

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 กึ่งกลุ่มของการแปลง

ให้ $(S, \cdot)$ เป็นกึ่งกลุ่ม (semigroup) ซึ่งต่อไปจะใช้ S แทน $(S, \cdot)$ และสำหรับทุกสมาชิก x, y ของ S จะเขียน xy แทน $x \cdot y$ สำหรับเซตย่อย (subset) G ของ S , G จะเรียกว่าเป็น กึ่งกลุ่มย่อย (subsemigroup) ของ S ถ้า G เป็นกึ่งกลุ่มภายใต้การดำเนินการทวิภาค (binary operation) เดียวกันกับ S และ G จะเรียกว่า กลุ่มย่อย (subgroup) ของ S ถ้า G เป็นกลุ่ม (group) ภายใต้การดำเนินการทวิภาคเดียวกันกับ S สมาชิก a ของ S จะเรียกว่า ไอดีเดนโพเทนต์ (idempotent) ถ้า $a^2 = a$ เซตของไอดีเดนโพเทนต์ทั้งหมดของ S เขียนแทนด้วย $E(S)$ นั่นคือ

$$E(S) = \{ a \in S \mid a^2 = a \}$$

S จะเรียกว่า แถบ (band) ถ้า $a^2 = a$ ทุกสมาชิก a ของ S นั่นคือ $E(S) = S$ และ S จะเรียกว่า เซมิแลตทิซ (semilattice) ถ้า S เป็นกึ่งกลุ่มแถบที่สลับที่ได้ สมาชิก e ของ S จะเรียกว่า เอกลักษณ์ทางซ้าย [ขวา] (left [right] identity) ถ้า $es = s$ [$se = s$] ทุกสมาชิก s ของ S และจะเรียกว่า e ว่า เอกลักษณ์ (identity) ถ้า e เป็นทั้งเอกลักษณ์ทางซ้ายและเอกลักษณ์ทางขวา ต่อไปจะให้ 1 แทนเอกลักษณ์ สมาชิก z ของ S จะเรียกว่า ศูนย์ทางซ้าย [ขวา] (left [right] zero element) ถ้า $zs = z$ [$sz = z$] ทุกสมาชิก s ของ S และ z จะเรียกว่า ศูนย์ (zero) ถ้า z เป็นทั้งศูนย์ทางซ้ายและศูนย์ทางขวา และ S จะเรียกว่า กึ่งกลุ่มเชิงศูนย์ทางซ้าย [ขวา] (left [right] zero semigroup) ถ้า $xy = x$ [$xy = y$] ทุกสมาชิก x, y ของ S

ให้ S มีเอกลักษณ์ 1 กลุ่มย่อย G ของ S จะเรียกว่า กลุ่มหนึ่งหน่วย (unit group) ของ S ถ้า G เป็นกลุ่มย่อยที่ใหญ่ที่สุดของ S ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ ใน [6] พิสูจน์ว่า G เป็นกลุ่มหนึ่งหน่วยของ S ก็ต่อเมื่อ

$$G = \{ a \in S \mid ab = ba = 1 \text{ สำหรับบางสมาชิก } b \text{ ของ } S \}$$

S จะเรียกว่า กึ่งกลุ่มปกติ (regular semigroup) ถ้าสำหรับทุก $a \in S$ มีสมาชิก x บางตัวของ S ซึ่งทำให้ $a = axa$ สำหรับสมาชิก a ใด ๆ ของ S

ถ้ามี $x \in S$ ซึ่งทำให้ $a = axa$ และ $x = xax$ แล้ว X จะเรียกว่าตัวผกผัน (inverse) ของ a และ S จะเรียกว่ากึ่งกลุ่มผกผัน (inverse semigroup) ถ้าสำหรับทุกๆ $a \in S$ มีตัวผกผันใน S เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ให้ X เป็นเซตใด ๆ การแปลงบางส่วนบน X (partial transformation on X) หมายถึงฟังก์ชันจากเซตย่อยของ X ไปยัง X ถ้า α เป็นการแปลงบางส่วนบน X กำหนดให้ $\Delta\alpha$ และ $\nabla\alpha$ เป็นสัญลักษณ์แทนโดเมน (domain) และพิสัย (range) ของการแปลงบางส่วน α ตามลำดับ ให้ O แทนการแปลงบางส่วนบน X ที่มีโดเมนเป็นเซตว่าง และให้ P_X เป็นเซตของการแปลงบางส่วนบน X ทั้งหมด

