

บทที่ 3

การแยกแฟกเตอร์

ในบทนี้จะเป็นการศึกษาถึงกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้ ซึ่งเป็นผลงานของ [8], [7] และ [4] ซึ่งจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญที่จะนำไปสู่ทฤษฎีบทหลักของการศึกษาค้นคว้าฉบับนี้

ถึงกลุ่ม S จะแยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย [ขวา] (left [right] factorizable) ถ้า $S = GE(S)$ [$S = E(S)G$] โดยที่ G เป็นกลุ่มย่อยของ S และ $E(S)$ คือเซตไอดempoเทนต์ทั้งหมดของ S และจะกล่าวว่า S แยกแฟกเตอร์ได้ ถ้า S แยกแฟกเตอร์ได้ทั้งทางซ้ายและทางขวา

จากนิยามของถึงกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้ จะเห็นได้โดยง่ายว่า ทุกกลุ่มเป็นถึงกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้ และถ้า S เป็นถึงกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้แล้ว S จะเป็นถึงกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย แต่บทกลับไม่จริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1 : ให้ S เป็นถึงกลุ่มเชิงศูนย์ทางขวา ซึ่ง $|S| > 1$ จะได้ว่า S แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้ายแต่ไม่สามารถแยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา

พิสูจน์ : ให้ S เป็นถึงกลุ่มเชิงศูนย์ทางขวา ซึ่ง $|S| > 1$ ให้ $x \in S$ จะได้ว่า $\{x\}$ เป็นกลุ่มย่อยของ S และสำหรับทุกสมาชิก s ใน S จะได้ว่า $s^2 = ss = s$ นั่นคือ $s \in E(S)$ เพราะฉะนั้น $E(S) = S$ ให้ z เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S จะได้ว่า $z = xz \in \{x\}E(S)$ ดังนั้น $S \subseteq \{x\}E(S)$ ซึ่งทำให้ $S = \{x\}E(S)$ เพราะฉะนั้น S แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

สมมุติว่า S แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวาเป็น $S = E(S)N$ เมื่อ N เป็นกลุ่มย่อยของ S ดังนั้นสำหรับทุกสมาชิก x ใน S จะได้ว่า $x = sn$ สำหรับบาง $s \in E(S)$ และ $n \in N$ เนื่องจาก S เป็นถึงกลุ่มเชิงศูนย์ทางขวาดังนั้น $x = sn = n \in N$ นั่นคือ $S \subseteq N$ ทำให้ $S = N$ ซึ่งขัดแย้ง เนื่องจาก S ไม่เป็นกลุ่ม

□

ในการทำงานเดียวกันก็จะได้ว่า กึ่งกลุ่มเชิงศูนย์ทางซ้ายที่มีจำนวนสมาชิกมากกว่า 1 จะแยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา แต่ไม่สามารถแยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

ตัวอย่าง 3.2 : ให้ $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ นิยามการดำเนินการ $*$ บน N โดย $x * y = \max \{x, y\}$ ทุกสมาชิก x, y ของ N จะได้ว่า N เป็นกึ่งกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้

พิสูจน์ : ให้ $x \in N$ จะได้ว่า $x * x = x$ นั่นคือ x เป็นไอดีมโพเทนต์ ของ N ดังนั้น $N = E(N)$ และเนื่องจาก $\{1\}$ เป็นกลุ่มย่อยของ N จะได้ว่า $N = \{1\} E(N) = E(N)\{1\}$ นั่นคือ N เป็นกึ่งกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้

□

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับกึ่งกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้ ซึ่งเป็นผลงานของ [8],[7] และ [4]

ทฤษฎีบท 3.1 : ถ้า S เป็นกึ่งกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้เป็น $S = GE(S) = E(S)N$ แล้ว S จะมีเอกลักษณ์ 1 และ $1 = 1_G = 1_N$ เมื่อ 1_G และ 1_N คือเอกลักษณ์ของกลุ่ม G และ N ตามลำดับ

