

### บทที่ 3

#### การวัดความสัมพันธ์

#### 3.1 กล่าวนำ

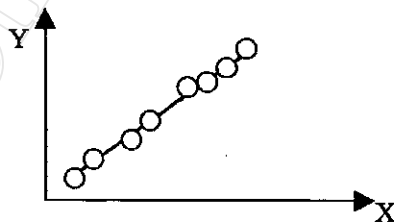
การศึกษาเรื่องสหสัมพันธ์เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจว่ามีความสัมพันธ์กันหรือไม่ และความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นไปในทิศทางใด เช่น การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับน้ำหนัก คะแนนเฉลี่ยชั้น ม.3 กับคะแนนสอบเข้าระดับ ปวช. ในการพิจารณาว่าค่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรมีมากน้อยเพียงใดนั้น ทราบได้โดยการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient)

สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็นค่าที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร โดยมีค่าตั้งแต่ -1.00 ถึง 1.00 ถ้ามีตัวแปร X และตัวแปร Y ความสัมพันธ์ของตัวแปร X และ Y อาจเป็นไปได้ดังนี้

##### 3.1.1 ตัวแปร X และ Y มีความสัมพันธ์กัน

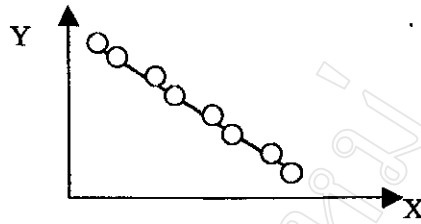
ตัวแปร X และ Y มีความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์ (Perfect Correlation) ซึ่งมี 2 ลักษณะคือ

- ความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์ทางบวกหรือในทางเดียวกัน (Positive Correlation) ในกรณีนี้สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จะมีค่าเป็น 1 ถ้าตัวแปร X เพิ่มขึ้นเท่าใดตัวแปร Y ก็เพิ่มขึ้นเท่านั้น ถ้าเขียนแผนภาพการกระจาย (Scatter Diagram) ลักษณะการกระจายของข้อมูลตัวแปร X และ Y จะเป็นเส้นตรง



รูปที่ 3.1 ข้อมูลที่มีความสัมพันธ์อย่างสมบูรณ์ทางบวก

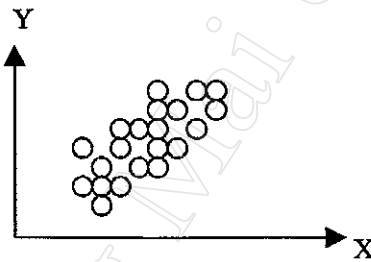
- ความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์ทางลบหรือในทางตรงกันข้าม ในกรณีนี้สัมประสิทธิ์จะมีค่าเป็น -1 ถ้าตัวแปร X เพิ่มขึ้น ตัวแปร Y จะลดลง



รูปที่ 3.2 ข้อมูลที่มีความสัมพันธ์อย่างสมบูรณ์ทางลบ

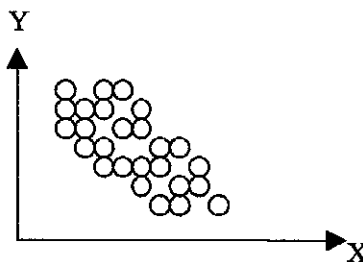
มีความสัมพันธ์กันอย่างไม่สมบูรณ์ มี 2 ลักษณะดังนี้

- ความสัมพันธ์กันอย่างไม่สมบูรณ์ทางบวก หรือในทางเดียวกัน สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 เช่น ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เท่ากับ 0.2 แสดงว่าตัวแปร X และตัวแปร Y มีความสัมพันธ์กันค่อนข้างน้อยแต่เป็นไปในทางเดียวกัน ลักษณะการกระจายของข้อมูลจะกระจายออกจากกันมาก ถ้าค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เท่ากับ 0.8 แสดงว่าตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันค่อนข้างมากและเป็นไปในทางเดียวกัน ข้อมูลจะไม่กระจายออกจากกันมาก



รูปที่ 3.3 ข้อมูลมีความสัมพันธ์ค่อนข้างมากและเป็นไปในทางเดียวกัน

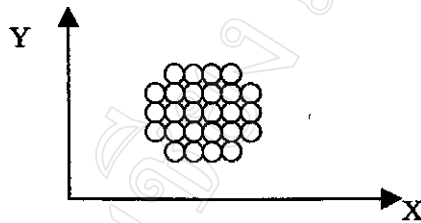
- ความสัมพันธ์กันอย่างไม่สมบูรณ์ทางลบหรือในทางตรงกันข้ามสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีค่าอยู่ระหว่าง -1 กับ 0 เช่น ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เท่ากับ -0.2 และ -0.8 แสดงว่าตัวแปร X และตัวแปร Y มีความสัมพันธ์กันในทางตรงกันข้าม โดยมีความสัมพันธ์ค่อนข้างน้อยและค่อนข้างมากตามลำดับ



รูปที่ 3.4 ข้อมูลมีความสัมพันธ์ค่อนข้างมากและเป็นไปในทางตรงข้าม

### 3.1.2 ตัวแปร X และ Y ไม่มีความสัมพันธ์กัน

ในกรณีที่ตัวแปร X และตัวแปร Y ไม่มีความสัมพันธ์กันเลย สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีค่าเป็น 0 ลักษณะการกระจายของข้อมูลมีรูปแบบไม่แน่นอน ทำให้ไม่สามารถระบุได้ว่าถ้าตัวแปรตัวหนึ่งเพิ่มขึ้นหรือลดลงแล้ว จะทำให้ตัวแปรอีกตัวหนึ่งเปลี่ยนแปลงไปในทางใด



รูปที่ 3.5 ข้อมูลที่ไม่มีความสัมพันธ์กัน

### 3.1.3 การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีหลายวิธี ในการเลือกใช้ผู้วิเคราะห์จำเป็นต้องพิจารณาถึงลักษณะข้อมูลของตัวแปรที่จะนำมาวิเคราะห์ สำหรับวิธีการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีดังนี้

1. สัมประสิทธิ์การณัจจร (The Contingency Coefficient)
2. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แครมเมอร์ วี (Crammer' V Correlation Coefficient)
3. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมน (The Spearman Rank Correlation Coefficient)
4. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์ (The Kendall Rank Correlation Coefficient)
5. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนดอลล์ (The Kendall Partial Rank Correlation Coefficient)
6. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ฟี (Phi Correlation Coefficient)
7. สัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนดอลล์ (The Kendall Coefficient of Concordance)

### 3.2 สัมประสิทธิ์การถ่วง (The Contingency Coefficient: C)

สัมประสิทธิ์การถ่วง ใช้สัญลักษณ์ C ซึ่งเป็นค่าสหสัมพันธ์ชนิดหนึ่ง การหาความสัมพันธ์ชนิดนี้ ใช้วัดระดับความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปร 2 ตัว เช่น X กับ Y เพื่อสามารถจัดหน่วยตัวอย่างโดยใช้ตารางการถ่วงขนาด  $r \times c$  ซึ่งตัวแปรทั้งคู่วัดได้โดยใช้มาตรานามบัญญัติ (Nominal Scale) และต้องใช้ค่า  $\chi^2$  ในการคำนวณหาค่าดัชนี วัดความมากน้อยของความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสอง เนื่องจากค่า  $\chi^2$  เป็นค่าที่เพียงแต่บอกว่าตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์กับตัวแปรตามอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่เท่านั้น ไม่ได้บอกถึงอัตราของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม และจะทราบได้จากการหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่วง ดังนั้นในกรณีทดสอบความสัมพันธ์ของตารางการถ่วงมีสมมติฐานดังนี้

