

บทที่ 4

การแยกแฟกเตอร์ใน U_X, V_X, W_X และ $L(V)$

ในบทนี้จะเป็นการศึกษาการแยกแฟกเตอร์ใน U_X, V_X, W_X และ $L(V)$ เนื่องจากถึงกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้ายไม่จำเป็นต้องแยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา และในบทที่ 3 ได้แสดงแล้วว่า U_X, V_X และ W_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้ายต่อไปจะเป็นการแสดงให้เห็นว่า U_X, V_X, W_X และ $L(V)$ แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา ซึ่งเป็นงานหลักของการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้

ทฤษฎีบท 4.1 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า U_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา

พิสูจน์ : ให้ X เป็นเซตใด ๆ และ $\alpha \in U_X$ ให้ $A = S(\alpha) \cup S(\alpha)\alpha$

จะได้ว่า $|A| < \infty$ ให้ β เป็นฟังก์ชันจำกัดของ α โดยที่ $\Delta\beta = \Delta\alpha \cap A$

จะได้ว่า $\beta \in P_A$ และ $\nabla\beta = S(\alpha)\alpha$ โดยทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า $\beta = \gamma\lambda$

สำหรับบางสมาชิก γ ใน $E(P_A)$ และ λ ใน G_A ดังนั้น $\Delta\gamma = \Delta\beta\lambda^{-1} =$

$$(\nabla\beta \cap \Delta\lambda^{-1})\beta^{-1} = (\nabla\beta \cap A)\beta^{-1} = (\nabla\beta)\beta^{-1} = \Delta\beta$$

นิยาม $\gamma : \Delta\alpha \rightarrow X$ กำหนดการส่งโดย

$$x\gamma = \begin{cases} x\gamma & \text{ถ้า } x \in A \\ x & \text{ถ้า } x \in \Delta\alpha \setminus A \end{cases}$$

เนื่องจาก $\nabla\gamma \subseteq \Delta\gamma$ และ $x\gamma = x$ ทุกสมาชิก x ใน $\nabla\gamma$ จะได้ว่า $\nabla\gamma' \subseteq \Delta\gamma'$

และ $x\gamma' = x$ ทุกสมาชิก x ใน $\nabla\gamma'$ นอกจากนี้ยังได้ว่า

$$|S(\gamma')| = |S(\gamma)| < \infty \text{ เพราะฉะนั้น } \gamma' \in E(U_X)$$

นิยาม $\lambda' : X \rightarrow X$ กำหนดการส่งโดย

$$x\lambda' = \begin{cases} x\lambda & \text{ถ้า } x \in \Delta\lambda \\ x & \text{ถ้า } x \in X \setminus \Delta\lambda \end{cases}$$

เนื่องจาก λ เป็นการแปลงชนิด 1-1 แบบทั่วถึง และโดยนิยามของ λ'

จะได้ว่า $\lambda' \in G_X$ และเพราะว่า $S(\lambda') = S(\lambda)$ ดังนั้น $\lambda' \in G_X \cap U_X$

โดยนิยามของ γ' และ λ' จะได้ว่า $\Delta\gamma'\lambda' = (\nabla\gamma' \cap \Delta\lambda')\gamma'^{-1}$

$= (\nabla\gamma' \cap X)\gamma'^{-1} = (\nabla\gamma')\gamma'^{-1} = \Delta\gamma' = \Delta\alpha$ ให้ $x \in \Delta\alpha = \Delta\gamma'\lambda'$
 ถ้า $x \in A$ จะได้ว่า $x\alpha = x\beta = x(\gamma\lambda) = (x\gamma)\lambda = (x\gamma)\lambda' = (x\gamma')\lambda' = x(\gamma'\lambda')$
 และถ้า $x \in \Delta\alpha \setminus A$ จะได้ว่า $x \in \Delta\alpha \setminus S(\alpha)$ และ $x \in X \setminus A$
 ดังนั้น $x\gamma' = x$, $x\alpha = x$ และ $x\gamma' = x$ ซึ่งทำให้ $x\gamma'\lambda' = x\lambda' = x = x\alpha$
 เพราะฉะนั้น $\alpha = \gamma'\lambda' \in E(U_X)(G_X \cap U_X)$ นั่นคือ $U_X \subseteq E(U_X)(G_X \cap U_X)$
 ทำให้ $U_X = E(U_X)(G_X \cap U_X)$ จึงได้ว่า U_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา

