

ผลลัพธ์ที่สำคัญ

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทประกอบต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องนำไปช่วยในการแสดงว่าสมการ

$$x^4 + 2iy^4 = z^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ไม่มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ในเซตจำนวนเต็มเกาส์ ซึ่งจะแสดงให้เห็นจริงในทฤษฎีบทสุดท้ายและเป็นทฤษฎีบทหลักของการวิจัยนี้ ก่อนอื่นจะให้นิยามของคำตอบปฐมฐาน (primitive solution) ของสมการ (1)

ก่อน ถ้าสมาชิก a, b และ c ของ G เป็นคำตอบของสมการ (1) ซึ่ง $a^4 + 2ib^4 = c^2$ แล้ว จะกล่าวว่า อันดับสามชั้น (a,b,c) เป็นคำตอบของสมการ (1)

นิยาม 3.1 อันดับสามชั้น (a,b,c) ใน G จะเป็นคำตอบปฐมฐานของสมการ (1) ก็ต่อเมื่อ a, b, c สอดคล้องสมการ (1) และแต่ละคู่ของ a, b, c เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ทฤษฎีบทประกอบแรกจะแสดงให้เห็นว่า ถ้าสมการ (1) มีคำตอบ (x,y,z) ใน G ซึ่ง $xyz \neq 0$ แล้วสมการ (1) จะมีคำตอบ (a,b,c) ใน G ซึ่ง a, b, c เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1 ถ้า (x,y,z) ใน G ซึ่ง $xyz \neq 0$ เป็นคำตอบของสมการ (1) แล้ว สมการ (1) จะมีคำตอบ (x_0,y_0,z_0) ใน G ซึ่ง x_0,y_0,z_0 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

พิสูจน์ สมมุติว่า อันดับสามชั้น (x,y,z) ใน G ซึ่ง $xyz \neq 0$ เป็นคำตอบของสมการ (1)

ให้ $p, N(p) > 1$ เป็น ห.ร.ม. ของ x, y, z เนื่องจาก

$$x^4 + 2iy^4 = z^2$$

หารตลอดด้วย p^4 จะได้

$$\frac{x^4}{p^4} + 2i\frac{y^4}{p^4} = \frac{z^2}{p^4}$$

หรือ

$$\left(\frac{x}{p}\right)^4 + 2i\left(\frac{y}{p}\right)^4 = \left(\frac{z}{p^2}\right)^2$$

ดังนั้น $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p^2}$ เป็นคำตอบของสมการ (1) เนื่องจาก $\left(\frac{x}{p}\right)^4 + 2i\left(\frac{y}{p}\right)^4$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์

จะได้ว่า $\left(\frac{z}{p^2}\right)^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ด้วย ดังนั้นโดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $\frac{z}{p^2}$

เป็นจำนวนเต็มเกาส์ด้วยเช่นเดียวกัน ถ้าให้

$$x_0 = \frac{x}{p}, \quad y_0 = \frac{y}{p}, \quad z_0 = \frac{z}{p^2}$$

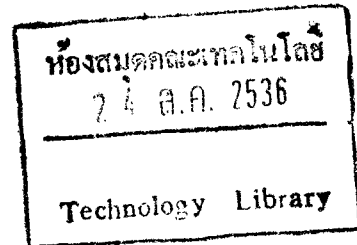
จะได้ว่า (x_0,y_0,z_0) เป็นคำตอบของสมการ (1) ที่เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