#### สมมติฐานการทดสอบ

$H_0$  : ตัวแปรทั้ง 2 ไม่มีความสัมพันธ์กัน

$H_1$  : ตัวแปรทั้ง 2 มีความสัมพันธ์กัน

หรือ

$H_0$  :  $\rho = 0$

$H_1$  :  $\rho \neq 0$

เมื่อ  $\rho$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากร ของตัวแปร 2 ตัวแปร ซึ่งจะบอกถึงระดับความสัมพันธ์ว่ามีมากหรือน้อย และมีทิศทางความสัมพันธ์อย่างไร

#### การกำหนดตัวแปร

การหาค่าความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปร 2 ตัว โดยใช้สัมประสิทธิ์การถ่วง (Coefficient of Contingency) คำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} \quad (3.1)$$

และ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$C$  = สัมประสิทธิ์การฉ้อฉล

$N$  = จำนวนข้อมูลทั้งหมด

$O_{ij}$  = จำนวนความถี่จากการสังเกตในแถวที่  $i$  สดมภ์ที่  $j$

$E_{ij}$  = จำนวนความถี่ที่คาดหวังในแถวที่  $i$  และสดมภ์ที่  $j$

$r$  = จำนวนแถว

$c$  = จำนวนสดมภ์

### ขั้นตอนในการคำนวณ

1. พิจารณาตัวแปร 2 ตัวว่าอยู่ในมาตรฐานบัญญัติ
2. จัดข้อมูลให้อยู่ในรูปตารางการฉ้อฉล โดยนับความถี่ บรรจุลงในแต่ละเซลล์ของตารางการฉ้อฉล เช่น

ตัวแปร  $X$  มีค่าตั้งแต่  $X_1, X_2, \dots, X_c$

เมื่อ  $i = 1, 2, 3, \dots, c$

ตัวแปร  $Y$  มีค่าตั้งแต่  $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$

เมื่อ  $j = 1, 2, 3, \dots, r$

ค่าคงที่  $i, j, c, r$  เป็นจำนวนเต็มบวก

และ  $i \leq c, j \leq r$

จะได้ตารางการฉ้อฉลเป็นรูปแบบดังนี้

ตารางที่ 3.1 แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรสอง ชนิด

| $\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$ | $X_1$        | $X_2$        | $\dots$ | $X_c$        | รวม      |
|--------------------------------------|--------------|--------------|---------|--------------|----------|
| $Y_1$                                | $(X_1, Y_1)$ | $(X_2, Y_1)$ | $\dots$ | $(X_c, Y_1)$ | $R_1$    |
| $Y_2$                                | $(X_1, Y_2)$ | $(X_2, Y_2)$ | $\dots$ | $(X_c, Y_2)$ | $R_2$    |
| $Y_3$                                | $(X_1, Y_3)$ | $(X_2, Y_3)$ | $\dots$ | $(X_c, Y_3)$ | $R_3$    |
| $\vdots$                             | $\vdots$     | $\vdots$     |         | $\vdots$     | $\vdots$ |
| $Y_r$                                | $(X_1, Y_r)$ | $(X_2, Y_r)$ | $\dots$ | $(X_c, Y_r)$ | $R_r$    |
| รวม                                  | $C_1$        | $C_2$        | $\dots$ | $C_c$        | $N$      |

3. คำนวณค่า  $\chi^2$  จากสูตร สมการที่ (2.11)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

4. นำค่า  $\chi^2$  ที่คำนวณได้ไปเทียบกับค่าวิกฤตของ  $\chi^2$  ที่เปิดจากตาราง C ภาคผนวก  
ที่  $df = (r-1)(c-1)$

- ถ้า  $\chi^2_{\text{คำนวณ}} > \chi^2_{\text{ตาราง}}$  จะปฏิเสธสมมติฐาน  $H_0$  แสดงว่า ตัวแปร X และ Y มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญ
- ถ้า  $\chi^2_{\text{คำนวณ}} < \chi^2_{\text{ตาราง}}$  แสดงว่า ตัวแปร X และ Y นั้นไม่มีความสัมพันธ์กัน

5. คำนวณหาสัมประสิทธิ์การถ่วง หรือระดับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร  
จากสูตร สมการที่ (3.1)

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}}$$

**การทดสอบนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์การถ่วง (C)**

นัยสำคัญของสัมประสิทธิ์การถ่วงจะมีนัยสำคัญหรือไม่ขึ้นอยู่กับนัยสำคัญของค่า  $\chi^2$  ทั้งนี้เพราะต้องอาศัยค่า  $\chi^2$  ในการคำนวณ ดังสมการที่ (2.11) ดังนั้นถ้าค่า  $\chi^2$  มีนัยสำคัญค่าสัมประสิทธิ์การถ่วงก็มีนัยสำคัญด้วย หมายความว่า ตัวแปรทั้ง 2 มีความสัมพันธ์กันอย่างเชื่อถือได้

ถ้าค่า  $\chi^2$  ไม่มีนัยสำคัญค่าสัมประสิทธิ์การถ่วงก็ไม่มีนัยสำคัญด้วย หมายความว่า ตัวแปรทั้ง 2 มีความสัมพันธ์กันอย่างไม่น่าเชื่อถือ

**การแปลผลสัมประสิทธิ์การถ่วง**

ค่าสัมประสิทธิ์การถ่วง(C)ที่ได้ นิยมใช้ค่า C เพื่อเปรียบเทียบความมากน้อยของความสัมพันธ์ของตารางการถ่วงที่มีขนาดเดียวกัน

### ข้อจำกัดของสัมประสิทธิ์การถ่วง

1. กรณีที่ 1 ตัวแปร 2 ตัวแปรที่นำมาศึกษานั้นไม่มีความสัมพันธ์กัน จะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การถ่วง เท่ากับ 0

กรณีที่ 2 ตัวแปรมีความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์แล้วค่าสหสัมพันธ์จะเป็น 1 ซึ่งในการปฏิบัติจะพบได้เสมอในกรณีที่ 1 แต่ในกรณีที่ 2 มักจะไม่ค่อยพบเลย ซึ่งก็คือข้อจำกัดประการแรกของการหาค่า C

2. ค่า C เป็นฟังก์ชันของจำนวนช่องของตารางแจกแจงความถี่ เมื่อ  $k=r$  ค่า C ที่เป็นค่าสูงสุดจะคำนวณได้จาก

$$C_{\text{สูงสุด}} = \sqrt{\frac{c-1}{c}} \quad (3.2)$$

ถ้าใช้ตารางแจกแจงความถี่แบบ  $2 \times 2$

$$\text{ค่า } C_{\text{สูงสุด}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.71$$

ถ้าใช้ตารางแจกแจงความถี่แบบ  $3 \times 3$

$$\text{ค่า } C_{\text{สูงสุด}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.82$$

ตารางที่ 3.2 แสดงค่าสูงสุดของ C ของตารางการถ่วงที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนสดมภ์

| ขนาดของตารางการถ่วง( $r \times c$ ) | ค่าสูงสุดของ C |
|-------------------------------------|----------------|
| 2 x 2                               | 0.707          |
| 3 x 3                               | 0.816          |
| 4 x 4                               | 0.866          |
| 5 x 5                               | 0.894          |
| 6 x 6                               | 0.913          |
| 7 x 7                               | 0.926          |
| 8 x 8                               | 0.935          |
| 9 x 9                               | 0.943          |
| 10 x 10                             | 0.949          |