สำหรับ $\alpha, \beta \in P_X$ จะกำหนดผลคูณ $\alpha\beta$ ดังนี้

ถ้า $\nabla\alpha \cap \Delta\beta = \emptyset$ จะให้ $\alpha\beta = O$

ถ้า $\nabla\alpha \cap \Delta\beta \neq \emptyset$ จะให้ $\alpha\beta = (\alpha|_{(\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\alpha^{-1}})(\beta|_{\nabla\alpha \cap \Delta\beta})$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันประกอบ (composite function) ของ $\alpha|_{(\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\alpha^{-1}}$ และ $\beta|_{\nabla\alpha \cap \Delta\beta}$ โดยที่ $(\alpha|_{(\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\alpha^{-1}})$ และ $(\beta|_{\nabla\alpha \cap \Delta\beta})$ หมายถึงฟังก์ชันจำกัด

(restrictions) ของ α และ β บน $(\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\alpha^{-1}$ และ $(\nabla\alpha \cap \Delta\beta)$ ตามลำดับ
จะได้ว่า P_X เป็นกึ่งกลุ่มที่มีศูนย์ (zero) และมีเอกลักษณ์ 1 เมื่อ 1 คือฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) บน X และ P_X จะเรียกว่ากึ่งกลุ่มของการแปลงบางส่วนบนเซต X (partial transformations semigroup on X) จากนิยาม $\alpha\beta$ จะได้ว่า

$$\Delta\alpha\beta = (\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\alpha^{-1} \subseteq \Delta\alpha \text{ และ } \nabla\alpha\beta = (\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\beta \subseteq \nabla\beta$$

α จะเรียกว่าการแปลงบนเซต X ถ้า $\alpha \in P_X$ และ $\Delta\alpha = X$

ให้ T_X แทนเซตของการแปลงบนเซต X ทั้งหมด นั่นคือ

$$T_X = \{ \alpha \in P_X \mid \Delta\alpha = X \}$$

จะเห็นว่าถ้า $\alpha, \beta \in T_X$ แล้ว $\Delta\alpha = \Delta\beta = X$ ดังนั้น $\Delta\alpha\beta = X$ นั่นคือ $\alpha\beta \in T_X$

จะได้ว่า T_X เป็นกึ่งกลุ่มย่อยของ P_X และ T_X จะเรียกว่ากึ่งกลุ่มของการแปลงเต็มบนเซต X (full transformations semigroup on X)

สำหรับ $\alpha \in P_X$, α จะเรียกว่าการแปลงบางส่วนชนิด 1-1 บนเซต X

ทฤษฎีบท 2.2 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า

$$E(P_X) = \{ \alpha \in P_X \mid \nabla\alpha \subseteq \Delta\alpha \text{ และ } x\alpha = x \text{ สำหรับทุก } x \in \nabla\alpha \}$$

พิสูจน์ : ให้ X เป็นเซตใด ๆ และ $\gamma \in E(P_X)$ ดังนั้น $\gamma^2 = \gamma$

เนื่องจาก $\Delta\gamma = \Delta\gamma^2 = \Delta\gamma\gamma = (\nabla\gamma \cap \Delta\gamma)\gamma^{-1}$

จะได้ว่า $\nabla\gamma = (\Delta\gamma)\gamma = \llbracket \nabla\gamma \cap \Delta\gamma \rrbracket \gamma^{-1} = (\nabla\gamma \cap \Delta\gamma)\gamma^{-1}\gamma = \nabla\gamma \cap \Delta\gamma \subseteq \Delta\gamma$

และสำหรับแต่ละ $a \in \nabla\gamma$ จะมี $x \in \Delta\gamma$ ซึ่ง $x\gamma = a$

จะได้ว่า $a = x\gamma = (x\gamma)\gamma = a\gamma$

ให้ $\beta \in P_X$ โดยที่ $\nabla\beta \subseteq \Delta\beta$ และ $x\beta = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in \nabla\beta$

จะได้ว่า $\Delta\beta\beta = (\nabla\beta \cap \Delta\beta)\beta^{-1} = (\nabla\beta)\beta^{-1} = \Delta\beta$ และสำหรับแต่ละ $x \in \Delta\beta$

จะได้ว่า

$x\beta \in \nabla\beta$ ดังนั้น $x(\beta\beta) = (x\beta)\beta = x\beta$ เพราะฉะนั้น $\beta^2 = \beta$