พิสูจน์ : ให้ S เป็นกึ่งกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้เป็น $S = GE(S) = E(S)N$ สำหรับบางกลุ่มย่อย G และ N ของ S และ $E(S)$ เป็นเซตของไอดีมโพเทนต์ของ S ให้ $s \in S$ จะได้ว่า $s = ge$ สำหรับบางค่า $g \in G$ และ $e \in E(S)$ และทำให้ $1_G s = 1_G ge = ge = s$ นั่นคือ 1_G เป็นเอกลักษณ์ทางซ้ายของ S ทำงานเดียวกันก็จะได้ว่า 1_N เป็นเอกลักษณ์ทางขวาของ S ทำให้ $1_G = 1_G 1_N = 1_N$ นั่นคือ $1_G = 1_N = 1$ เป็นเอกลักษณ์ของ S

□

ทฤษฎีบท 3.2 : ถ้า S เป็นกึ่งกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้เป็น $S = GE(S) = E(S)N$ แล้วจะได้ว่า $G = N$ เป็นกลุ่มย่อยหนึ่งหน่วยของ S

พิสูจน์ : ให้ S เป็นกึ่งกลุ่มที่แยกแฟกเตอร์ได้เป็น $S = GE(S) = E(S)N$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า S มีเอกลักษณ์ $1 = 1_G = 1_N$

ให้ H เป็นกลุ่มย่อยหนึ่งหน่วยของ S ดังนั้น H มี 1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์
เนื่องจาก H เป็นกลุ่มย่อยที่ใหญ่ที่สุดของ S ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ จะได้ว่า
 $N \subseteq H$ และ $G \subseteq H$ ต่อไปจะแสดงว่า $N = H$ ให้ $x \in H$ เนื่องจาก $H \subseteq S = E(S)N$
จะได้ว่า $x = fn$ สำหรับบาง $f \in E(S)$ และ $n \in N$ ซึ่งทำให้
 $f = f1 = fnn^{-1} = xn^{-1}$ แต่ x และ n^{-1} เป็นสมาชิกของ H ดังนั้น $f \in H$
เนื่องจาก H

เป็นกลุ่มที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ ทำให้ $f = 1$ ดังนั้น $x = fn = 1n = n \in N$
นั่นคือ $N = H$ ทำนองเดียวกันก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า $G = H$ ดังนั้น $G = N = H$
เป็นกลุ่มย่อยหนึ่งหน่วยของ S

□

ทฤษฎีบท 3.3 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า P_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย
ก็ต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด

พิสูจน์ : ให้ X เป็นเซตใด ๆ และ P_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้ายเป็น $P_X = G_X E(P_X)$

จะแสดงว่า X เป็นเซตจำกัด สมมติว่า X เป็นเซตอนันต์ ให้ $a \in X$
จะได้ว่า $|X \setminus \{a\}| = |X|$ ดังนั้นจะมีการแปลงบางส่วนชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง α จาก
 $X \setminus \{a\}$ ไปทั่วถึง X เพราะฉะนั้น $\alpha \in P_X = G_X E(P_X)$ ซึ่งทำให้ $\alpha = \beta\gamma$
สำหรับบางสมาชิก β ใน G_X

และ γ ใน $E(P_X)$ ดังนั้น $\nabla\alpha = \nabla\beta\gamma = (\nabla\beta \cap \Delta\gamma) \subseteq \nabla\gamma$ ทำให้ได้ว่า $\nabla\gamma = X$
เนื่องจาก γ เป็นไอเดมโพเทนต์ของ P_X และ $\nabla\gamma = X$ จะได้ว่า $x\gamma = x$

ทุกสมาชิก x ใน $X = \nabla\gamma$ ดังนั้น γ เป็นการแปลงเอกลักษณ์บน X
ทำให้ $\alpha = \beta\gamma = \beta \in G_X$ ซึ่งเกิดการขัดแย้ง เนื่องจาก $\Delta\alpha \neq X$
เพราะฉะนั้น X เป็นเซตจำกัด

สมมติให้ X เป็นเซตจำกัด จะแสดงว่า P_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

ให้ $\alpha \in P_X$ และสำหรับแต่ละ $a \in \nabla\alpha$ ให้ d_a เป็นสมาชิกใน $a\alpha^{-1}$
จะได้ว่า ถ้า $a \neq b$ แล้ว $d_a \neq d_b$ ทุกสมาชิก a, b ใน $\nabla\alpha$ เนื่องจาก X

