}|$ ดังนั้นจะมีฟังก์ชัน α ซึ่งเป็น 1-1 และ onto จาก Bไปยัง $B-\{e_0\}$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 3 จะสามารถขยายฟังก์ชัน α ขึ้นเป็นการแปลงเชิงเส้น α' จาก Vไปยัง V นั่นคือ $\alpha' \in L(V)$ เนื่องจาก L(V) แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย เป็น $L(V) = GL(V)E(L(V))$ ทำให้ $\alpha' = \gamma\beta$ บางค่า $\gamma \in GL(V)$ และ $\beta \in E(L(V))$ เนื่องจากฟังก์ชัน α เป็น 1-1 และ B เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง จะทำให้การแปลงเชิงเส้น α' เป็น 1-1 ด้วย ดังนั้น $\beta = \gamma^{-1}\alpha'$ จะเป็น 1-1 สำหรับ $v \in V$ จะได้ว่า $v\beta^2 = v\beta$ ทำให้ $v\beta = v$ นั่นคือ β เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน V เป็นผลให้ $\alpha' = \gamma \in GL(V)$

เนื่องจาก $e_0 \in V = \text{Im } \gamma = \text{Im } \alpha'$ ดังนั้นจะมี $v_0 \in V$ ซึ่ง $v_0\alpha' = e_0$ เนื่องจาก B เป็นมูลฐานของ V ดังนั้น $v_0 = \Sigma a_i e_i$ ทำให้

$$e_0 = v_0\alpha' = (\Sigma a_i e_i)\alpha' = \Sigma a_i(e_i\alpha') = \Sigma a_i(e_i\alpha) = \Sigma a_i e_j$$

เมื่อ $e_j = e_i\alpha \in B-\{e_0\}$ ซึ่งขัดแย้งกับ B เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง

ดังนั้น V มีมิติจำกัด □

<u>ทฤษฎีบท 3</u> L(V) จะแยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย ก็ต่อเมื่อ V มีมิติจำกัด

พิสูจน์ ได้จากทฤษฎีบทที่ 1 และ ทฤษฎีบทที่ 2 □

สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะเห็นว่า $\Re^n$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนจำนวนจริงที่มีมิติ n ดังนั้น โดย ทฤษฎีบทที่ 3 เราจะได้ว่า $L(\Re^n)$ แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

<u>บทแทรก</u> $L(\Re^n)$ แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้ายสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

□