□

สำหรับ $\alpha \in P_X$ เซต $S(\alpha) = \{x \in \Delta\alpha \mid x\alpha \neq x\}$ จะเรียกว่าการเลื่อน (shift) ของ α และ α จะเรียกว่าการแปลงบางส่วนที่เกือบเป็นเอกลักษณ์บนเซต X (almost identical partial transformation on X) ถ้า $S(\alpha)$ เป็นเซตจำกัด

ให้ $U_X = \{\alpha \in P_X \mid |S(\alpha)| < \infty\}$

$V_X = \{\alpha \in T_X \mid |S(\alpha)| < \infty\}$

$W_X = \{\alpha \in I_X \mid |S(\alpha)| < \infty\}$

จะได้ว่า U_X, V_X และ W_X เป็นเซตย่อยของ P_X, T_X และ I_X ตามลำดับ ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้จะเป็นการแสดงว่า U_X, V_X และ W_X เป็นกึ่งกลุ่มย่อยของ P_X, T_X และ I_X ตามลำดับ ซึ่งต้องใช้ทฤษฎีบทประกอบดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.3 : สำหรับ $\alpha, \beta \in P_X$ จะได้ว่า $S(\alpha\beta) \subseteq S(\alpha) \cup S(\beta)$

พิสูจน์ : ให้ $\alpha, \beta \in P_X$ และ $x \in S(\alpha\beta)$

สมมติว่า $x \notin S(\alpha)$ จะได้ว่า $x\alpha = x$ ดังนั้น $x \neq x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\beta$ นั่นคือ $x \in S(\beta)$ ดังนั้น $S(\alpha\beta) \subseteq S(\alpha) \cup S(\beta)$

□

ทฤษฎีบท 2.4 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า U_X , V_X และ W_X เป็นกึ่งกลุ่มย่อยของ P_X , T_X และ I_X ตามลำดับ

พิสูจน์ : 1) จะแสดงว่า U_X เป็นกึ่งกลุ่มย่อยของ P_X

ให้ $\alpha, \beta \in U_X$ ดังนั้น $|S(\alpha)| < \infty$ และ $|S(\beta)| < \infty$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.3

จะได้ว่า $S(\alpha\beta) \subseteq S(\alpha) \cup S(\beta)$

ดังนั้น $|S(\alpha\beta)| \leq |S(\alpha) \cup S(\beta)| \leq |S(\alpha)| + |S(\beta)| < \infty$

นั่นคือ $\alpha\beta \in U_X$ เพราะฉะนั้น U_X เป็นกึ่งกลุ่มย่อยของ P_X

2) จะแสดงว่า V_X เป็นกึ่งกลุ่มย่อยของ T_X

ให้ $\alpha, \beta \in V_X$ จะได้ว่า $\Delta\alpha = \Delta\beta = X$ และ $|S(\alpha)| < \infty$, $|S(\beta)| < \infty$

ดังนั้น $\Delta\alpha\beta = (\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\alpha^{-1} = (\nabla\alpha \cap X)\alpha^{-1} = (\nabla\alpha)\alpha^{-1} = \Delta\alpha = X$

และในทำนองเดียวกันกับข้อ 1) ก็จะได้ว่า $|S(\alpha\beta)| < \infty$ นั่นคือ $\alpha\beta \in V_X$

เพราะฉะนั้น V_X เป็นกึ่งกลุ่มย่อยของ T_X

3) จะแสดงว่า W_X เป็นกึ่งกลุ่มย่อยของ I_X

ให้ $\alpha, \beta \in W_X$ จะได้ว่า α และ β เป็นการแปลงชนิด 1-1 และ

$|S(\alpha)| < \infty$, $|S(\beta)| < \infty$ ดังนั้น $\alpha\beta$ เป็นการแปลงชนิด 1-1

และในทำนองเดียวกันกับข้อ 1) ก็จะได้ว่า $|S(\alpha\beta)| < \infty$ นั่นคือ $\alpha\beta \in W_X$