เป็นเซตจำกัด และ $|\{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}| = |\nabla\alpha|$ จะได้ว่า $|X \setminus \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}| = |X \setminus \nabla\alpha|$ ดังนั้นจะมีการแปลงชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง Ψ จาก $X \setminus \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}$ ไปทั่วถึง $X \setminus \nabla\alpha$

นิยาม $\beta: X \rightarrow X$ กำหนดการส่งโดย

$$x\beta = \begin{cases} a & \text{ถ้า } x = d_a \text{ สำหรับบางสมาชิก } a \text{ ใน } \nabla\alpha \\ x\Psi & \text{ถ้า } x \notin \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\} \end{cases}$$

จะเห็นว่า ถ้า $y \in \nabla\alpha$ แล้วจะมี $d_y \in y\alpha^{-1} \subseteq X$ ซึ่งทำให้ $d_y\beta = y$ และถ้า $y \in X \setminus \nabla\alpha$ จะได้ว่ามี $x\alpha \in X \setminus \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}$ ซึ่งทำให้ $y = x\Psi = x\beta$ ดังนั้น β เป็นการแปลงชนิดทั่วถึง ทำให้ได้ว่า $\Delta\beta = \nabla\beta = X$

ต่อไปจะแสดงว่า β เป็นการแปลงชนิด 1-1 ให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x\beta = y\beta$ ถ้า $x = d_a$ และ $y = d_b$ บางสมาชิก a, b ใน $\nabla\alpha$ จะได้ว่า $x\beta = a$ และ $x\beta = b$ เนื่องจาก $x\beta = y\beta$ ดังนั้น $a = b$, ถ้า $x, y \notin \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}$ จะได้ว่า $x\beta = x\Psi$ และ $y\beta = y\Psi$ ดังนั้น $x\Psi = y\Psi$ เนื่องจาก Ψ เป็นการแปลงชนิด 1-1 จึงได้ว่า $x = y$, ถ้า $x = d_a$ บางสมาชิก a ใน $\nabla\alpha$ และ $y \notin \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}$ จะได้ว่า $x\beta = a$ และ $y\beta = y\Psi$ เนื่องจาก $x\beta = y\beta$ จะได้ว่า $y\Psi = a \in \nabla\alpha$ ซึ่งเกิดการขัดแย้ง เพราะว่า $\nabla\Psi = X \setminus \nabla\alpha$ ดังนั้นกรณีนี้จึงเกิดขึ้นไม่ได้ และในทำนองเดียวกัน ถ้า $x \notin \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}$ และ $y = d_a$ บางสมาชิก a ใน $\nabla\alpha$ กรณีนี้ก็เกิดขึ้นไม่ได้เช่นกัน ดังนั้นจะได้ว่า β เป็นการแปลงชนิด 1-1 เพราะฉะนั้น $\beta \in G_X$ เนื่องจาก

$$a\alpha^{-1} \cap b\alpha^{-1} = \emptyset \text{ ทุกสมาชิก } a, b \text{ ใน } \nabla\alpha \text{ ซึ่ง } a \neq b \text{ และ } \Delta\alpha = \bigcup_{a \in \nabla\alpha} (a\alpha^{-1})$$

$$\text{จะได้ว่า } (\Delta\alpha)\beta = \left(\bigcup_{a \in \nabla\alpha} (a\alpha^{-1}) \right)\beta = \bigcup_{a \in \nabla\alpha} (a\alpha^{-1})\beta \text{ และ}$$

$$((a\alpha^{-1})\beta \cap (b\alpha^{-1})\beta) = \emptyset \text{ นิยาม } \gamma: (\Delta\alpha)\beta \rightarrow X \text{ กำหนดการส่งโดย}$$

$$x\gamma = a \text{ ถ้า } x \in (a\alpha^{-1})\beta \text{ จะได้ว่า } \Delta\gamma = (\Delta\alpha)\beta \text{ และ } \nabla\gamma = ((\Delta\alpha)\beta)\gamma =$$

$[(\cup_{a \in \nabla \alpha} (a\alpha^{-1}))\beta] \gamma = \{a \mid a \in \nabla \alpha\} = \nabla \alpha$ และสำหรับทุกสมาชิก a
 $a \in \nabla \alpha$