□

จากทฤษฎีบทประกอบ 3.1 จะเห็นว่าถ้าสมการ (1) มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ใน G แล้วเราสามารถเลือกคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ (x,y,z) ซึ่ง x,y,z เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน และยิ่งกว่านั้นเนื่องจาก x,y,z เป็นจำนวนเต็มเกาส์ เราสามารถเลือกคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ซึ่ง x,y,z เป็นจำนวนเฉพาะต่อกันและ $N(z)$ มีค่าน้อยสุดได้ด้วย จากคุณสมบัตินี้เราสามารถแสดงได้ว่า ถ้าสมการ (1) มีคำตอบ (x,y,z) ใน G ซึ่ง $xyz \neq 0$ แล้ว สมการ (1) จะมีคำตอบปฐมฐานเสมอ ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.2 ถ้า (x, y, z) ใน G ซึ่ง $xyz \neq 0$ เป็นคำตอบของสมการ (1) แล้ว สมการ (1) จะมีคำตอบ (x_0, y_0, z_0) ใน G ซึ่ง $x_0 y_0 z_0 \neq 0$ และ (x_0, y_0, z_0) เป็นคำตอบปฐมฐานของสมการ (1)
พิสูจน์ เลือก (x_0, y_0, z_0) , $x_0 y_0 z_0 \neq 0$ ใน G เป็นคำตอบของสมการ (1) ซึ่ง $N(z_0)$ มีค่าน้อยที่สุด
 ถ้า p , $N(p) > 1$ เป็น ห.ร.ม. ของ x_0, y_0 จะมี x_1, y_1 ใน G ซึ่ง

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 p, \quad y_0 = y_1 p \\ \text{ดังนั้น} \quad (x_1 p)^4 + 2i(y_1 p)^4 &= z_0^2 \\ x_1^4 p^4 + 2iy_1^4 p^4 &= z_0^2 \\ x_1^4 + 2iy_1^4 &= \frac{z_0^2}{p^4} = \left(\frac{z_0}{p^2}\right)^2 \end{aligned}$$



เนื่องจาก $x_1^4 + 2iy_1^4$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ จะได้ว่า $\left(\frac{z_0}{p^2}\right)^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ด้วย โดยทฤษฎีบท

ประกอบ 2.1 จะได้ว่า $\frac{z_0}{p^2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ด้วย ดังนั้น $(x_1, y_1, \frac{z_0}{p^2})$ เป็นคำตอบที่เป็นจำนวน

เฉพาะต่อกันของสมการ (1) เนื่องจาก $N(p) > 1$ จะได้ว่า $N(z_0) > N\left(\frac{z_0}{p^2}\right)$ ซึ่งขัดแย้งกับ $N(z_0)$ มีค่าน้อยที่สุด

ดังนั้น x_0, y_0 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ถ้า q , $N(q) > 1$ เป็น ห.ร.ม. ของ y_0, z_0 จะมี y_2, z_2 ใน G ซึ่ง

$$\begin{aligned} y_0 &= y_2 q, \quad z_0 = z_2 q \\ \text{ดังนั้น} \quad x_0^4 + 2iy_2^4 q^4 &= z_2^4 q^2 \\ \left(\frac{x_0}{q}\right)^2 &= \frac{x_0^4}{z_2^4 q^2} = \frac{z_2^2}{z_2^4} - 2iy_2^4 q^2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $z_2^2 - 2iy_2^4 q^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ จะได้ว่า $\left(\frac{x_0}{q}\right)^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ ดังนั้น $\frac{x_0}{q}$ เป็น

จำนวนเต็มเกาส์ด้วย นั่นคือ $q \mid x_0^2$ จะได้ว่ามีจำนวนเฉพาะ d ที่เป็นตัวประกอบของ q ซึ่ง $d \mid x_0$ ซึ่งขัดแย้ง

กับ x_0, y_0, z_0 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ถ้า r , $N(r) > 1$ เป็น ห.ร.ม. ของ x_0, z_0 จะมี x_3, z_3 ใน G ซึ่ง

$$\begin{aligned} x_0 &= x_3 r, \quad z_0 = z_3 r \\ \text{ดังนั้น} \quad (x_3 r)^4 + 2iy_0^4 &= (z_3 r)^2 \end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad x_0^4 + 2iy_0^4 = z_0^2$$

$$2iy_0^4 = z_0^2 - x_0^4$$

เนื่องจาก $2iy_0^4$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ จะได้ว่า x_0 และ z_0 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ทั้งคู่ หรือ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ทั้งคู่ ถ้า x_0 และ z_0 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ทั้งคู่ จะได้ว่า r เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ด้วย ดังนั้น r และ $1+i$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จาก

$$x_3^4 r^4 + 2iy_0^4 = z_3^2 r^2$$

จะได้ว่า $r^2 | 2iy_0^4$ ดังนั้น $r | (1+i)y_0^2$

จะได้ว่า $r | y_0^2$ ซึ่งขัดแย้งกับ x_0, y_0, z_0 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ถ้า x_0 และ z_0 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ทั้งคู่ ดังนั้น r จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ด้วย

