2ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงจำนวนเต็มเกาส์ ตลอดจนคุณสมบัติบางประการของจำนวนเต็มเกาส์ที่จำเป็นต้องใช้ในงานวิจัยนี้

เซตจำนวนเต็มเกาส์เป็นวงย่อยของเซตจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีสมาชิกเขียนอยู่ในรูป x+iy เมื่อ x , yเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งจะเขียนแทนด้วย G สำหรับ a , b ใน G จะกล่าวว่า a หาร b ลงตัวใน G ถ้ามี m ใน G ซึ่ง b = ma เขียนแทนด้วย a|b ถ้า $a \neq 0$, $b \neq 0$ จะกล่าวว่า p ใน G เป็น ห.ร.ม ของ a กับ b ถ้า

(1) p|a และ p|b ใน G

(2) ถ้า r อยู่ใน G และ r|a , r|b แล้ว r|p

สำหรับสมาชิก c = x+iy ใด ๆ ใน G จะกำหนดค่าประจำของ c ซึ่งเขียนแทนด้วย N(c) โดยที่ $N(c) = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ จากการกำหนดค่าประจำของจำนวนเต็มเกาส์ เราสามารถแสดงได้ว่าค่าประจำของจำนวนเต็มเกาส์ใด ๆ จะมีค่าเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ N(ab) = N(a)N(b) และถ้า $a \neq 0$ และ a|b ใน G แล้ว N(a)|N(b) ในเซตจำนวนเต็มด้วย

การกำหนดสมาชิกหนึ่งหน่วยใน G ก็กำหนดเช่นเดียวกับเซตอื่น ๆ ที่เคยพบมาแล้วในเรื่องพีชคณิต กล่าวคือ จำนวนเต็มเกาส์ u จะเป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยใน G ก็ต่อเมื่อมี u* ใน G ซึ่ง uu* = 1 นั่นคือ N(u) = 1 ซึ่งจะได้ว่าเซตของสมาชิกหนึ่งหน่วยใน G คือ U = { 1,-1,i,-i } จะกล่าวว่า a,b ใน G เป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกัน (associate) ถ้ามีสมาชิกหนึ่งหน่วย u ใน G ซึ่ง ua = b และ a ใน G จะเป็นจำนวนเฉพาะ (prime) ใน G ก็ต่อมเมื่อ a ไม่เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยและถ้า p|a ใน G แล้ว p จะเป็นจะเป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยหรือเป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกันกับ a และจะกล่าวว่า a,b ใน G เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน (relatively prime) ใน G ก็ต่อเมื่อ ห.ร. ม. ของ a กับ b เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยใน G

ในการกำหนดจำนวนเต็มเกาส์คู่และจำนวนเต็มเกาส์คี่นั้น เราจะกำหนดโดยอาศัยให้ $\delta = 1+i$ ทำหน้าที่คล้าย ๆ 2 ในเซตจำนวนเต็ม ก่อนอื่นเราจะเห็นว่า δ เป็นจำนวนเฉพาะใน G และใน [3] ได้แสดงให้เห็นว่า δ จะหารจำนวนเต็มเกาส์ a = x+yi ลงตัวใน G ก็ต่อเมื่อ x-y หารด้วย 2 ลงตัวในเซตจำนวนเต็ม และยังพบว่าสำหรับ a ใด ๆ ใน G a หารด้วย δ ลงตัวใน G หรือ a-1 หารด้วย δ ลงตัวใน G เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งอย่างเดียวเท่านั้น เราจะเรียก a ใน G ซึ่งหารด้วย δ ลงตัวว่า จำนวนเต็มเกาส์คู่ และเรียก b ใน G ซึ่ง b-1 หารด้วย δ ลงตัวว่า จำนวนเต็มเกาส์คี่ จะกล่าวว่า a,b ใน G เป็นสมาชิกคู่ที่แตกต่างกั ถ้า a เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ แต่ b เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ หรือ a เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ แต่ b เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ ถ้า a เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ที่มีส่วนจริงเป็นจำนวนเต็มคี่ จะกล่าวว่า a เป็น $(odd)_r$

จากการกำหนดจำนวนเต็มเกาส์คู่และจำนวนเต็มเกาส์คี่ เราสามารถแสดงได้ว่า

1) ผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คู่หรือผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คี่เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่

2) ผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คู่กับจำนวนเต็มเกาส์คี่เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่