ใน $\nabla \alpha = \nabla \gamma$ จะมี $d_a \in \Delta \alpha$ และ $a = d_a \beta \in (a\alpha^{-1})\beta \subseteq (\Delta \alpha)\beta = \Delta \gamma$
 ทำให้ได้ว่า $\nabla \gamma \subseteq \Delta \gamma$ นอกจากนี้ยังได้ว่า สำหรับทุกสมาชิก a ใน $\nabla \alpha = \nabla \gamma$
 จะมี $d_a \in a\alpha^{-1}$ และ $d_a \beta = a$ ทำให้ $a \in (a\alpha^{-1})\beta$ ดังนั้น $a\gamma = a$
 ทุกสมาชิก a ใน $\nabla \gamma$ เพราะฉะนั้น $\gamma \in E(P_X)$ เนื่องจาก $\nabla \beta = X$
 และ $\Delta \gamma = (\Delta \alpha)\beta$ จะได้ว่า $\Delta \beta \gamma = (\nabla \beta \cap \Delta \gamma)\beta^{-1} = (X \cap \Delta \gamma)\beta^{-1} =$
 $(\Delta \gamma)\beta^{-1} = ((\Delta \alpha)\beta)\beta^{-1} = \Delta \alpha$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน $\Delta \alpha = \Delta \beta \gamma$
 จะได้ว่า $x \in (x\alpha)\alpha^{-1}$ และ $x\beta \in [(x\alpha)\alpha^{-1}]\beta$ ดังนั้น $x\beta \gamma = (x\beta)\gamma = x\alpha$
 นั่นคือ $\alpha = \beta \gamma \in G_X E(P_X)$ ทำให้ $P_X \subseteq G_X E(P_X)$ เพราะฉะนั้น $P_X = G_X E(P_X)$

□

ทฤษฎีบท 3.4 : สำหรับเซต X ใดๆ จะได้ว่า P_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา
 ก็ต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด

พิสูจน์ : ให้ X เป็นเซตใด ๆ และ P_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวาเป็น
 $P_X = E(P_X)G_X$ จะแสดงว่า X เป็นเซตจำกัด สมมติว่า X เป็นเซตอนันต์
 ให้ $a \in X$ จะได้ว่า $|X| = |X \setminus \{a\}|$ ดังนั้นจะมีการแปลงบางส่วนของเซตหนึ่งต่อหนึ่ง α
 จาก X ไปทั่วถึง $X \setminus \{a\}$ เพราะฉะนั้น $\alpha \in P_X = E(P_X)G_X$ ซึ่งทำให้
 $\alpha = \gamma\beta$ สำหรับบางสมาชิก γ ใน $E(P_X)$

และ β ใน G_X ดังนั้น $\gamma = \alpha\beta^{-1}$ เป็นการแปลงชนิด 1-1 และเนื่องจาก

$$\Delta \alpha = \Delta \gamma \beta = (\nabla \gamma \cap \Delta \beta)\gamma^{-1} \subseteq \Delta \gamma \text{ ทำให้ได้ } \Delta \gamma = X$$

สำหรับแต่ละ $x \in \Delta \gamma = X$ จะได้ว่า $(x\gamma)\gamma = x\gamma$ แต่ γ เป็นการแปลงชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง
 จึงทำให้ $x\gamma = x$ ทุกสมาชิก x ใน $\Delta \gamma$ นั่นคือ γ เป็นการแปลงเอกลักษณ์ของ
 P_X ทำให้ $\alpha = \gamma\beta = \beta \in G_X$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า

$\nabla \alpha = X \setminus \{a\}$ เพราะฉะนั้น X เป็นเซตจำกัด

สมมติให้ X เป็นเซตจำกัด จะแสดงว่า P_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา

ให้ $\alpha \in P_X$ สำหรับแต่ละ $a \in \nabla \alpha$ ให้ d_a เป็นสมาชิกใน $a\alpha^{-1}$

จะได้ว่า ถ้า $a \neq b$ แล้ว $d_a \neq d_b$ ทุกสมาชิก a, b ใน $\nabla\alpha$ ทำให้ได้

$\{a\alpha^{-1} \mid a \in \nabla\alpha\}$ เป็นผลแบ่งกันของ $\Delta\alpha$

นิยาม $\gamma : \Delta\alpha \rightarrow \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}$ กำหนดการส่งโดย $x\gamma = d_a$ ถ้า $x \in a\alpha^{-1}$