เมื่อเป็นเช่นนี้ ไม่สามารถนำค่า  $C$  มาเปรียบเทียบกันได้ ยกเว้นกรณีที่ค่า  $C$  ที่มาจากตารางแจกแจงความถี่ที่มี จำนวนแถว และจำนวนสดมภ์ เท่ากัน

3. ค่า  $C$  มีข้อจำกัดแปรผันตามค่า  $\chi^2$  เพราะสูตรการหาค่า  $C$  มาจากค่า  $\chi^2$  นั้นเอง ความถี่ในตารางแจกแจงความถี่ ถ้าความถี่ในตารางมีค่าน้อยต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ ก็ไม่สามารถหาค่าสถิติแบบ  $\chi^2$  ได้ หรือหาได้แต่ไม่สามารถตีความหมายได้ ถ้า  $\chi^2$  จะคำนวณได้อย่างเหมาะสม ก็ต่อเมื่อมีค่าความถี่คาดหวังมากพอสมควร นั่นคือ ค่าความถี่คาดหวังที่มีค่าน้อยกว่า 5 ต้องมีจำนวนที่น้อยกว่า 20% ของจำนวนช่องข้อย่อยทั้งหมด และค่าแต่ละค่าของความถี่คาดหวังต้องมีมากกว่า 1 เสมอ

4. ไม่สามารถนำค่า  $C$  ที่ได้ไปเปรียบเทียบกันได้โดยตรง จากข้อจำกัดดังกล่าวจะเห็นว่า สัมประสิทธิ์การถ่วง (C) จะมีค่าสูงขึ้นหรือต่ำลง ขึ้นอยู่กับขนาดของค่า  $\chi^2$  หรือขึ้นอยู่กับขนาดของตารางการถ่วง จึงทำให้สัมประสิทธิ์การถ่วง แปรเปลี่ยนอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ดังนั้นเพื่อหลีกเลี่ยงลักษณะดังกล่าวจึงมักหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่วง ในรูปของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของแครมเมอร์ วี (Cramer's V Correlation Coefficient)

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(c-1)}} \quad (3.3)$$

เมื่อ  $V$  = ค่าแครมเมอร์ วี

$N$  = จำนวนของกลุ่มตัวอย่าง

$c$  = จำนวนสดมภ์

ตัวอย่างที่ 3.1 ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมของเด็กกับวิธีการอบรมเลี้ยงดูในครอบครัว

ครัวผู้วิจัยสุ่มตัวอย่างเด็กมาจำนวน 60 คน ปรากฏข้อมูลดังตารางดังกล่าว

ตารางที่ 3.3 แสดงจำนวนความถี่ของวิธีการอบรมเลี้ยงดูเด็กกับพฤติกรรมของเด็กจำนวน 60 คน

| พฤติกรรมของเด็ก | วิธีการอบรมเลี้ยงดูแบบ |          |             | รวม |
|-----------------|------------------------|----------|-------------|-----|
|                 | เผด็จการ               | ปล่อยปละ | ประชาธิปไตย |     |
| เก็บตัว         | 13                     | 4        | 4           | 21  |
| แบบกลาง ๆ       | 5                      | 9        | 10          | 24  |
| แสดงตัว         | 2                      | 2        | 11          | 15  |
| รวม             | 20                     | 15       | 25          | 60  |



จงทดสอบว่า พฤติกรรมของเด็กกับวิธีการอบรมเลี้ยงดูมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ เพียงใด ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

วิธีทำ

สมมติฐาน

$H_0$  : พฤติกรรมของเด็กกับวิธีการอบรมเลี้ยงดูไม่มีความสัมพันธ์กัน

$H_1$  : พฤติกรรมของเด็กกับวิธีการอบรมเลี้ยงดูมีความสัมพันธ์กัน

หรือ

$H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho \neq 0$

ระดับนัยสำคัญ  $\alpha = 0.05$

การทดสอบ

1. หาค่าความถี่คาดหวัง โดยใช้สูตร

$$E_{ij} = \frac{R_i \times C_j}{N}$$

ตารางที่ 3.4 แสดงจำนวนความถี่และค่าความถี่คาดหวังของวิธีการอบรมเลี้ยงดูเด็กกับพฤติกรรมของเด็กจำนวน 60 คน

| พฤติกรรมของเด็ก | วิธีการอบรมเลี้ยงดูแบบ |          |             | รวม |
|-----------------|------------------------|----------|-------------|-----|
|                 | เผด็จการ               | ปล่อยปละ | ประชาธิปไตย |     |
| เก็บตัว         | 13(7)                  | 4(5.25)  | 4(8.75)     | 21  |
| แบบกลาง ๆ       | 5(8)                   | 9(6)     | 10(10)      | 24  |
| แสดงตัว         | 2(5)                   | 2(3.75)  | 11(6.2)     | 15  |
| รวม             | 20                     | 15       | 25          | 60  |

2) คำนวณหาค่า  $\chi^2$  จากสมการ (2.11)

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \\ &= \frac{(13-7)^2}{7} + \frac{(4-5.25)^2}{5.25} + \frac{(4-8.75)^2}{8.75} + \frac{(5-8)^2}{8} + \frac{(9-6)^2}{6} + \\ &\quad \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(2-5)^2}{5} + \frac{(2-3.75)^2}{3.75} + \frac{(11-6.25)^2}{6.25} \\ &= 16.87\end{aligned}$$

#### การทดสอบนัยสำคัญ

- นำค่า  $\chi^2_{\text{คำนวณ}}$  ที่ได้ ไปเทียบกับค่าวิกฤตของ  $\chi^2$  ที่  $df = (r-1)(c-1) = (3-1)(3-1) = 4$  และ  $\alpha = 0.05$  เปิดตาราง C จะได้  $\chi^2_{\text{ตาราง}}(0.05, 4) = 9.49$  ดังนั้นจะเห็นว่า  $\chi^2_{\text{คำนวณ}} = 16.87 > \chi^2_{\text{ตาราง}} = 9.49$  นั่นคือ ปฏิเสธสมมติฐาน  $H_0$  สรุปได้ว่า พฤติกรรมของเด็กมีความสัมพันธ์กับการอบรมเลี้ยงดู
- หาค่าสัมประสิทธิ์การถ่วงหรือระดับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร โดยใช้สูตร

$$\begin{aligned}C &= \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} \\ &= \sqrt{\frac{16.87}{60 + 16.87}} \\ &= 0.468\end{aligned}$$

- จะได้ว่าค่า  $C = 0.468$  มีนัยสำคัญที่ 0.05 ด้วย เนื่องจากค่า  $\chi^2$  ที่คำนวณได้มีนัยสำคัญ ดังนั้นสรุปได้ว่าตัวแปรทั้ง 2 มีความสัมพันธ์กันจริงอย่างเชื่อถือได้

สรุปได้ว่า พฤติกรรมของเด็กกับวิธีการอบรมเลี้ยงดูมีความสัมพันธ์กันประมาณ 57% เมื่อเทียบกับตารางการถ่วงขนาดเดียวกัน ทั้งนี้เพราะ  $C = 0.468$  มีค่าประมาณ 57% ของค่าสูงสุดของ  $C$  (ตารางการถ่วงของ  $3 \times 3$  มีค่าสูงสุดของ  $C = 0.816$ )

$$C \ 0.816 = 100\%$$

$$C \ 0.468 = \frac{0.468 \times 100}{0.816} = 57.35\%$$

เพื่อหาลักษณะข้อจำกัด ข้อ4 หาค่าสัมประสิทธิ์การกระจายในรูปแบบ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์  
ของแครมเมอร์ วี (Cramer's V Correlation Coefficient)