□

บทแทรก 4.2 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า V_X และ W_X
 แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา

พิสูจน์ : ให้ X เป็นเซตใด ๆ

(1) จะแสดงว่า V_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา ให้ $\alpha \in V_X$
 ดังนั้น $\alpha \in U_X$ โดยทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $\alpha = \gamma\lambda$ สำหรับบางสมาชิก
 γ ใน $E(U_X)$ และ λ ใน $G_X \cap U_X = G_X \cap V_X$ ดังนั้น $\Delta\gamma = \Delta\alpha\lambda^{-1}$
 $= (\nabla\alpha \cap \Delta\lambda^{-1})\alpha^{-1} = (\nabla\alpha \cap X)\alpha^{-1} = (\nabla\alpha)\alpha^{-1} = \Delta\alpha = X$
 ทำให้ $\gamma \in E(V_X)$ เพราะฉะนั้น $\alpha = \gamma\lambda \in E(V_X)(G_X \cap V_X)$
 นั่นคือ $V_X \subseteq E(V_X)(G_X \cap V_X)$ ซึ่งทำให้ $V_X = E(V_X)(G_X \cap V_X)$
 จึงได้ว่า V_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา

(2) จะแสดงว่า W_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา
 ให้ $\alpha \in W_X$ ดังนั้น $\alpha \in U_X$ โดยทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $\alpha = \gamma\lambda$
 สำหรับบางสมาชิก γ ใน $E(U_X)$ และ λ ใน $G_X \cap U_X = G_X \cap W_X$
 ดังนั้น $\gamma = \alpha\lambda^{-1}$ เป็นการแปลงชนิด 1-1 ทำให้ $\gamma \in E(W_X)$
 เพราะฉะนั้น $\alpha = \gamma\lambda \in E(W_X)(G_X \cap W_X)$ นั่นคือ $W_X \subseteq E(W_X)(G_X \cap W_X)$
 ซึ่งทำให้ $W_X = E(W_X)(G_X \cap W_X)$ จึงได้ว่า W_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา

□

บทแทรก 4.3 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า U_X, V_X และ W_X แยกแฟกเตอร์ได้

พิสูจน์ : โดยทฤษฎีบท 3.9 และทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า U_X แยกแฟกเตอร์ได้ และโดยบทแทรก 3.10 และบทแทรก 4.2 จะได้ว่า V_X และ W_X แยกแฟกเตอร์ได้

□

ทฤษฎีบทประกอบ 4.4 : ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด และ $\alpha \in L(V)$ ให้ $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ เป็นมูลฐานของ V สำหรับแต่ละ i ใน $\{1, 2, \dots, m\}$ เลือก $d_{x_i} \in V$ ซึ่ง $d_{x_i} \alpha = x_i$ จะได้ว่า $D = \{d_{x_1}, d_{x_2}, \dots, d_{x_m}\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง และ $V = \langle D \rangle \oplus \text{Ker } \alpha$

พิสูจน์ : ถ้า $\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} = 0$ แล้วจะได้ $0 = 0\alpha = (\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i})\alpha = \sum_{i=1}^m a_i (d_{x_i} \alpha) = \sum_{i=1}^m a_i x_i$ เนื่องจาก $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง จึงทำให้ $a_i = 0$ ทุก ๆ i นั่นคือ D เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง

ต่อไปจะแสดงว่า $V = \langle D \rangle \oplus \text{Ker } \alpha$ ให้ $x \in V$ ดังนั้น $x\alpha \in V\alpha$

ทำให้ $x\alpha = \sum_{i=1}^m a_i x_i = \sum_{i=1}^m a_i (d_{x_i} \alpha)$ ดังนั้น $x - \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} \in \text{Ker } \alpha$

และทำให้ได้ว่า $x = \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + (x - \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i}) \in \langle D \rangle + \text{Ker } \alpha$