จะเห็นว่า $\nabla\gamma = \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\} \subseteq \Delta\gamma$ และสำหรับสมาชิกแต่ละ d_a, a อยู่ใน $\nabla\alpha$

จะได้ว่า $d_a\gamma = d_a$ ดังนั้น γ เป็นไอเดมโพอเทนต์ของ P_X

เนื่องจากว่าสำหรับทุกสมาชิก a, b ใน $\nabla\alpha$ ถ้า $a \neq b$ แล้ว $d_a \neq d_b$

และ X เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $|X \setminus \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}| = |X \setminus \nabla\alpha|$

ดังนั้นจะมีการแปลงชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง Ψ จาก $X \setminus \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}$ ไปทั่วถึง $X \setminus \nabla\alpha$

นิยาม $\beta : X \rightarrow X$ กำหนดการส่งโดย

$$x\beta = \begin{cases} a & \text{ถ้า } x = d_a \text{ สำหรับบางสมาชิก } a \text{ ใน } \nabla\alpha \\ x\Psi & \text{ถ้า } x \in \{d_a \mid a \in \nabla\alpha\}^c \end{cases}$$

โดยการพิสูจน์เหมือนกับในทฤษฎีบท 3.3, จะได้ว่า $\beta \in G_X$

และ $\Delta\gamma\beta = (\nabla\gamma \cap \Delta\beta)\gamma^{-1} = (\nabla\gamma \cap X)\gamma^{-1} = (\nabla\gamma)\gamma^{-1} = \Delta\gamma = \Delta\alpha$

และสำหรับทุก $x \in \Delta\alpha = \Delta\gamma\beta$ จะได้ว่า $x \in a\alpha^{-1}$ สำหรับบางสมาชิก a ใน $\nabla\alpha$

และ $x\gamma\beta = d_a\beta = a = x\alpha$ ซึ่งทำให้ $\alpha = \gamma\beta \in E(P_X)G_X$

นั่นคือ $P_X \subseteq E(P_X)G_X$ ทำให้ $P_X = E(P_X)G_X$

□

บทแทรก 3.5 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า P_X แยกแฟกเตอร์ได้ก็ต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด

พิสูจน์ : โดยทฤษฎีบท 3.3 และทฤษฎีบท 3.4

ทฤษฎีบท 3.6 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า T_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้ายก็ต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด

พิสูจน์ : ให้ X เป็นเซตใด ๆ และ T_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้ายเป็น

$T_X = G_X E(T_X)$ จะแสดงว่า X เป็นเซตจำกัด สมมุติว่า X เป็นเซตอนันต์

ให้ $a \in X$ จะได้ว่า $|X| = |X \setminus \{a\}|$ ดังนั้นจะมีการแปลงชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง α