ให้ $r = (1+i)s$ แทนค่าใน

$$x_3^4 r^4 + 2iy_0^4 = z_3^2 r^2$$

จะได้ว่า $(1+i)^4 s^4 x_3^4 + 2iy_0^4 = (1+i)^2 s^2 z_3^2$

$$2is^4 x_3^4 + y_0^4 = s^2 z_3^2$$

ให้ $x_4 = sx_3$, $z_4 = sz_3$

$$y_0^4 + 2ix_4^4 = z_4^2$$

จะได้ว่า (y_0, x_4, z_4) เป็นคำตอบของสมการ (1)

$$\begin{aligned} N(z_0) &= N(rz_3) \\ &= N[(1+i)sz_3] \\ &= N[(1+i)z_4] \\ &= 2N(z_4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $N(z_0) > N(z_4)$ ซึ่งขัดแย้งกับ $N(z_0)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ x_0, z_0 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จะได้ว่า (x_0, y_0, z_0) เป็นคำตอบปฐมฐานของสมการ (1)

□

จากทฤษฎีบทประกอบ 3.1 และ 3.2 จะได้ว่า ถ้าสมการ (1) มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ในเซตจำนวนเต็มเกาส์แล้ว สมการ (1) จะมีคำตอบปฐมฐานในเซตจำนวนเต็มเกาส์เสมอ ดังนั้นในการพิสูจน์ต่อไปนี้

ถ้ากล่าวถึงคำตอบของสมการ (1) จะหมายถึงคำตอบปฐมฐาน

ถ้า (x, y, z) เป็นคำตอบของสมการ (1) จะเห็นว่า

$$2iy^4 = z^2 - x^4 = (z - x^2)(z + x^2)$$

จากผลที่ได้นี้เราสามารถแสดงได้ว่า 2 เป็น ห.ร.ม. ของ $z - x^2$ กับ $z + x^2$ ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3 ถ้า (x, y, z) เป็นคำตอบของสมการ (1) ใน G แล้ว 2 จะเป็น ห.ร.ม. ของ $z - x^2$ กับ $z + x^2$

พิสูจน์ เนื่องจาก $x^4 + 2iy^4 = z^2$

$$2iy^4 = z^2 - x^4$$

จะได้ว่า $z^2 - x^4$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ ดังนั้น z และ x เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ทั้งคู่หรือเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ทั้งคู่ แต่เนื่องจาก x และ z เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จะได้ว่า x และ z เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ทั้งคู่ ให้

$$x = \delta x_1 + 1, z = \delta z_1 + 1 \quad (\delta = 1+i)$$

จะได้ว่า $z - x^2 = \delta z_1 - \delta^2 x_1^2 - 2\delta x_1$

$$z + x^2 = \delta z_1 + \delta^2 x_1^2 + 2\delta x_1 + 2$$

จะแสดงว่า z_1 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ เนื่องจาก

$$x^4 + 2iy^4 = z^2$$

$$(x^2)^2 + (\delta y^2)^2 = z^2$$

โดย [4] จะได้ว่ามี a, b ที่เป็นจำนวนเฉพาะต่อกันมีส่วนจริงเป็นจำนวนเต็มบวกและ $(\text{odd})_r$ ซึ่ง

$$x^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad \delta y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad z = ab$$