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{\chi^2}{N(c-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{16.87}{60(3-1)}} \\ &= 0.37 \end{aligned}$$

การทดสอบนัยสำคัญของ V นั้น จะใช้  $\chi^2$  ทดสอบแทน ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

### 3.3 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมน

(The Spearman Rank Correlation Coefficient :  $r_s$ )

ในงานวิจัยส่วนใหญ่ผู้วิจัยมักสนใจศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร โดยที่ตัวแปรนั้นจะต้องอยู่ในรูปมาตรวัดอย่างน้อยเป็นมาตราเรียงลำดับ และการหาสหสัมพันธ์อันดับที่ของสเปียร์แมนก็เช่นเดียวกันที่ใช้ข้อมูลที่ประกอบด้วยตัวแปร 2 เซต เช่น ตัวแปร X และ Y ซึ่งตัวแปรทั้ง 2 X และ Y อยู่ในมาตราเรียงลำดับ หรือมาตราส่วนก็ได้แต่ต้องเปลี่ยนเป็นมาตราเรียงลำดับก่อนจึงจะใช้วิธีนี้ได้ ซึ่งการหาความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ อาจเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรประเภทเดียวกันของประชากรกลุ่มเดียวกัน แต่มีการจัดอันดับ 2 ครั้ง เช่นการจัดอันดับความสามารถของนักเรียนโดยครู 2 คน หรือการหาความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนจากแบบทดสอบสองเซต คือ เซต X และเซต Y นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างกำหนดให้มีการเรียงลำดับคะแนนของเซต X และ Y ตามลำดับ จะได้

$$1. X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

$$2. Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$$

คะแนนที่จัดอยู่เป็นคู่ลำดับ ( $X_i, Y_i$ ) หาความแตกต่างได้เป็น

$$d_i = X_i - Y_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

การหาสหสัมพันธ์แบบ  $r_s$  เนื่องจากเป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์สถิติอนพารามตริก จึงไม่สนใจการแจกแจงของคะแนนกลุ่มตัวอย่างว่ามีการแจกแจงแบบปกติหรือไม่ เนื่องจากคะแนน X และ Y เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น  $d_i$  จึงเป็นเลขจำนวนเต็ม(มีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้) ค่า  $\sum d_i^2$  จึงเป็นเลขจำนวนเต็มบวกเสมอ เมื่อคำนวณค่า  $\sum d_i^2$  ได้แล้วนำไปแทนค่าในสูตรการหา  $r_s$  ก็สามารถคำนวณหาสหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมนออกมาได้โดยการทดสอบสมมติฐาน จะตั้งสมมติฐานดังนี้

สมมติฐานการทดสอบ

$H_0$  : ตัวแปรทั้ง 2 ไม่มีความสัมพันธ์กัน

$H_1$  : ตัวแปรทั้ง 2 มีความสัมพันธ์กัน

หรือ

$$H_0 : \rho_s = 0$$

$$H_1 : \rho_s \neq 0$$

เมื่อ  $\rho_s$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมนของประชากร ของตัวแปร 2 ตัวแปร ซึ่งจะบอกถึงระดับความสัมพันธ์ว่ามีมากหรือน้อย และมีทิศทางความสัมพันธ์อย่างไร

#### การกำหนดตัวแปร

ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังมาตรวัดที่จะนำมาคำนวณหาค่าสหสัมพันธ์ ซึ่งสัมประสิทธิ์  $r_s$  จะคำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad (3.4)$$

#### กรณีลำดับที่ซ้ำกัน

$$r_{sb} = \frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 - \Sigma d^2}{2\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} \quad (3.5)$$

$$r_{sb} = \frac{\frac{1}{6}(n^3 - n) - \Sigma d^2 - U' - V'}{\sqrt{[\frac{1}{6}(n^3 - n) - 2U'][\frac{1}{6}(n^3 - n) - 2V']}} \quad (3.6)$$

$$d_i = X_i - Y_i \quad (3.7)$$

$$U' = \frac{1}{12} \Sigma (u^3 - u) \quad (3.8)$$

$$V' = \frac{1}{12} \Sigma (v^3 - v) \quad (3.9)$$

เมื่อ  $r_s$  แทน สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมน

$r_{sb}$  แทน สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมนกรณี อันดับของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน

(The Spearman Rank Correlation Coefficient)

$$-1 < r_s < 1$$

$\sum_{i=1}^n d_i^2$  แทน ผลรวมทั้งหมดของกำลังสองของผลต่างระหว่างอันดับของคะแนนแต่ละคู่

$n$  แทน จำนวนคู่ของอันดับ

$X_i$  แทน อันดับของคะแนนเขต X

$Y_i$  แทน อันดับของคะแนนเขต Y

$\bar{X}$  แทน ค่าเฉลี่ยอันดับของคะแนนเขต X

$\bar{Y}$  แทน ค่าเฉลี่ยอันดับของคะแนนเขต Y

$U'$  แทน เทอมการปรับแก้ กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน ของเขต X

$V'$  แทน เทอมการปรับแก้ กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน ของเขต Y

$u$  แทน จำนวนครั้งที่ซ้ำกันในแต่ละอันดับของเขต X

$v$  แทน จำนวนครั้งที่ซ้ำกันในแต่ละอันดับของเขต Y

#### ขั้นตอนในการคำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมน

1. จัดอันดับคะแนนแต่ละเขต โดยเรียงจากคะแนนต่ำสุดไปหาคะแนนสูงสุดหรือคะแนนสูงสุดไปหาคะแนนต่ำสุดก็ได้ แต่ต้องเป็นทำนองเดียวกันทั้ง 2 เขต ในกรณีคะแนนซ้ำกัน ให้ถืออันดับเฉลี่ยเป็นอันดับของคะแนนแต่ละคะแนนนั้น
2. หาผลต่างระหว่างคู่อันดับของคะแนน ( $d_i$ )

$$d_i = X_i - Y_i$$

3. ยกกำลังสองของผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน ( $d_i^2$ )
4. หาผลรวมทั้งหมดของกำลังสองผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน ( $\sum d_i^2$ )
5. คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
  - กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตไม่ซ้ำกัน ใช้สมการที่ (3.4)
  - กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน ใช้สมการที่ (3.5) หรือ (3.6)

### การทดสอบนัยสำคัญ

1. ถ้าขนาดของกลุ่มตัวอย่าง  $n \leq 25$  ใช้ทดสอบด้วย สถิติ  $t$  จากสูตร

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \quad (3.10)$$

นำค่าของสถิติ  $t$  ที่คำนวณได้ไปเทียบกับค่าวิกฤตของ  $t$  จากตาราง B ภาคผนวก ที่  $df = n - 2$

ถ้า  $t_{(คำนวณ)} > t_{(ตาราง)}$  แสดงว่าตัวแปรทั้ง 2 เขต มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ถ้า  $t_{(คำนวณ)} < t_{(ตาราง)}$  แสดงว่าตัวแปรทั้ง 2 เขต ไม่มีความสัมพันธ์กัน

2. ถ้าขนาดกลุ่มตัวอย่าง  $n > 25$  ใช้ทดสอบด้วย  $Z$  จากสูตร

$$Z = r_s \sqrt{n-1} \quad (3.11)$$

ถ้า  $Z_{(คำนวณ)} > Z_{(ตาราง)}$  แสดงว่าตัวแปรทั้ง 2 เขต มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