จาก X ไปทั่วถึง $X \setminus \{a\}$ เพราะฉะนั้น $\alpha \in T_X = G_X E(T_X)$ ซึ่งทำให้ $\alpha = \beta\gamma$ สำหรับบางสมาชิก β ใน G_X และ γ ใน $E(T_X)$
 ดังนั้น $\nabla\alpha = (\nabla\beta \cap \Delta\gamma)\gamma \subseteq \nabla\gamma$ ซึ่งทำให้ $\nabla\gamma = X$ หรือ $\nabla\gamma = X \setminus \{a\}$
 กรณีที่ 1: ถ้า $\nabla\gamma = X$ จะได้ว่า γ เป็นการแปลงเอกลักษณ์บน X
 ดังนั้น $\alpha = \beta \in G_X$ ซึ่งเกิดการขัดแย้ง เนื่องจาก $\nabla\alpha \neq X$
 กรณีที่ 2: ถ้า $\nabla\gamma = X \setminus \{a\}$ จะได้ว่าฟังก์ชันจำกัดของ γ ซึ่งมีโดเมนเป็น $X \setminus \{a\}$ เป็นการแปลงเอกลักษณ์บน $X \setminus \{a\}$ ให้ $b \in X$ โดยที่ $b\beta = a$
 จะได้ว่าสำหรับทุก $x \in X \setminus \{b\}$, $x\beta \in X \setminus \{a\}$ ดังนั้น $x\alpha = x\beta\gamma = (x\beta)\gamma = x\beta$
 ซึ่งทำให้ $(X \setminus \{b\})\alpha = (X \setminus \{a\})\beta$ เนื่องจาก α เป็นการแปลงชนิด 1-1
 และ $\nabla\alpha = X \setminus \{a\}$ จะได้ว่า $(X \setminus \{b\})\alpha = X \setminus \{a, b\}\alpha$ และเพราะว่า $\beta \in G_X$ และ $b\beta = a$ เพราะฉะนั้น $(X \setminus \{b\})\beta = X \setminus \{a\}$ ซึ่งเกิดการขัดแย้งกับสมการ $(X \setminus \{b\})\alpha = (X \setminus \{b\})\beta$ เนื่องจาก $a \neq b\alpha$ เพราะฉะนั้น X เป็นเซตจำกัด
 สมมุติให้ X เป็นเซตจำกัด จะแสดงว่า T_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย
 ให้ $\alpha \in T_X$ ดังนั้น $\alpha \in P_X$ โดยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า $\alpha = \beta\gamma$
 สำหรับบางสมาชิก β ใน G_X และ γ ใน $E(P_X)$ ดังนั้น $\gamma = \beta^{-1}\alpha$
 เนื่องจาก $\Delta\beta = \nabla\beta = \Delta\alpha = X$ จะได้ว่า $\Delta\gamma = \Delta\beta^{-1}\alpha = (\nabla\beta^{-1} \cap \Delta\alpha)\beta$
 $= (X \cap X)\beta = (X)\beta = X$ นั่นคือ $\gamma \in E(T_X)$ ดังนั้น $\alpha = \beta\gamma \in G_X E(T_X)$
 ทำให้ $T_X \subseteq G_X E(T_X)$ เพราะฉะนั้น $T_X = G_X E(T_X)$

□

ทฤษฎีบท 3.7 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า T_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา
 ก็ต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด

พิสูจน์ : ให้ X เป็นเซตใด ๆ และ T_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวาเป็น $T_X = E(T_X)G_X$ จะแสดงว่า X เป็นเซตจำกัด สมมุติว่า X เป็นเซตอนันต์
 ให้ $a \in X$ จะได้ว่า $|X| = |X \setminus \{a\}|$ ดังนั้นจะมีการแปลงชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง α
 จาก X ไปทั่วถึง $X \setminus \{a\}$ เพราะฉะนั้น $\alpha \in T_X = E(T_X)G_X$ ซึ่งทำให้ $\alpha = \beta\gamma$
 สำหรับบางสมาชิก γ ใน $E(T_X)$ และ β ใน G_X ดังนั้น $\gamma = \alpha\beta^{-1}$
 เป็นการแปลงชนิด 1-1 และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $x\gamma = x\gamma^2$

ดังนั้น $x = xy$ นั่นคือ y เป็นการแปลงเอกลักษณ์บน X ทำให้ $\alpha = y\beta = \beta \in G_x$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $\nabla\alpha = X \setminus \{a\}$ เพราะฉะนั้น X เป็นเซตจำกัด

สมมติให้ X เป็นเซตจำกัด จะแสดงว่า T_x แยกแฟกเตอร์ได้ทางขวา ให้ $\alpha \in T_x$ ดังนั้น $\alpha \in P_x$ โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า $\alpha = y\beta$ สำหรับบางสมาชิก y ใน $E(P_x)$ และ β ใน G_x ต่อไปจะแสดงว่า $y \in T_x$ เนื่องจาก $\alpha = y\beta$ จะได้ว่า $y = \alpha\beta^{-1}$ และเพราะว่า $\nabla\beta = \Delta\beta = X$ ดังนั้น $\Delta y = (\nabla\alpha \cap \Delta\beta^{-1})\alpha^{-1} = (\nabla\alpha \cap X)\alpha^{-1} = (\nabla\alpha)\alpha^{-1} = \Delta\alpha = X$ นั่นคือ $y \in T_x$ แต่ $y^2 = y$ ทำให้ $y \in E(T_x)$ ดังนั้น $\alpha = y\beta \in E(T_x)G_x$ ทำให้ $T_x \subseteq E(T_x)G_x$ เพราะฉะนั้น $T_x = E(T_x)G_x$