3) ผลคูณของจำนวนเต็มเกาส์คู่กับจำนวนเต็มเกาส์คู่หรือคี่เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่

4) ให้ a เป็นจำนวนเต็มเกาส์ใด ๆ จะได้ว่า

4.1 ถ้า a^2 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่แล้ว a จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ด้วย

4.2 ถ้า b^2 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่แล้ว b จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ด้วย

นอกจากคุณสมบัติของจำนวนเต็มเกาส์ที่กล่าวมาแล้ว ยังต้องการคุณสมบัติอื่น ๆ ของจำนวนเต็มเกาส์อีก ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 ให้ a , b เป็นนจำนวนเต็มเกาส์ จะได้ว่า ถ้า $(\frac{a}{b})^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์แล้ว $\frac{a}{b}$ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์ด้วย

พิสูจน์ ถ้า a และ b เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จะแสดงว่า b เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย สมมุติว่า b ไม่เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย จะมีจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง p|b เนื่องจาก $b^2|a^2$ จะได้ว่า $p|a^2$ ด้วย ดังนั้น p|a นั่นคือ p หาร ห.ร.ม. ของ a กับ b ลงตัวใน G จะได้ว่า p เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย ซึ่งขัดแย้งกับ p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น b เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย นั่นคือ b|a ถ้า a กับ b ไม่เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ให้ d เป็น ห.ร.ม. ของ a กับ b จะมี a_1,b_1 ใน G ซึ่ง $a = da_1$, $b = db_1$ และ a_1 กับ b_1 เฉพาะต่อกัน จาก $b^2|a^2$ จะได้ว่า $b_1^2|a_1^2$ ด้วย ทำนองเดียวกันกับข้างต้น จะแสดงได้ว่า b_1 เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย ดังนั้น b เป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกันกับ d นั่นคือ b|a

❑

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ซึ่ง a เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ และ b เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่แล้ว a และ 2b จะเป็นจำนวนเฉพาะต่อกันด้วย

พิสูจน์ สมมุติว่า a และ 2b ไม่เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ให้ p เป็น ห.ร.ม. ของ a กับ 2b ซึ่ง p ไม่เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย จะได้ว่า p|a และ p|2b เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะได้ว่า p เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ด้วย ดังนั้น p ไม่เป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกันกับ 1+i นั่นคือ 2 หารด้วย p ไม่ลงตัว จะได้ว่า b หารด้วย p ลงตัว ดังนั้น ห.ร.ม. ของ a กับ b หารด้วย p ลงตัว ซึ่งขัดแย้งกับ a และ b เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน นั่นคือ a และ 2b เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

❑

ทฤษฎีบทประกอบ 2.3 ให้ x , y เป็นจำนวนเต็มเกาส์ ซึ่ง x = a+bi , y = c+di , a,b,c,d ไม่เป็นศูนย์ ถ้า x และ y เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน แล้ว |ad| ≠ |bc|

พิสูจน์ สมมุติว่า |ad| = |bc| และให้ |ad| แยกเป็นตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะได้ $p_1p_2p_3\cdots p_r$ โดยที่ p_j , j = 1,2,3,...,r ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน ให้

$$|a| = p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k} \quad , \quad |d| = p_{i_{k+1}}p_{i_{k+2}}\cdots p_{i_r}$$

$$|b| = p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_m} \quad , \quad |c| = p_{j_{m+1}}p_{j_{m+2}}\cdots p_{j_r}$$

เนื่องจาก ถ้า $p_j \in \{p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_k}\}$ แต่ $p_j \notin \{p_{j_1},p_{j_2},\ldots,p_{j_m}\}$ แล้ว

$$p_j \in \{p_{j_{m+1}},p_{j_{m+2}},\ldots,p_{j_r}\}$$

และ ถ้า $p_{j'} \in \{p_{j_1},p_{j_2},\ldots,p_{j_m}\}$ แต่ $p_{j'} \notin \{p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_k}\}$ แล้ว

$$p_{j'} \in \{p_{i_{k+1}},p_{i_{k+2}},\ldots,p_{i_r}\}$$

และในทางกลับกันจะพิจารณาได้เช่นเดียวกัน ดังนั้น จะมี z ซึ่งไม่เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยใน G เป็นตัวประกอบร่วมของ a+bi กับ c+di ซึ่งขัดแย้งกับ a+bi กับ c+di เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน นั่นคือ |ad| = |bc|

❑