$Z_{(คำนวณ)} < Z_{(ตาราง)}$  แสดงว่าตัวแปรทั้ง 2 เขต ไม่มีความสัมพันธ์กัน ( $Z_{(ตาราง)}$  เปิดจากตาราง A ภาคผนวก)

3. ใช้ตารางสำเร็จ คือตาราง D ในภาคผนวก ซึ่งจะบอกค่าวิกฤตของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับ (ที่  $df = n - 2$ )

ถ้าค่า  $r_{s(คำนวณ)} > r_{s(ตาราง)}$  แสดงว่าตัวแปรทั้ง 2 เขต มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

$r_{s(คำนวณ)} < r_{s(ตาราง)}$  แสดงว่าตัวแปรทั้ง 2 เขต ไม่มีความสัมพันธ์กัน

### การแปลผล

ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ที่ได้เป็นเพียงค่าที่แสดงว่าตัวแปรทั้ง 2 นั้นเป็นไปตามกัน คล้อยตามกันหรือกลับกันเท่านั้น ไม่ได้หมายความว่าตัวแปรอีกตัวหนึ่งเป็นเหตุและตัวแปรหนึ่งเป็นผลแต่อย่างใด

### กรณีลำดับที่ซ้ำกัน

ในทางปฏิบัติเวลาวิเคราะห์ข้อมูลหาค่าสหสัมพันธ์ เป็นไปได้ที่คะแนนที่เป็นลำดับที่มีการซ้ำกัน เมื่อคะแนนซ้ำกัน จึงมีการใช้สมการที่มีการปรับค่าแล้ว ซึ่งในที่นี้จะใช้สมการที่ 3.5 ในการคำนวณค่าสหสัมพันธ์ โดยให้ค่า  $U'$  และ  $V'$  จากคะแนนที่มีการซ้ำกันโดยสมการที่ 3.8 และ 3.9

$$U' = \frac{1}{12} \sum (u^3 - u)$$

$$V' = \frac{1}{12} \sum (v^3 - v)$$

ต่อไปหาค่า  $U'$  ของชุดที่ 1 ในที่นี้กำหนดให้เป็นชุด X

นำไปใช้หาค่าของ  $\sum x_i^2$  อีกครั้งหนึ่งจากสมการ

$$\sum x_i^2 = \frac{n^3 - n}{12} - U' \quad (3.12)$$

ในทำนองเดียวกันชุด Y ก็จะได้

$$\sum y_i^2 = \frac{n^3 - n}{12} - V' \quad (3.13)$$

นำค่า (3.12) , (3.13) ไปแทนในค่า  $r_s$  ก็จะได้สมการ (3.5)

$$r_s = \frac{\sum x_i^2 + \sum y_i^2 - \sum d_i^2}{2\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}}$$



ตัวอย่าง 3.2 ข้อมูลต่อไปนี้เป็นคะแนนสอบกลางภาค และคะแนนสอบปลายภาควิชาสถิติของนักศึกษาปริญญาโทกลุ่มหนึ่งจำนวน 12 คน มาเพื่อศึกษาว่า คะแนนสอบทั้งสองครั้งมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ ให้ข้อมูลเป็น ตาราง 3.5

ตารางที่ 3.5 แสดงคะแนนสอบกลางภาคและปลายภาคของนักศึกษาปริญญาโท สถิติ

| นักศึกษา | คะแนน           |                 |
|----------|-----------------|-----------------|
|          | คะแนนสอบกลางภาค | คะแนนสอบปลายภาค |
| 1        | 82              | 42              |
| 2        | 98              | 46              |
| 3        | 87              | 39              |
| 4        | 40              | 37              |
| 5        | 116             | 65              |
| 6        | 113             | 88              |
| 7        | 111             | 86              |
| 8        | 83              | 56              |
| 9        | 85              | 62              |
| 10       | 126             | 92              |
| 11       | 106             | 54              |
| 12       | 117             | 81              |

วิธีทำ สมมติฐาน  $H_0$  : คะแนนสอบทั้งสองครั้งไม่มีความสัมพันธ์กัน  
 $H_1$  : คะแนนสอบทั้งสองครั้งมีความสัมพันธ์กัน  
 หรือ

$$H_0 : \rho_s = 0$$

$$H_1 : \rho_s \neq 0$$

ระดับนัยสำคัญ กำหนดให้  $\alpha = 0.05$

การทดสอบ

1. จัดอันดับคะแนนแต่ละชุด โดยเรียงจากคะแนนต่ำสุดไปหาคะแนนสูงสุด
2. หาผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน (d)

$$d_i = X_i - Y_i$$

3. ยกกำลังสองของผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน  $d_i^2$
4. หาผลรวมทั้งหมดของกำลังสองผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน ( $\sum_{i=1}^n d_i^2$ )

ตารางที่ 3.6 แสดงอันดับที่ของคะแนนสอบกลางภาคและปลายภาคของนักศึกษาปริญญาโท สถิติ

| นักเรียน<br>คนที่ | การสอบกลางภาค |                             | การสอบปลายภาค |                             | d  | $d^2$ |
|-------------------|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|----|-------|
|                   | คะแนน         | อันดับ<br>(X <sub>i</sub> ) | คะแนน         | อันดับ<br>(Y <sub>i</sub> ) |    |       |
| 1                 | 82            | 2                           | 42            | 3                           | -1 | 1     |
| 2                 | 98            | 6                           | 46            | 4                           | 2  | 4     |
| 3                 | 87            | 5                           | 39            | 2                           | 3  | 9     |
| 4                 | 40            | 1                           | 37            | 1                           | 0  | 0     |
| 5                 | 116           | 10                          | 65            | 8                           | 2  | 4     |
| 6                 | 113           | 9                           | 88            | 11                          | -2 | 4     |
| 7                 | 111           | 8                           | 86            | 10                          | -2 | 4     |
| 8                 | 83            | 3                           | 56            | 6                           | -3 | 9     |
| 9                 | 85            | 4                           | 62            | 7                           | -3 | 9     |
| 10                | 126           | 12                          | 92            | 12                          | 0  | 0     |
| 11                | 106           | 7                           | 54            | 5                           | 2  | 4     |
| 12                | 117           | 11                          | 81            | 9                           | 2  | 4     |
| $\sum d_i^2 = 52$ |               |                             |               |                             |    |       |

5. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ของสเปียร์แมน โดยใช้สูตร

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6(52)}{12(12^2 - 1)}$$

$$r_s = 0.82$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนสอบกลางภาคและปลายภาคมีค่า 0.82

**การทดสอบนัยสำคัญ**

1. ขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 12 นั่นคือ  $n \leq 25$  ใช้ทดสอบด้วย สถิติ  $t$  จากสูตร

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$$t = 0.82 \sqrt{\frac{12-2}{1-0.82^2}}$$

$$t = 4.53$$

เปิดตาราง **B** หาค่าวิกฤต  $t$  ที่  $\alpha = 0.05$  และ  $df = 12 - 2 = 10$  ได้  $t = 2.228$  จะเห็นว่า  $t_{(คำนวณ)} > t_{(ตาราง)}$  แสดงว่าคะแนนสอบกลางภาคและคะแนนสอบปลายภาค มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตัวอย่าง 3.3 จากการสอบถามเพื่อคัดเลือกนักศึกษาจำนวน 10 คน เข้าเป็นนักศึกษาภาควิชาสถิติ ของมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยใช้ผู้สัมภาษณ์ 2 คน ต้องการทราบว่ากรรมการ การสอบสัมภาษณ์ทั้ง 2 มีความคิดเห็นตรงกันหรือไม่