เนื่องจาก $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง

ทำให้ $\langle D \rangle \cap \text{Ker } \alpha = \{0\}$ นั่นคือ $V = \langle D \rangle \oplus \text{Ker } \alpha$

□

ทฤษฎีบท 4.5 : ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F จะได้ว่า $L(V)$ แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา ก็ต่อเมื่อ V มีมิติจำกัด

พิสูจน์ : ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F ซึ่ง $\dim(V) = n < \infty$
 จะแสดงว่า $L(V)$ แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา ให้ $\alpha \in L(V)$ จะได้ว่า
 $\forall \alpha$ เป็นปริภูมิย่อยของ V ดังนั้นให้ $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ เป็นมูลฐานของ $\forall \alpha$
 เพราะฉะนั้นจะมี d_{x_i} ใน V ซึ่ง $d_{x_i} \alpha = x_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, m$
 โดยทฤษฎีบทประกอบ 4.4 จะได้ว่า $D = \{d_{x_1}, d_{x_2}, \dots, d_{x_m}\}$

เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเองบน V และ $V = \langle D \rangle \oplus \ker \alpha$
 และได้ว่า $\dim(V) = \dim(\langle D \rangle) + \dim(\ker \alpha)$ ดังนั้น $\dim(\ker \alpha) =$
 $\dim(V) - \dim(\langle D \rangle) = n - m$ ให้ $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-m}\}$ เป็นมูลฐานของ $\ker \alpha$

จะได้ว่าสำหรับทุก $x \in \langle D \rangle \oplus \ker \alpha$, $x = \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j$

สำหรับบางสเกลาร์ a_i, b_j ใน F

นิยาม $\gamma: \langle D \rangle \oplus \ker \alpha \rightarrow \langle D \rangle$ กำหนดการส่งโดย $x\gamma = \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i}$

ให้ $x, y \in \langle D \rangle \oplus \ker \alpha$ และ $a, b \in F$

จะได้ว่า $x = \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j$

และ $y = \sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b'_j y_j$ สำหรับบางสเกลาร์ a_i, a'_i, b_j, b'_j ใน F ดังนั้น

$$\begin{aligned} (ax + by)\gamma &= [a(\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j) + b(\sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b'_j y_j)]\gamma \\ &= (\sum_{i=1}^m aa_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} ab_j y_j + \sum_{i=1}^m ba'_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} bb'_j y_j)\gamma \\ &= [(\sum_{i=1}^m aa_i d_{x_i} + \sum_{i=1}^m ba'_i d_{x_i}) + (\sum_{j=1}^{n-m} ab_j y_j + \sum_{j=1}^{n-m} bb'_j y_j)]\gamma \\ &= \sum_{i=1}^m aa_i d_{x_i} + \sum_{i=1}^m ba'_i d_{x_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a\left(\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i}\right) + b\left(\sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i}\right) \\
&= a(xy) + b(y\gamma)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\gamma \in L(V)$ และยังได้ว่า $x\gamma^2 = (x\gamma)\gamma = \left(\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j\right)\gamma\gamma$

$$= \left(\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i}\right)\gamma = \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} = x\gamma \quad \text{นั่นคือ} \quad \gamma^2 = \gamma \quad \text{ดังนั้น} \quad \gamma \in E(L(V))$$

นอกจากนี้ยังนอกจากนี้ยังได้ว่า $\nabla\gamma = \langle D \rangle$ ทำให้ $V = \langle D \rangle \oplus \text{Ker } \alpha = \nabla\gamma \oplus \text{Ker } \alpha$ เนื่องจาก $\nabla\alpha$ เป็นปริภูมิย่อยของ V ดังนั้นจะมีปริภูมิย่อย W ของ V ซึ่งทำให้ $V = \nabla\alpha \oplus W$ และได้ว่า $\dim(W) = \dim(V) - \dim(\nabla\alpha) = n-m = \dim(\text{Ker } \alpha)$ ให้ $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-m}\}$ เป็นมูลฐานของ W ดังนั้นสำหรับ $x \in \nabla\gamma \oplus \text{Ker } \alpha$

$$\text{จะได้ว่า } x = \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j \quad \text{สำหรับบางสเกลาร์ } a_i, b_j \text{ ใน } F$$

$$\text{นิยาม } \lambda : \nabla\gamma \oplus \text{Ker } \alpha \rightarrow V \text{ กำหนดการส่งโดย } x\lambda = \sum_{i=1}^m a_i x_i + \sum_{j=1}^{n-m} b_j w_j$$