เพราะฉะนั้น W_X เป็นกึ่งกลุ่มย่อยของ I_X

□

สำหรับเซต X ใด ๆ จะเรียก U_X , V_X และ W_X ว่ากึ่งกลุ่มของการแปลงบางส่วนที่เกือบเป็นเอกลักษณ์บนเซต X ทั้งหมด (the semigroup of all almost identical partial transformations on X), กึ่งกลุ่มของการแปลงเต็มที่เกือบเป็นเอกลักษณ์บนเซต X ทั้งหมด (the semigroup of all almost identical full transformations on X) และกึ่งกลุ่มของการแปลงบางส่วนชนิด 1-1 ที่เกือบเป็นเอกลักษณ์บนเซต X ทั้งหมด (the semigroup of all almost identical 1-1 partial transformations on X) ตามลำดับ ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงว่า

$G_X \cap U_X = G_X \cap V_X = G_X \cap W_X$ เป็นกลุ่มหนึ่งหน่วยของ U_X , V_X และ W_X

ทฤษฎีบท 2.5 : สำหรับเซต X ใด ๆ จะได้ว่า $G_X \cap U_X = G_X \cap V_X = G_X \cap W_X$ เป็นกลุ่มหนึ่งหน่วยของ U_X, V_X , และ W_X

พิสูจน์ : เนื่องจาก $V_X \subseteq U_X$ จะได้ว่า $G_X \cap V_X \subseteq G_X \cap U_X$ และสำหรับ $\alpha \in G_X \cap U_X$ จะได้ว่า $\Delta\alpha = X$ และ $|S(\alpha)| < \infty$ ดังนั้น $\alpha \in V_X$ นั่นคือ $G_X \cap U_X \subseteq G_X \cap V_X$ ดังนั้น $G_X \cap V_X = G_X \cap U_X$

เนื่องจาก $W_X \subseteq U_X$ จะได้ว่า $G_X \cap W_X \subseteq G_X \cap U_X$ และสำหรับ $\alpha \in G_X \cap U_X$ จะได้ว่า α เป็นการแปลงชนิด 1-1 และ $|S(\alpha)| < \infty$ ดังนั้น $\alpha \in W_X$ นั่นคือ $G_X \cap U_X \subseteq G_X \cap W_X$ ดังนั้น $G_X \cap W_X = G_X \cap U_X$

ต่อไปจะแสดงว่า $G_X \cap U_X$ เป็นกลุ่มหนึ่งหน่วยของ U_X นั่นคือจะต้องแสดงว่า $G_X \cap U_X = \{\alpha \in U_X \mid \alpha\beta = \beta\alpha = 1 \text{ สำหรับบาง } \beta \in U_X\}$ ให้ $\alpha \in G_X \cap U_X$ ดังนั้น $\alpha \in G_X$ และ $\alpha \in U_X$ เนื่องจาก $\alpha \in G_X$ จะได้ว่า $\Delta\alpha = \nabla\alpha = X$ และ α เป็นการแปลงชนิด 1-1 ดังนั้นจะมีการแปลงผกผัน β ของ α ใน U_X ซึ่ง $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$

ให้ $\gamma \in \{\alpha \in U_X \mid \alpha\beta = \beta\alpha = 1 \text{ สำหรับบาง } \beta \in U_X\}$ ดังนั้นจะมี $\beta \in U_X$ ซึ่งทำให้ $\gamma\beta = \beta\gamma = 1$ นั่นคือ γ เป็นการแปลงผกผัน ทำให้ได้ว่า γ เป็นการแปลงชนิด 1-1 แบบทั่วถึง และเนื่องจาก $\gamma \in U_X$ ดังนั้น $|S(\gamma)| < \infty$ เพราะฉะนั้น $\gamma \in G_X \cap U_X$

เนื่องจาก $G_X \cap U_X = G_X \cap V_X \subseteq V_X \subseteq U_X, G_X \cap U_X = G_X \cap W_X \subseteq W_X \subseteq U_X$ และ $G_X \cap U_X$ เป็นกลุ่มย่อยที่ใหญ่ที่สุดของ U_X ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ ดังนั้น $G_X \cap U_X$ เป็นกลุ่มหนึ่งหน่วยของ V_X และ W_X

□

สำหรับหัวข้อต่อไปนี้จะกล่าวถึงความหมายและทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับปริภูมิเวกเตอร์ และการแปลงเชิงเส้นที่จำเป็นสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทในบทที่ 4 ซึ่งเป็นทฤษฎีหลักของการค้นคว้าครั้งนี้

2.2 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Space)

นิยาม 2.6 : ให้ $F \neq \emptyset$ เป็นเซตๆ หนึ่งซึ่งมีการดำเนินการ (operation) บนเซต F