ตารางที่ 3.7 แสดงคะแนนการสอบสัมภาษณ์เพื่อคัดเลือกนักศึกษาเข้าศึกษาต่อ

| นักศึกษาคนที่ | คะแนนสอบสัมภาษณ์   |                    |
|---------------|--------------------|--------------------|
|               | กรรมการคนที่ 1 (X) | กรรมการคนที่ 2 (Y) |
| 1             | 10                 | 10                 |
| 2             | 10                 | 11                 |
| 3             | 11                 | 9                  |
| 4             | 11                 | 8                  |
| 5             | 13                 | 15                 |
| 6             | 14                 | 18                 |
| 7             | 15                 | 17                 |
| 8             | 16                 | 13                 |
| 9             | 17                 | 14                 |
| 10            | 18                 | 19                 |
| 11            | 18                 | 12                 |
| 12            | 20                 | 16                 |

## วิธีทำ

สมมติฐาน  $H_0$  : กรรมการ การสอบสัมภาษณ์ทั้ง 2 มีความคิดเห็นไม่สอดคล้องกัน

$H_1$  : กรรมการ การสอบสัมภาษณ์ทั้ง 2 มีความคิดเห็นสอดคล้องกัน

หรือ

$$H_0 : \rho_s = 0$$

$$H_1 : \rho_s \neq 0$$

ระดับนัยสำคัญ กำหนดให้  $\alpha = 0.05$

## การทดสอบ

1. จัดอันดับคะแนนแต่ละชุด โดยเรียงจากคะแนนต่ำสุดไปหาคะแนนสูงสุดในที่นี้เป็น กรณีคะแนนซ้ำกัน ให้ถ้อยอันดับเฉลี่ยเป็นอันดับของคะแนนแต่ละคะแนนนั้น
2. หาผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน (d)

$$d_i = X_i - Y_i$$

3. ยกกำลังสองของผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน  $d_i^2$
4. หาผลรวมทั้งหมดของกำลังสองผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน  $(\sum_{i=1}^n d_i^2)$

จากข้อ 1-4 จะได้ผลดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.8 แสดงอันดับที่คะแนนการสอบสัมภาษณ์เพื่อคัดเลือกนักศึกษาเข้าศึกษาต่อ

| นักศึกษา<br>คนที่        | คะแนนสอบสัมภาษณ์ |                         |                |                         | d    | d <sup>2</sup> |
|--------------------------|------------------|-------------------------|----------------|-------------------------|------|----------------|
|                          | กรรมการคนที่1    |                         | กรรมการคนที่ 2 |                         |      |                |
|                          | คะแนน            | อันดับ(X <sub>i</sub> ) | คะแนน          | อันดับ(Y <sub>i</sub> ) |      |                |
| 1                        | 10               | 1.5                     | 10             | 3                       | -1.5 | 2.25           |
| 2                        | 10               | 1.5                     | 11             | 4                       | -2.5 | 6.25           |
| 3                        | 11               | 3.5                     | 9              | 2                       | 1.5  | 2.25           |
| 4                        | 11               | 3.5                     | 8              | 1                       | 2.5  | 6.25           |
| 5                        | 13               | 5                       | 15             | 8                       | -3.0 | 9.00           |
| 6                        | 14               | 6                       | 18             | 11                      | -5.0 | 25.00          |
| 7                        | 15               | 7                       | 17             | 10                      | -3.0 | 9.00           |
| 8                        | 16               | 8                       | 13             | 6                       | 2.0  | 4.00           |
| 9                        | 17               | 9                       | 14             | 7                       | 2.0  | 4.00           |
| 10                       | 18               | 10.5                    | 19             | 12                      | -1.5 | 2.25           |
| 11                       | 18               | 10.5                    | 12             | 5                       | -5.5 | 30.25          |
| 12                       | 20               | 12                      | 16             | 9                       | 3.0  | 9.00           |
| Σd <sup>2</sup> = 109.50 |                  |                         |                |                         |      |                |

5. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์โดยใช้สูตร

$$r_s = \frac{\sum x^2 + \sum y^2 - \sum d^2}{2\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$

พิจารณาในอันดับของคะแนนตัวแปร X

จะพบว่า มีค่าสังเกตที่ซ้ำกัน อยู่ 3 ชุดคือ

ชุดที่ 1 มี 1.5 ซ้ำกันอยู่ 2 ค่า

ชุดที่ 2 มี 3.5 ซ้ำกันอยู่ 2 ค่า

ชุดที่ 3 มี 10.5 ซ้ำกันอยู่ 2 ค่า

สำหรับทั้ง 2 กลุ่ม u และ v = จำนวนค่าสังเกตที่มีค่าซ้ำกันในอันดับ

ซึ่ง  $u = v = 2$  ดังนั้น

หาค่าของ  $\Sigma x^2$  จากสมการที่ (3.12)

$$\Sigma x^2 = \frac{n^3 - n}{12} - U'$$

$$\Sigma x^2 = \frac{12^3 - 12}{12} - \left( \frac{2^3 - 2}{12} + \frac{2^3 - 2}{12} + \frac{2^3 - 2}{12} \right)$$

$$\Sigma x^2 = 143 - 1.5$$

$$\Sigma x^2 = 141.5$$

พิจารณาในอันดับที่ของคะแนนตัวแปร Y

จะพบว่า ไม่มีค่าสังเกตที่ซ้ำกันเลย ดังนั้น  $V' = 0$  และหาค่าของ  $\Sigma y^2$  จากสมการที่ (3.13)

$$\Sigma y^2 = \frac{n^3 - n}{12} - V'$$

$$\Sigma y^2 = \frac{12^3 - 12}{12} - 0$$

$$\Sigma y^2 = 143$$

จะได้ว่าเทอมในการปรับแก้สำหรับค่าสังเกตที่ซ้ำกัน

$$\Sigma x^2 = 141.5$$

$$\Sigma y^2 = 143$$

แทนค่า  $\Sigma x^2$ ,  $\Sigma y^2$  และ  $\Sigma d^2$  ในสมการที่ (3.5)

$$r_s = \frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 - \Sigma d^2}{2\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

จะได้

$$r_s = \frac{141.5 + 143 - 109.5}{2\sqrt{(141.5)(143)}}$$

$$r_s = 0.616$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างความคิดเห็นกรรมการคนที่ 1 และกรรมการคนที่ 2 มีค่า 0.616

#### การทดสอบนัยสำคัญ

1.ขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 12 นั่นคือ  $n \leq 25$  ใช้ทดสอบด้วย สถิติ t จากสูตร

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$$t = 0.616 \sqrt{\frac{12-2}{1-0.616^2}}$$

$$t = 2.473$$

เปิดตาราง B หาค่าวิกฤต t ที่  $\alpha = 0.05$  และ  $df = 12 - 2 = 10$  ได้เท่ากับ 2.228 จะเห็นได้ว่า  $t_{(คำนวณ)} > t_{(ตาราง)}$  แสดงว่ากรรมการคนที่ 1 และกรรมการคนที่ 2 มีความคิดเห็นตรงกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาระดับความสัมพันธ์ของการให้อันดับนักฟุตบอลตัวสำรอง จำนวน 10 คน โดยกรรมการ 2 คน (กรรมการ X และ Y) จากข้อมูลต่อไปนี้