ให้ $x, y \in \nabla\gamma \oplus \text{Ker } \alpha$ และ $a, b \in F$ จะได้ว่า

$$x = \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j \quad \text{และ} \quad y = \sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b'_j y_j$$

สำหรับบางสเกลาร์ a_i, b_j, a'_i, b'_j ใน F ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(ax + by)\lambda &= \left[a\left(\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j\right) + b\left(\sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b'_j y_j\right) \right] \lambda \\
&= \left(a \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + a \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j + b \sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i} + b \sum_{j=1}^{n-m} b'_j y_j \right) \lambda \\
&= \left[\left(a \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + b \sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i} \right) + \left(a \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j + b \sum_{j=1}^{n-m} b'_j y_j \right) \right] \lambda \\
&= \left(\sum_{i=1}^m (aa_i + ba'_i) d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} (ab_j + bb'_j) y_j \right) \lambda \\
&= \sum_{i=1}^m (aa_i + ba'_i) x_i + \sum_{j=1}^{n-m} (ab_j + bb'_j) w_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a \sum_{i=1}^m a_i x_i + a \sum_{j=1}^{n-m} b_j w_j) + (b \sum_{i=1}^m a'_i x_i + b \sum_{j=1}^{n-m} b'_j w_j) \\
&= a(\sum_{i=1}^m a_i x_i + \sum_{j=1}^{n-m} b_j w_j) + b(\sum_{i=1}^m a'_i x_i + \sum_{j=1}^{n-m} b'_j w_j) \\
&= a(x\lambda) + b(y\lambda)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lambda \in L(V)$ ต่อไปจะแสดงว่า λ เป็นฟังก์ชัน 1-1

ให้ $x, y \in \nabla \gamma \oplus \text{Ker } \alpha$ ซึ่ง $x\lambda = y\lambda$ ดังนั้น $x = \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j$

และ $y = \sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b'_j y_j$ สำหรับบางสเกลาร์ a_i, a'_i, b_j, b'_j ใน F

เนื่องจาก $x\lambda = y\lambda$ ดังนั้น $x\lambda - y\lambda = 0$

$$(\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j)\lambda - (\sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b'_j y_j)\lambda = 0$$

$$(\sum_{i=1}^m a_i x_i + \sum_{j=1}^{n-m} b_j w_j) - (\sum_{i=1}^m a'_i x_i + \sum_{j=1}^{n-m} b'_j w_j) = 0$$

$$(\sum_{i=1}^m a_i x_i - \sum_{i=1}^m a'_i x_i) + (\sum_{j=1}^{n-m} b_j w_j - \sum_{j=1}^{n-m} b'_j w_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^m (a_i - a'_i) x_i + \sum_{j=1}^{n-m} (b_j - b'_j) w_j = 0$$

เนื่องจาก $\{x_1, x_2, \dots, x_m, w_1, w_2, \dots, w_{n-m}\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง จึงทำให้ $(a_i - a'_i) = (b_j - b'_j) = 0$ ทุก i, j นั่นคือ $a_i = a'_i$ และ $b_j = b'_j$ ทุก i, j ทำให้ได้ว่า

$$\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j = \sum_{i=1}^m a'_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b'_j y_j \quad \text{นั่นคือ } x = y$$

เพราะฉะนั้น λ เป็นการแปลงเชิงเส้นชนิด 1-1 และเนื่องจาก $\nabla \gamma \oplus \text{Ker } \alpha = V$ และ V มีมิติจำกัด จะได้ว่า λ เป็นการแปลงเชิงเส้นชนิดทั่วถึง ดังนั้น $\lambda \in G(L(V))$ ต่อไปจะแสดงว่า $\alpha = \gamma\lambda$ ให้ $x \in V = \langle D \rangle \oplus \text{Ker } \alpha$

จะได้ว่า $x = \sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j$ สำหรับบางสเกลาร์ a_i, b_j ใน F