จาก a, b เป็น $(\text{odd})_r$ ให้

$$a = 2a_1 + 1 + 2ia_2, \quad b = 2b_1 + 1 + 2ib_2$$

เมื่อ a_1, a_2, b_1, b_2 เป็นจำนวนเต็ม $a_1 \geq 0, b_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} z &= ab \\ &= [2a_1 + 1 + 2ia_2][2b_1 + 1 + 2ib_2] \\ &= 4a_1b_1 + 2a_1 + 2b_1 - 4a_2b_2 + 1 + [2a_2(2b_1 + 1) + 2b_2(2a_1 + 1)]i \\ &= 2[(2a_1b_1 + a_1 + b_1 - 2a_2b_2) + (a_2(2b_1 + 1) + b_2(2a_1 + 1))i] + 1 \\ &= \delta z_1 + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น z_1 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ ให้ $z_1 = \delta z_2$ จะได้ว่า

$$z - x^2 = \delta^2 z_2 - \delta^2 x_1^2 - 2\delta x_1$$

$$z + x^2 = \delta^2 z_2 + \delta^2 x_1^2 + 2\delta x_1 + 2$$

ดังนั้น $2l(z - x^2)$ และ $2l(z + x^2)$

ให้ p เป็นจำนวนเต็มเกาส์ ซึ่ง $N(p) > 1$ โดยที่

$$p \mid (z - x^2) \text{ และ } p \mid (z + x^2)$$

เนื่องจาก $2z = (z - x^2) + (z + x^2)$

$$2x^2 = (z + x^2) - (z - x^2)$$

จะได้ว่า $p \mid 2z$ และ $p \mid 2x^2$

สมมุติว่า p หาร 2 ไม่ลงตัว จะได้ว่า p ไม่เป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกัน (associate) กับ δ และ $p \neq 2$ ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า p และ 2 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ดังนั้น $p \mid z$ และ $p \mid x$ ซึ่งขัดแย้งกับ z และ x เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ดังนั้น p ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า 2 เป็นตัวประกอบของ p จะมีตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะของ p ซึ่งหาร z และ x ลงตัว ซึ่งขัดแย้งกับ z และ x เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ถ้า δ เป็นตัวประกอบของ p แต่ 2 ไม่เป็นตัวประกอบของ p ให้ $p = \delta q$ จะได้ว่า $q \mid \delta z$ และ $q \mid \delta x^2$ จาก 2 ไม่เป็นตัวประกอบของ p จะได้ว่า δ และ q เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ดังนั้น $q \mid z$ และ $q \mid x$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ ถ้า δ และ 2 ไม่เป็นตัวประกอบของ p จะได้ว่า p และ 2 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน $p \mid z$ และ $p \mid x$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ ดังนั้น $p \mid 2$ นั่นคือ 2 เป็น ห.ร.ม. ของ $z - x^2$ และ $z + x^2$

□

จาก 2 เป็น ห.ร.ม. ของ $z-x^2$ และ $z+x^2$ จะทำให้สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญที่แสดงว่า
สมการ (1) ไม่มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ในเซตจำนวนเต็มเกาส์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.4 สมการ $x^4+2iy^4=z^2$ ไม่มีคำตอบ (x,y,z) ซึ่ง $xyz \neq 0$ ในเซตจำนวนเต็มเกาส์
พิสูจน์ สมมติว่าสมการ (1) มีคำตอบ (x,y,z) ใน G ซึ่ง $xyz \neq 0$ ในเซตจำนวนเต็มเกาส์ โดย
ทฤษฎีบทประกอบ 3.1 และ 3.2 สามารถเลือก (x,y,z) ซึ่งเป็นคำตอบปฐมนฐานและ $N(z)$ มีค่าน้อยสุด
โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.3 จะได้ว่า 2 เป็น ห.ร.ม. ของ $z-x^2$ และ $z+x^2$ ดังนั้นจะมี p,q ใน G ซึ่งเป็น
จำนวนเฉพาะต่อกัน และ

$$\begin{aligned} z-x^2 &= 2p, \quad z+x^2 = 2q \\ \text{จาก } x^4+2iy^4 &= z^2 \\ 2iy^4 &= z^2-x^4 \\ &= (z-x^2)(z+x^2) \\ &= 4pq \\ y^4 &= -2ipq \end{aligned}$$