ตารางที่ 3.9 แสดงคะแนนอันดับที่ของนักฟุตบอลตัวสำรอง

| กรรม<br>การ    | นักฟุตบอลคนที่ |      |     |     |     |     |      |   |      |      |    |
|----------------|----------------|------|-----|-----|-----|-----|------|---|------|------|----|
|                | 1              | 2    | 3   | 4   | 5   | 6   | 7    | 8 | 9    | 10   |    |
| X              | 1              | 2.5  | 2.5 | 4.5 | 4.5 | 6.5 | 6.5  | 8 | 9.5  | 9.5  |    |
| Y              | 1              | 2    | 4.5 | 4.5 | 4.5 | 4.5 | 8    | 8 | 8    | 10   |    |
| d              | 0              | 0.5  | -2  | 0   | 0   | 2   | -1.5 | 0 | 1.5  | -0.5 |    |
| d <sup>2</sup> | 0              | 0.25 | 4   | 0   | 0   | 4   | 2.25 | 0 | 2.25 | 0.25 | 13 |

#### วิธีทำ

สมมติฐาน  $H_0$  : กรรมการที่ให้อันดับนักฟุตบอลมีความคิดเห็นไม่สอดคล้องกัน

$H_1$  : กรรมการที่ให้อันดับนักฟุตบอลมีความคิดเห็นสอดคล้องกัน

หรือ

$$H_0 : \rho_s = 0$$

$$H_1 : \rho_s \neq 0$$

ระดับนัยสำคัญ กำหนดให้  $\alpha = 0.05$

#### การทดสอบ

1. จัดอันดับคะแนนแต่ละชุด โดยเรียงจากคะแนนต่ำสุดไปหาคะแนนสูงสุดในที่นี้เป็น กรณีคะแนนซ้ำกัน ให้ถืออันดับเฉลี่ยเป็นอันดับของคะแนนแต่ละคะแนนนั้น
2. หาผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน (d)

$$d_i = X_i - Y_i$$

3. ยกกำลังสองของผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน  $d_i^2$
4. หาผลรวมทั้งหมดของกำลังสองผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน  $(\sum_{i=1}^n d_i^2)$



คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์โดยใช้สมการที่ (3.6)

$$r_{sb} = \frac{\frac{1}{6}(n^3 - n) - \sum d^2 - U' - V'}{\sqrt{[\frac{1}{6}(n^3 - n) - 2U'][\frac{1}{6}(n^3 - n) - 2V']}}$$

การจัดอันดับในเซตที่ 1 (เซต X) จะพบว่ามีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน 4 คู่ ( $u=2$ ) ดังนั้น

$$U' = \frac{4}{12} \sum (2^3 - 2) = 2$$

การจัดอันดับในเซตที่ 2 (เซต Y) จะพบว่ามีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน 2 อันดับ

คือ 4.5 ซ้ำกัน 4 ค่า ( $v=4$ ) และ

8 ซ้ำกัน 3 ค่า ( $v=3$ ) ดังนั้น

$$V' = \frac{1}{12} \sum (4^3 - 4 + 3^3 - 3)$$

$$= 7$$

จากตารางที่ 3.9 จะได้

$$\sum d^2 = 13$$

$$r_{sb} = \frac{\frac{1}{6}(10^3 - 10) - 13 - 2 - 7}{\sqrt{[\frac{1}{6}(10^3 - 10) - 2(2)][\frac{1}{6}(10^3 - 10) - 2(7)]}}$$

$$r_{sb} = \frac{(165) - 22}{\sqrt{[161][151]}}$$

$$= 0.917$$

### การทดสอบนัยสำคัญ

1.ขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 10 นั่นคือ  $n \leq 25$  ใช้ทดสอบด้วย สถิติ  $t$  จากสูตร

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$$t = 0.917 \sqrt{\frac{10-2}{1-0.917^2}}$$

$$t = 6.50$$

เปิดตาราง **B** หาค่าวิกฤต  $t$  ที่  $\alpha = 0.05$  และ  $df = 10 - 2 = 8$  ได้เท่ากับ 2.306  
 จะเห็นได้ว่า  $t_{(คำนวณ)} > t_{(ตาราง)}$  แสดงว่ากรรมการคนที่ 1 และกรรมการคนที่ 2 มีความคิดเห็นตรงกัน  
 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

### 3.4 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์

(The Kendall Rank Correlation Coefficient :  $\tau$ )

การหาค่าสหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์ (The Kendall Rank Correlation) เป็นวิธีการหาความสัมพันธ์ร่วมของการจัดอันดับ 2 เซต โดยที่ข้อมูลหรือตัวแปรทั้ง 2 อยู่ในมาตราเรียงอันดับ และ การหาค่าสหสัมพันธ์วิธีนี้มีข้อตกลงเบื้องต้นเหมือนกันกับ วิธีการหาค่าสหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมน (The Spearman Rank Correlation) แต่มันแตกต่างกันตรงที่ ขั้นแรกต้องเรียงลำดับในตัวแปรแรกก่อน (X) ส่วนลำดับที่ในตัวแปร Y จะแปรผันตามตัวแปร X ซึ่งวิธีการหาค่าสหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์ มีข้อดีที่เหนือกว่าตรงที่สามารถนำไปวิเคราะห์หาค่าสถิติขั้นต่อไป คือ สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนดอลล์ ได้โดยมีสมมติฐานการทดสอบเป็นดังนี้

สมมติฐานการทดสอบ

$H_0$  : ตัวแปรทั้ง 2 ไม่มีความสัมพันธ์กัน

$H_1$  : ตัวแปรทั้ง 2 มีความสัมพันธ์กัน

หรือ

$H_0 : \tau = 0$

$H_1 : \tau \neq 0$

การกำหนดตัวแปร

การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนดอลล์ จะคำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)} \quad (3.14)$$

$$S = \sum P - \sum Q \quad (3.15)$$

### กรณีที่มีค่าสังเกตซ้ำกัน

เมื่อมีค่าสังเกตที่ซ้ำกันเกิดขึ้นจะให้อันดับเรียงไปตามปกติหลังจากนั้นนำอันดับของค่าสังเกตที่มีค่าซ้ำกันมาหาค่าเฉลี่ย

ผลของอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน (Tied rank) คือ จะลดค่าของ  $\tau$  ที่หาได้ ถ้าสัดส่วนของอันดับที่ค่าสังเกตที่ซ้ำกันมีขนาดเล็ก ผลของการซ้ำกันก็พอจะมองข้ามไปได้ และ ยังคงใช้สูตรที่ (3.14) ถ้าสัดส่วนของอันดับที่ซ้ำกัน มีขนาดใหญ่ การปรับแก้ที่ถูกต้องอาจจะเพิ่มค่าของ  $\tau$  ให้มากขึ้นกว่าการไม่ปรับแก้ จำนวนการปรับแก้ที่ถูกต้อง ได้จากสูตรต่อไปนี้

$$\tau = \frac{S}{\sqrt{\frac{n(n-1)}{2} - U} \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} - V}} \quad (3.16)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum u(u-1) \quad (3.17)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum v(v-1) \quad (3.18)$$

เมื่อ  $\tau$  = สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์  
(The Kendall Rank Correlation Coefficient)

$$-1 \leq \tau \leq +1$$

P แทน จำนวนของอันดับที่มีค่าสูงกว่าเมื่อนับจำนวนที่อยู่ได้ลงมา

Q แทน จำนวนของอันดับที่มีค่าต่ำกว่าเมื่อนับจำนวนที่อยู่ได้ลงมา

n แทน จำนวนข้อมูลหรือจำนวนอันดับที่ หรือจำนวนกลุ่มตัวอย่าง

S แทน ความแตกต่างระหว่างผลบวกของจำนวนอันดับที่ ที่สอดคล้องกันกับ  
ผลบวกของอันดับที่ ที่ไม่สอดคล้องกัน

U แทน เทอมการปรับแก้กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน ของเซต X