อยู่ 2 ชนิดเรียกว่า "บวก" และ "คูณ" ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "+" และ "." ตามลำดับ จะเรียกระบบ $(F, +, \cdot)$ ว่า สนาม (field) ถ้าระบบนี้มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

- (1) $x+y \in F$ ทุกสมาชิก x, y ของ F
- (2) $x+(y+z) = (x+y)+z$ ทุกสมาชิก x, y, z ของ F
- (3) จะมี $0 \in F$ ซึ่งทำให้ $x+0 = x = 0+x$ ทุกสมาชิก x ของ F
- (4) แต่ละสมาชิก x ของ F จะมี $(-x) \in F$ ซึ่ง $x+(-x) = 0 = (-x)+x$
- (5) $x+y = y+x$ ทุกสมาชิก x, y ของ F
- (6) $x \cdot y \in F$ ทุกสมาชิก x, y ของ F
- (7) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ทุกสมาชิก x, y, z ของ F
- (8) $x \cdot y = y \cdot x$ ทุกสมาชิก x, y ของ F
- (9) จะมี $1 \in F$ ซึ่งทำให้ $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ ทุกสมาชิก x ของ F
- (10) แต่ละสมาชิก x ของ F ซึ่ง $x \neq 0$ จะมี $x^{-1} \in F$ ซึ่งทำให้ $x^{-1} \cdot x = 1 = x \cdot x^{-1}$
- (11) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ ทุกสมาชิก x, y, z ของ F

ตัวอย่างของระบบที่เป็นสนามได้แก่ $(R, +, \cdot)$ ซึ่งเป็นระบบที่ประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง R และการบวกการคูณของจำนวนจริง นอกจากนั้น

$Z_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$ และการบวกการคูณภายใต้คอนกรูเอนซ์มอดุโล n (congruence modulo n) เมื่อ n เป็นจำนวนเฉพาะ ก็เป็นสนามเช่นกัน

นิยาม 2.7 : ให้ F เป็นสนามและ V เป็นเซต ๆ หนึ่งซึ่ง $V \neq \emptyset$ จะกล่าวว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F (vector space over F) ถ้า

- (1) มีการดำเนินการ (operation) "+" เรียกว่า "บวก" บน V ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

$$A_1 : x+y \in V \text{ ทุกสมาชิก } x, y \text{ ของ } V$$

$$A_2 : x+y = y+x \text{ ทุกสมาชิก } x, y \text{ ของ } V$$

$$A_3 : x+(y+z) = (x+y)+z \text{ ทุกสมาชิก } x, y, z \text{ ของ } V$$

$$A_4 : \text{มีสมาชิก } 0 \in V \text{ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ } x+0 = x = 0+x$$

ทุกสมาชิก x ของ V

$$A_5 : \text{สำหรับแต่ละสมาชิก } x \text{ ของ } V \text{ จะมี } (-x) \in V \text{ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้}$$

$$x+(-x) = 0 = (-x)+x$$

(2) มีการดำเนินการอีกชนิดหนึ่งที่เรียกว่า "การคูณด้วยสเกลาร์" (scalar multiplication) ซึ่งหมายถึงการคูณสมาชิก x ใน V ด้วยสมาชิก c ใน F เขียนแทนด้วย cx และมีคุณสมบัติดังนี้ ถ้า $x, y \in V$ และ $c, d \in F$ แล้ว

$$S_1 : cx \in V$$

$$S_2 : c(x+y) = cx + cy$$

$$S_3 : (c+d)x = cx + dx$$

$$S_4 : (cd)x = c(dx)$$

$$S_5 : 1x = x$$

หมายเหตุ : ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F จะเรียกสมาชิกในเซต V ว่า

เวกเตอร์ (vector) เรียกสมาชิกในเซต F ว่า สเกลาร์ (scalar) และจะเรียกสมาชิก 0

ใน A_4 ว่า เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector)

2.3 ปริภูมิย่อย (Subspace)

นิยาม 2.8 : ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F และ W เป็นเซตย่อยของ V ซึ่ง $W \neq \emptyset$ จะเรียก W ว่า ปริภูมิย่อย ของ V ถ้า W เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F ภายใต้การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์เดียวกันกับ V และอีกนัยหนึ่งคือ

ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F และ W เป็นเซตย่อยของ V ซึ่ง $W \neq \emptyset$ แล้ว W จะเป็นปริภูมิย่อยของ V ก็ต่อเมื่อ

$$(1) x+y \in W \text{ ทุกเวกเตอร์ } x, y \text{ ใน } W$$

$$(2) cx \in W \text{ ทุกเวกเตอร์ } x \text{ ใน } W \text{ และทุกสเกลาร์ } c \text{ ใน } F$$

จะเห็นชัดว่าทุก ๆ ปริภูมิเวกเตอร์ V จะต้องมีปริภูมิย่อยอย่างน้อย 2 ปริภูมิคือ V (ปริภูมิเต็ม) และ $\{0\}$ คือเซตที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ศูนย์เพียงเวกเตอร์เดียว ปริภูมิย่อยทั้งสองนี้เรียกว่า ปริภูมิย่อยสามัญ (trivial subspace)

นิยาม 2.9 : ให้ $S = \{v_i \mid i \in I\}$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V บนสนาม F จะเรียกเวกเตอร์ v ใน V ว่าเป็น ผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ใน S ถ้า $v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$ โดยที่ $\alpha_i \in F$ ทุก $i \in I$ และผลบวกดังกล่าว

มีพจน์ของผลบวกเป็นจำนวนจำกัด

ให้ $\langle S \rangle = \{ v \in V \mid v \text{ เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน } S \}$ จะกล่าวว่า
 S แผ่ทั่ว V ($\text{span } V$) ถ้า $V = \langle S \rangle$

ถ้า S เป็นเซตจำกัด ให้ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ จะได้ว่า

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in F \text{ ทุก } i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

ถ้า S เป็นเซตอนันต์ จะได้ว่า $\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in F, i \in I \text{ และผลบวก} \right.$

ดังกล่าวมีพจน์ของผลบวกเป็นจำนวนจำกัด}

ต่อไปในกรณีที่ S เป็นเซตอนันต์ จะเขียน $\sum \alpha_i v_i$ แทน $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i$

นั่นคือแต่ละเวกเตอร์ v ใน $\langle S \rangle$, $v = \sum \alpha_i v_i$

หมายเหตุ : I ในนิยาม 2.9 หมายถึงเซตดัรรชนี (index set)

นิยาม 2.10 : ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F และ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
 เป็นเซตย่อยของ V จะกล่าวว่า S เป็นเซตไม่อิสระต่อกันในตัวเอง (linearly
 dependent set) บนสนาม F ถ้ามีสเกลาร์ $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$

ซึ่งบางตัวไม่เท่ากับ 0 และทำให้ $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$

ถ้าไม่สามารถหาสเกลาร์ที่มีลักษณะดังกล่าวได้ จะเรียก S ว่าเป็น
เซตอิสระต่อกันในตัวเอง (linearly independent set) บนสนาม F

นั่นคือ S จะเป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง

ถ้า $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ ซึ่งทำให้ $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$

แล้ว $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

ถ้า S เป็นเซตอนันต์ จะกล่าวว่า S เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ถ้าทุก ๆ
 เซตย่อยจำกัดของ S เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง

ตัวอย่าง : ให้ $V = \mathbb{R}^\infty$ และ $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, ...
 จะได้ว่า $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเองใน V ทั้งนี้เพราะ

ถ้า $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in R$ และ $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n + \dots = 0$ จะได้ว่า
 $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ เพราะฉะนั้น $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = 0$

จากนิยามของเซตอิสระต่อกันในตัวเอง จะได้ข้อสรุปดังต่อไปนี้

ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ S_1, S_2 เป็นเซตย่อยของ V ซึ่ง $S_1 \subseteq S_2$ จะได้ว่า

ถ้า S_1 เป็นเซตไม่อิสระต่อกันในตัวเอง แล้ว S_2 จะเป็นเซตไม่อิสระต่อกันในตัวเอง และ

ถ้า S_2 เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง แล้ว S_1 จะเป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง

นิยาม 2.11 : ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F และ S เป็นเซตย่อยของ V จะกล่าวว่า S เป็น มูลฐาน (basis) ของ V ถ้า S เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเองที่ใหญ่ที่สุด เฉพาะกลุ่มของ V

จากนิยามจะเห็นว่า ถ้า $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V แล้วจะได้ว่า S เป็นมูลฐานของ V ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละเวกเตอร์ v ใน V จะต้องมีส่วน $a_1, a_2, \dots, a_n$ ใน F เพียงชุดเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ และถ้า S และ T เป็นมูลฐานของ V แล้วจะได้ว่า $|S| = |T|$