ดังนั้น $x\alpha = \sum_{i=1}^m a_i x_i = \left(\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} \right) \lambda = \left(\sum_{i=1}^m a_i d_{x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_j y_j \right) \gamma \lambda$
 $= x(\gamma\lambda)$ นั่นคือ $\alpha = \gamma\lambda \in E(L(V))G(L(V))$ ทำให้ $L(V) \subseteq E(L(V))G(L(V))$
 เพราะฉะนั้น $L(V) = E(L(V))G(L(V))$ จึงได้ว่า $L(V)$ แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา

ในทางกลับกัน สมมติให้ $L(V)$ แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวาเป็น
 $L(V) = E(L(V))G(L(V))$ จะแสดงว่า V มีมิติจำกัด สมมติว่าไม่จริง นั่นคือให้ V
 มีมิติอนันต์ และให้ $A = \{v_i \mid i \in I\}$ เป็นมูลฐานของ V เลือก $v_0 \in A$
 จะได้ว่า $|A| = |A \setminus \{v_0\}|$ ดังนั้นจะมีฟังก์ชันชนิด 1-1 แบบทั่วถึง α จาก A

ไปยัง $A \setminus \{v_0\}$ และสำหรับ $x \in V$ จะได้ว่า $x = \sum a_i v_i$ โดยที่ $a_i \in F$

นิยาม $\beta: V \rightarrow V$ กำหนดการส่งโดย $x\beta = \left(\sum a_i v_i \right) \beta = \sum a_i (v_i \alpha)$

ต่อไปจะแสดงว่า β เป็นการแปลงเชิงเส้นบน V ให้ $x, y \in V$ และ $a, b \in F$

จะได้ว่า $x = \sum a_i v_i$ และ $y = \sum b_i v_i$ สำหรับบาง $a_i, b_i \in F$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (ax+by)\beta &= (a\sum a_i v_i + b\sum b_i v_i)\beta \\ &= (\sum (aa_i + bb_i) v_i) \beta \\ &= \sum (aa_i + bb_i) (v_i \alpha) \\ &= a(\sum a_i (v_i \alpha)) + b(\sum b_i (v_i \alpha)) \\ &= a(x\beta) + b(y\beta) \end{aligned}$$

นั่นคือ $\beta \in L(V)$ และยังได้ว่า $\nabla \beta \neq V$ เนื่องจาก $v_0 \notin \nabla \beta$

ต่อไปจะแสดงว่า β เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 ให้ $x, y \in V$ ซึ่ง $x\beta = y\beta$

จะได้ว่า $x = \sum a_i v_i, y = \sum b_i v_i$ สำหรับบางสเกลาร์ a_i, b_i ใน F ดังนั้น

$$\begin{aligned} (\sum a_i v_i) \beta &= (\sum b_i v_i) \beta \\ \sum (a_i - b_i) (v_i \beta) &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\{v_i \beta \mid i \in I\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง จึงทำให้ $a_i - b_i = 0$ ทุก ๆ $i \in I$

นั่นคือ $a_i = b_i$ ทุก $i \in I$ ทำให้ $\sum a_i v_i = \sum b_i v_i$ นั่นคือ $x = y$

เพราะฉะนั้น β เป็นการแปลงเชิงเส้นชนิด 1-1

เนื่องจาก $\beta \in L(V)$ จะได้ว่า $\beta = \gamma\lambda$ สำหรับบาง $\gamma \in E(L(V))$

และ $\lambda \in G(L(V))$ ดังนั้น $\gamma = \beta\lambda^{-1}$ เป็นการแปลงเชิงเส้นชนิด 1-1

และแต่ละเวกเตอร์ x ใน V จะได้ว่า $x\gamma = x\gamma^2 = (x\gamma)\gamma$ ทำให้ $x = x\gamma$

สำหรับทุกเวกเตอร์ x ใน V นั่นคือ γ เป็นการแปลงเชิงเส้นเอกลักษณ์บน V

ทำให้ $\beta = \gamma\lambda = \lambda \in G(L(V))$ ซึ่งขัดแย้งเนื่องจาก $\forall \beta \neq \lambda$

เพราะฉะนั้น V มีมิติจำกัด

□