□

บทแทรก 3.8 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า T_x แยกแฟกเตอร์ได้ก็ต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด

พิสูจน์ : โดยทฤษฎีบท 3.6 และทฤษฎีบท 3.7

ทฤษฎีบท 3.9 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า U_x แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

พิสูจน์ : ให้ X เป็นเซตใด ๆ และ $\alpha \in U_x$ ให้ $A = S(\alpha) \cup S(\alpha)\alpha$ จะได้ว่า $|A| < \infty$ ให้ β เป็นฟังก์ชันจำกัดของ α โดยที่ $\Delta\beta = \Delta\alpha \cap A$ จะได้ว่า $\beta \in P_A$ เนื่องจาก $\Delta\beta = \Delta\alpha \cap A = \Delta\alpha \cap (S(\alpha) \cup S(\alpha)\alpha) = (\Delta\alpha \cap S(\alpha)) \cup (\Delta\alpha \cap S(\alpha)\alpha)$ ดังนั้น $\nabla\beta = [S(\alpha) \cup (\Delta\alpha \cap S(\alpha)\alpha)]\alpha = S(\alpha)\alpha \cup (\Delta\alpha \cap S(\alpha)\alpha)\alpha$ พิจารณา $(\Delta\alpha \cap S(\alpha)\alpha)\alpha$ จะได้ว่าสำหรับทุก $x \in \Delta\alpha \cap S(\alpha)\alpha$, $x \in \Delta\alpha$ และ $x \in S(\alpha)\alpha$ ถ้า $x \in S(\alpha)$ จะได้ว่า $x\alpha \in S(\alpha)\alpha$ และถ้า $x \notin S(\alpha)$ จะได้ว่า $x\alpha = x \in S(\alpha)\alpha$ เพราะฉะนั้น $[(\Delta\alpha \cap S(\alpha)\alpha)\alpha] \subseteq S(\alpha)\alpha$ ทำให้ $\nabla\beta = S(\alpha)\alpha$ เนื่องจาก $\beta \in P_A$ โดยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า $\beta = \lambda\gamma$ สำหรับบางสมาชิก λ ใน G_A และ γ ใน $E(P_A)$ ดังนั้น $\Delta\gamma = \Delta\lambda^{-1}\beta = (\nabla\lambda^{-1} \cap \Delta\beta)\lambda = (X \cap \Delta\beta)\lambda = (\Delta\beta)\lambda$ นิยาม $\lambda' : X \rightarrow X$ กำหนดการส่งโดย

$$x\lambda' = \begin{cases} x\lambda & \text{ถ้า } x \in A \\ x & \text{ถ้า } x \in X \setminus A \end{cases}$$

เนื่องจาก λ เป็นการแปลงชนิด 1-1 แบบทั่วถึง และโดยนิยาม λ' จะได้ว่า

$$\lambda' \in G_X \quad \text{และ} \quad S(\lambda') = S(\lambda) \quad \text{ดังนั้น} \quad \lambda' \in G_X \cap U_X$$

เนื่องจาก $(\Delta\alpha \setminus \Delta\beta) \subseteq X \setminus A$ จะได้ว่า $(\Delta\alpha \setminus \Delta\beta)\lambda' = \Delta\alpha \setminus \Delta\beta$

$$\text{ดังนั้น} \quad (\Delta\alpha)\lambda' = (\Delta\beta)\lambda' \cup (\Delta\alpha \setminus \Delta\beta)\lambda' = (\Delta\beta)\lambda' \cup (\Delta\alpha \setminus \Delta\beta)$$

$$= \Delta\gamma \cup (\Delta\alpha \setminus \Delta\beta) \quad \text{เนื่องจาก } \lambda' \text{ เป็นการแปลงชนิด 1-1}$$

$$\text{จะได้ว่า } \Delta\gamma \cap (\Delta\alpha \setminus \Delta\beta) = \emptyset$$

นิยาม $\gamma : (\Delta\alpha)\lambda' \rightarrow X$ กำหนดการส่งโดย

$$x\gamma = \begin{cases} x\gamma & \text{ถ้า } x \in \Delta\gamma \\ x & \text{ถ้า } x \in \Delta\alpha \setminus \Delta\beta \end{cases}$$