นิยาม 2.12 : ปริภูมิเวกเตอร์ V จะมีมิติจำกัดถ้ามูลฐานของ V เป็นเซตจำกัด และถ้ามูลฐานของ V มีสมาชิก n ตัวจะกล่าวว่า V มีมิติ n และเขียนแทนด้วย $\dim(V) = n$

ถ้ามูลฐานของ V เป็นเซตอนันต์ จะกล่าวว่า V มีมิติอนันต์

หมายเหตุ : กำหนดให้ $\dim(\{0\}) = 0$

จากนิยามของเซตอิสระต่อกันในตัวเองและเซตแผ่ทั่ว จะได้ข้อสรุปต่อไปนี้
 ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติเท่ากับ n และ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V จะได้ว่า ถ้า S เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเองใน V และ S เป็นเซตที่แผ่ทั่ว V แล้ว S จะเป็นมูลฐานของ V และถ้า $T = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ โดยที่ $m < n$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเองใน V แล้ว จะมีเวกเตอร์ $w_1, w_2, \dots, w_{n-m}$ ใน V ที่ทำให้เซต $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_{n-m}\}$ เป็นมูลฐานของ V

2.4 ผลบวกของปริภูมิเวกเตอร์ (Sum of Vector Spaces)

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F และ U, W เป็นปริภูมิย่อยของ V ผลบวกของ U และ W ซึ่งเขียนแทนด้วย $U + W$ หมายถึงเซตย่อยของ V ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ซึ่งอยู่ในรูป $u + w$ โดยที่ $u \in U$ และ $w \in W$ นั่นคือ $U + W = \{u + w \mid u \in U \text{ และ } w \in W\}$

นิยาม 2.13 : ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ U, W เป็นปริภูมิย่อยของ V จะกล่าวว่า V เป็น ผลบวกโดยตรง (direct sum) ของ U และ W ถ้าทุก ๆ เวกเตอร์ v ใน V สามารถเขียนได้ในรูป $v = u + w$ โดยที่ $u \in U$ และ $w \in W$ ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น และจะเขียน $V = U \oplus W$ แทน V เป็นผลบวกโดยตรงของ U และ W

จากนิยามจะเห็นได้ชัดว่า $V = U \oplus W$ ก็ต่อเมื่อ $V = U + W$ และ $U \cap W = \{0\}$ และถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด ซึ่ง $V = U \oplus W$ แล้วจะได้ว่า $\dim(V) = \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$

ทฤษฎีบท 2.14 : ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด และ W เป็นปริภูมิย่อยของ V แล้ว จะมีปริภูมิย่อย U ของ V ซึ่งทำให้ $V = U \oplus W$

พิสูจน์ : สมมติให้ปริภูมิเวกเตอร์ V มีมิติเท่ากับ n และให้ $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ เป็นมูลฐานหนึ่งของ W จะได้ว่า S_1 เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n$ ใน V ซึ่งทำให้ $S_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ เป็นมูลฐานสำหรับ V ให้ U เป็นปริภูมิย่อยของ V ที่แผ่ทั่วด้วยเซต $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ จะต้องพิสูจน์ว่า $V = W \oplus U$ ให้ v เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V เนื่องจาก S_2 เป็นมูลฐานของ V ดังนั้นจะมีสเกลาร์ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ที่ทำให้ $v = (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r) + (a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n)$ เพราะว่า $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r \in W$ และ $a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n \in U$ เพราะฉะนั้น $v = w + u$ โดยที่ $w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$ และ $u = a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n$ สมมติให้มีเวกเตอร์ w' ใน W และ u' ใน U ซึ่งทำให้ $v = w' + u'$

เนื่องจาก $\{v_1, \dots, v_r\}$ เป็นมูลฐานสำหรับ W และ $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ เป็นเซตที่แผ่ทั่ว U จะได้ว่าสเกลาร์ $b_1, b_2, \dots, b_n$ ซึ่งทำให้ $w' = b_1 v_1 + \dots + b_r v_r$ และ $u' = b_{r+1} v_{r+1} + \dots + b_n v_n$ ดังนั้น $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_r v_r + b_{r+1} v_{r+1} + \dots + b_n v_n$ เพราะฉะนั้น $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$ นั่นคือ $(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0$ เนื่องจาก $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง จะได้ว่า $a_i - b_i = 0$ นั่นคือ $a_i = b_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$ แสดงว่า $w = w'$ และ $u = u'$