เนื่องจาก p,q เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จะได้ว่าอย่างน้อย p หรือ q ต้องเป็นจำนวนเต็มเกาส์ที่ สมมุติ
ว่าเป็น q โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.2 จะแสดงได้ว่า $-2ip$ และ q เป็นจำนวนเฉพาะต่อกันด้วย ดังนั้นจะมี
จำนวนเต็มเกาส์ u และ v ซึ่ง

$$\begin{aligned} -2ip &= u^4, \quad q = v^4 \\ \text{ดังนั้น } z-x^2 &= 2\left(\frac{u^4}{-2i}\right) = iu^4 \\ z+x^2 &= 2v^4 \\ 2ix^2 &= 2iv^4+u^4 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $u^4+2iv^4 = (\delta x)^2$ ดังนั้น $(u,v, \delta x)$ เป็นคำตอบของสมการ (1)

ต่อไปจะแสดงว่า $N(z) > N(\delta x)$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } x^4+2iy^4 &= z^2 \\ (x^2)^2+(\delta y^2)^2 &= z^2 \end{aligned}$$

โดย [4] จะได้ว่ามี a,b เป็นจำนวนเต็มเกาส์ $(\text{odd})_r$ ที่มีส่วนจริงเป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นจำนวน
เฉพาะต่อกัน ซึ่ง

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a^2-b^2}{2i} \\ \delta y^2 &= \frac{a^2+b^2}{2} \\ z &= ab \\ \text{จาก } x^2 &= \frac{a^2-b^2}{2i} \\ 2ix^2 &= a^2-b^2 \\ (\delta x)^2+b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า มี p,q ใน G ซึ่งเป็น $(\text{odd})_r$ ที่มีส่วนจริงเป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นจำนวนเฉพาะต่อกันซึ่ง

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{p^2-q^2}{2i} \\ b &= \frac{p^2+q^2}{2} \end{aligned}$$

$$a = pq$$

$$z = pq\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right)$$

สมมุติว่า

$$p = m+ni, \quad q = r+si$$

$$\begin{aligned}\delta x &= \frac{p^2-q^2}{2i} = \frac{(p-qi)(p+qi)}{2i} \\ &= \frac{[(m-r)+(n-s)i][(m+r)(n+s)i]}{2i}\end{aligned}$$

$$N(\delta x) = \frac{(m^2+n^2+r^2+s^2)^2 - 4(mr+ns)^2}{4}$$

$$N(z) = (m^2+n^2)(r^2+s^2) \frac{[(m^2+n^2+r^2+s^2)^2 - 4(ms-nr)^2]}{4}$$

เนื่องจาก m, r เป็นจำนวนเต็มบวกคือ n, s เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $(m^2+n^2+r^2+s^2)^2$ เป็นพหุคูณของ 4 และ $N(z) > 0$ ดังนั้น

$$(m^2+n^2+r^2+s^2)^2 > 4(ms-nr)^2$$

นั่นคือ จะมีจำนวนเต็มบวก n' ซึ่ง

$$(m^2+n^2+r^2+s^2)^2 - 4(ms-nr)^2 = 4n'$$

$$N(z) - N(\delta x) = (m^2+n^2)(r^2+s^2)n' - (ms-nr)^2 - n' + (mr+ns)^2$$

เนื่องจาก p, q เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จะได้ว่า $p \neq 0, q \neq 0$ ดังนั้น $N(z) - N(\delta x)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $n' = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}N(z) - N(\delta x) &\geq (m^2+n^2)(r^2+s^2) - (ms-nr)^2 - 1 + (mr+ns)^2 \\ &= m^2r^2 + m^2s^2 + n^2r^2 + n^2s^2 - m^2s^2 - n^2r^2 + 2mnrs - 1 + (mr+ns)^2 \\ &= 2(mr+ns)^2 - 1\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.3 จะได้ว่า $mr+ns \neq 0$ ดังนั้น $2(mr+ns)^2 - 1 > 0$ นั่นคือ $N(z) > N(\delta x)$ ซึ่งขัดแย้งกับ $N(z)$ มีค่าน้อยที่สุด ดังนั้นสมการ $x^4 + 2iy^4 = z^2$ ไม่มีคำตอบ (x, y, z) ซึ่ง $xyz \neq 0$ ในเซตจำนวนเต็มเกาส์

□