จะได้ว่า $\gamma' \in P_X$ และ $S(\gamma') = S(\gamma) \subseteq A$ ดังนั้น $\gamma' \in U_X$ นอกจากนี้ยังได้ว่า

$$\nabla\gamma' = \nabla\gamma \cup (\Delta\alpha \setminus \Delta\beta) \quad \text{เนื่องจาก } \nabla\gamma \subseteq \Delta\gamma \text{ และ } x\gamma = x \text{ ทุกสมาชิก}$$

$$x \text{ ใน } \nabla\gamma \text{ จะได้ว่า } \nabla\gamma' \subseteq \Delta\gamma' \text{ และ } x\gamma' = x \text{ ทุกสมาชิก } x \text{ ใน } \nabla\gamma'$$

นั่นคือ $\gamma' \in E(P_X)$ โดยนิยามของ λ' และ γ' จะได้ว่า $\Delta\lambda'\gamma' = (\Delta\gamma)\lambda'^{-1} =$

$$((\Delta\alpha)\lambda')\lambda'^{-1} = \Delta\alpha \text{ ให้ } x \in \Delta\alpha = \Delta\lambda'\gamma' \text{ ถ้า } x \in A \text{ จะได้ว่า}$$

$$x \in \Delta\alpha \cap A \text{ ซึ่งทำให้ } x\alpha = x\beta = x\lambda\gamma = x\lambda\gamma' = x\lambda'\gamma' \text{ และถ้า } x \in \Delta\alpha \setminus A$$

$$\text{จะได้ว่า } x \in \Delta\alpha \setminus S(\alpha), x \in X \setminus A \text{ และ } x \in \Delta\alpha \setminus \Delta\beta \text{ ดังนั้น } x\alpha = x, x\lambda' = x$$

$$\text{และ } x\gamma = x \text{ เพราะฉะนั้น } x\alpha = x\lambda'\gamma' \text{ นั่นคือ } \alpha = \lambda'\gamma' \in (G_X \cap U_X)E(U_X)$$

$$\text{ซึ่งทำให้ } U_X \subseteq (G_X \cap U_X)E(U_X) \text{ ดังนั้น } U_X = (G_X \cap U_X)E(U_X)$$

□

บทแทรก 3.10 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า V_X และ W_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

พิสูจน์ : ให้ X เป็นเซตใด ๆ จะแสดงว่า V_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

ให้ $\alpha \in V_X$ ดังนั้น $\alpha \in U_X$ โดยทฤษฎีบท 3.9 จะได้ว่า $\alpha = \beta\gamma$



วพ
QA
ม 272
ด.1



ท 60155
หอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยขอนแก่น

25

สำหรับบางสมาชิก β ใน $G_X \cap U_X = G_X \cap V_X$ และ γ ใน $E(U_X)$

ดังนั้น $\Delta\gamma = \Delta\beta^{-1}\gamma = X$ นั่นคือ $\gamma \in E(V_X)$ เพราะฉะนั้น

$\alpha = \beta\gamma \in (G_X \cap V_X)E(V_X)$ ซึ่งทำให้ $V_X \subseteq (G_X \cap V_X)E(V_X)$

ดังนั้น $V_X = (G_X \cap V_X)E(V_X)$ นั่นคือ V_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

ต่อไปจะแสดงว่า W_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย ให้ $\alpha \in W_X$

ดังนั้น $\alpha \in U_X$ โดยทฤษฎีบท 3.9 จะได้ว่า $\alpha = \beta\gamma$ สำหรับบางสมาชิก

β ใน $G_X \cap U_X = G_X \cap W_X$ และ γ ใน $E(U_X)$ ดังนั้น $\gamma = \beta^{-1}\alpha$

เป็นการแปลงชนิด 1-1 นั่นคือ $\gamma \in E(W_X)$ เพราะฉะนั้น

$\alpha = \beta\gamma \in (G_X \cap W_X)E(W_X)$ ซึ่งทำให้ $W_X \subseteq (G_X \cap W_X)E(W_X)$

ดังนั้น $W_X = (G_X \cap W_X)E(W_X)$ นั่นคือ W_X แยกแฟกเตอร์ได้ทางซ้าย

□