□

2.4 การแปลงเชิงเส้น (Linear Transformation)

นิยาม 2.15 : ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F และ T เป็นฟังก์ชันจาก V ไปยัง W จะกล่าวว่า T เป็น การแปลงเชิงเส้น (linear transformation) ถ้า T มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

- (1) $(v_1 + v_2)T = v_1T + v_2T$ ทุกเวกเตอร์ v_1, v_2 ใน V
- (2) $(cv)T = c(vT)$ ทุกเวกเตอร์ v ใน V และสเกลาร์ c ใน F

ให้ $L(V) = \{T \mid T \text{ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก } V \text{ ไปยัง } V\}$ และจะเรียก T ใน $L(V)$ ว่า การแปลงเชิงเส้นบน V (linear transformation on V)

ทฤษฎีบท 2.16 : ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F ซึ่ง $\dim(V) = n$ ให้ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นมูลฐานของ V ถ้า W เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F และ $w_1, w_2, \dots, w_n$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน W แล้วจะมีการแปลงเชิงเส้น T จาก V ไปยัง W เพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้น ซึ่ง $v_i T = w_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

พิสูจน์ : ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม F และ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นมูลฐานของ V จะได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ x ใด ๆ ใน V จะต้องมีสเกลาร์ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ใน F

ที่ทำให้ $x = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$

ให้ $T: V \rightarrow W$ กำหนดการส่งโดย $xT = a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_nw_n$

ต่อไปจะแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น ให้ $x, y \in V$

จะได้ว่า $x = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ และ $y = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n$

สำหรับบางสเกลาร์ $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ ใน F ดังนั้น

$$\begin{aligned}(x+y)T &= [(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) + (b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n)]T \\&= [(a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \dots + (a_n + b_n)v_n]T \\&= (a_1 + b_1)w_1 + (a_2 + b_2)w_2 + \dots + (a_n + b_n)w_n \\&= (a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_nw_n) + (b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_nw_n) \\&= xT + yT\end{aligned}$$

ให้ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ ใน F จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(cx)T &= [c(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n)]T \\&= (ca_1v_1 + ca_2v_2 + \dots + ca_nv_n)T \\&= (ca_1)w_1 + (ca_2)w_2 + \dots + (ca_n)w_n \\&= c(a_1w_1) + c(a_2w_2) + \dots + c(a_nw_n) \\&= c(a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_nw_n) \\&= c(xT)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น T เป็นการแปลงเชิงเส้น และยังได้ว่า $v_iT = w_i$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$

ทั้งนี้เพราะ

$$\begin{aligned}v_iT &= (0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_n)T \\&= 0w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_{i-1} + 1w_i + 0w_{i+1} + \dots + 0w_n \\&= w_i\end{aligned}$$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$

ต่อไปจะพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน T ที่มีคุณสมบัติดังกล่าวมีเพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้น

สมมติให้ T เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง W ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $v_iT = w_i$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ ดังนั้นสำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ x ใน V ,

$x = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ บางสเกลาร์ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ใน F จะได้ว่า

$$\begin{aligned}xT &= (a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n)T \\&= a_1(v_1T) + a_2(v_2T) + \dots + a_n(v_nT)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n \\
 &= xT \\
 \text{นั่นคือ} \quad &T^* = T
 \end{aligned}$$

□

นิยาม 2.17 : ให้ T เป็นการแปลงเชิงเส้นจากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปยังปริภูมิเวกเตอร์ W จะเรียกเซตย่อย $\{v \in V \mid vT = 0\}$ ของ V ว่า ส่วนกลางของ T (kernel of T) และจะเขียนแทนด้วย $\text{Ker } T$ จะเรียกเซตย่อย $\{y \in W \mid xT = y \text{ สำหรับบางเวกเตอร์ } x \text{ ใน } V\}$ ของ W ว่า ภาพ (image) ของ V ภายใต้ T และจะเขียนแทนด้วย $\text{Im } T$

จะได้ว่า $\text{Ker } T$ เป็นปริภูมิย่อยของ V และ $\text{Im } T$ เป็นปริภูมิย่อยของ W นอกจากนี้ยังได้ว่า $\dim(V) = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T)$ และถ้า $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ แล้วจะได้ว่า T เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่งก็ต่อเมื่อ T เป็นฟังก์ชันชนิดทั่วถึง