V แทน เทอมการปรับแก้กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน ของเซต Y

u แทน จำนวนครั้งที่ซ้ำกันในแต่ละอันดับของเซต X

v แทน จำนวนครั้งที่ซ้ำกันในแต่ละอันดับของเซต Y

### ขั้นตอนในการคำนวณ

1. ข้อมูลที่มีอยู่สามารถจัดให้อยู่ในมาตราเรียงอันดับได้โดยการจัดอันดับ 2 เซต  
เช่น

| Subject | A | B | C | D | E |
|---------|---|---|---|---|---|
| 1       | 3 | 1 | 5 | 2 | 4 |
| 2       | 2 | 3 | 4 | 1 | 5 |

2. นำผลการจัดอันดับที่ผู้ให้อันดับคนแรก (หรือคนใดคนหนึ่ง) มาจัดเรียงใหม่ให้เป็นจากน้อยไปหามาก คือ จาก 1, 2, 3, ..., n  
เช่น

| Subject | A | B | C | D | E |
|---------|---|---|---|---|---|
| 1       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2       | 3 | 1 | 2 | 5 | 4 |

3. พิจารณาการจัดอันดับของผู้ให้อันดับอีกคนหนึ่ง ที่ผลการจัดอันดับไม่เรียงจากน้อยไปมาก จากตัวอย่างข้อ 2 พิจารณาเปรียบเทียบจากอันดับซ้ายสุดไปขวาสุด ที่ละคู่ว่าอันดับที่จัดเรียงตามธรรมชาติน้อยไปมากหรือกลับกัน ถ้าแต่ละคู่จัดเรียงอันดับจากน้อยไปมาก จะให้คะแนน +1 ถ้าแต่ละคู่จัดเรียงอันดับกลับกัน จะให้คะแนน -1 พิจารณาได้ดังนี้

|        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (3, 1) | (3, 2) | (3, 5) | (3, 4) | (1, 2) | (1, 5) | (1, 4) | (2, 5) | (2, 4) | (5, 4) |
| -1     | -1     | +1     | +1     | +1     | +1     | +1     | +1     | +1     | -1     |

4. หาผลรวมของการจัดอันดับในขั้นที่ 3 จะได้ค่า S

$$\begin{aligned}
 S &= (+7) + (-3) \\
 &= +4
 \end{aligned}$$

### 5. หาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนคอลล์ ดังนี้

5.1 กรณีที่ผู้ให้อันดับแต่ละคนให้อันดับไม่ซ้ำกัน ใช้สูตร (3.14)

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)}$$

5.2 กรณีที่ผู้ให้อันดับแต่ละคนให้อันดับซ้ำกัน ใช้สูตรที่มีการปรับแก้ ดังนี้

$$\tau = \frac{S}{\sqrt{\frac{n(n-1)}{2} - U} \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} - V}}$$

### การทดสอบนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนคอลล์

คะแนนลำดับที่ของตัวแปร  $X$  และ  $Y$  จะมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติเมื่อลำดับที่ของตัวแปร  $X$  และ  $Y$  มีค่าสหสัมพันธ์กันสูงมากพอสมควร ดังนั้นเมื่อหาค่าความน่าจะเป็นที่จะทดสอบ  $H_0$  ค่าความน่าจะเป็นที่ได้จะต้องมีค่าน้อยกว่า  $\alpha$  เมื่อ  $\alpha$  คือค่าระดับนัยสำคัญ หรือถ้าคะแนนลำดับที่ของตัวแปร  $X$  และ  $Y$  มีความสัมพันธ์กันนั้นหมายถึงว่า การจัดคะแนนเขต  $X_i$  เมื่อ  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  เรียงตามลำดับที่แล้วจะทำให้ลำดับที่ของเขต  $Y_i$  เปลี่ยนแปลงตามลำดับที่ของเขต  $X_i$  ถ้ากำหนดว่า  $n$  คือจำนวนตัวอย่าง ต้องมีวิธีการเรียงลำดับที่ในเขต  $Y_i$  ได้  $n!$  วิธี ดังนั้นคะแนนอันดับที่ในเขต  $Y_i$  ย่อมมีค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้น  $= \frac{1}{n!}$ , ค่า  $n!$  วิธี ของการเรียงลำดับคะแนนในเขต  $Y_i$  ย่อมมีผลทำให้การคำนวณค่า  $\tau$  ได้ค่าที่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตามค่า  $\tau$  ซึ่งเป็นค่าสหสัมพันธ์ มีค่าอยู่ในช่วง  $-1 \leq \tau \leq +1$  สมมุติว่า  $n = 4$  จำนวนวิธีในการจัดเรียงลำดับคะแนนในเขต  $Y_i$  มีค่าเท่ากับ  $4! = 24$  วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีที่เขียนเป็นแผนภูมิแสดงจำนวนสมาชิกใน Sample Space  $[n(S)]$  มีรายละเอียดดังนี้

|   |   |         |                             |
|---|---|---------|-----------------------------|
| 1 | 2 | 3 --- 4 | ย่อมหาค่า $S_1 = 6$         |
|   |   | 4 --- 3 | ย่อมหาค่า $S_2 = 3+2-1 = 4$ |
|   |   | 2 --- 4 | ย่อมหาค่า $S_3 = 3+1 = 4$   |
|   | 3 | 4 --- 2 | ย่อมหาค่า $S_4 = 3-1 = 2$   |
|   |   | 2 --- 3 | ย่อมหาค่า $S_5 = 3-2+1 = 2$ |
|   | 4 | 3 --- 2 | ย่อมหาค่า $S_6 = 3-2-1 = 0$ |

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} 2 \\ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ --- } 4 \quad \text{ข้อหาค่า } S_7 = (-1+2)+2+1 = 4 \\ 4 \text{ --- } 3 \quad \text{ข้อหาค่า } S_8 = (-1+2)+2-1 = 2 \\ 1 \text{ --- } 4 \quad \text{ข้อหาค่า } S_9 = (2-1)+0+1 = 2 \\ 4 \text{ --- } 1 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{10} = (2-1)+0-1 = 0 \\ 3 \text{ --- } 1 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{11} = (2-1)-2-1 = -2 \\ 1 \text{ --- } 3 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{12} = (2-1)-2+1 = 0 \\ 2 \text{ --- } 4 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{13} = (-2+1)+2+1 = 2 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{c} 3 \\ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \right. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ --- } 2 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{14} = (-1+1-1)+2-1 = 0 \\ 2 \text{ --- } 4 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{15} = (-1-1+1)-1+1+1 = 0 \\ 4 \text{ --- } 1 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{16} = (-1+1-1)+1-1-1 = -2 \\ 1 \text{ --- } 2 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{17} = (1-1-1)-2+1 = -2 \\ 2 \text{ --- } 1 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{18} = (1-1-1)-2-1 = -4 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{c} 4 \\ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ --- } 3 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{19} = (-1-1-1)+2+1 = 0 \\ 3 \text{ --- } 2 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{20} = (-1-1-1)+2-1 = -2 \\ 1 \text{ --- } 3 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{21} = (-1-1-1)+0+1 = -2 \\ 3 \text{ --- } 1 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{22} = (-1-1-1)+0-1 = -4 \\ 1 \text{ --- } 2 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{23} = (-1-1-1)-2+1 = -4 \\ 2 \text{ --- } 1 \quad \text{ข้อหาค่า } S_{24} = (-1-1-1)-2-1 = -6 \end{array} \right.
 \end{array}$$

ตารางที่ 3.10 แจกแจงความถี่ของ  $S_i$  เมื่อ  $i = 1, 2, 3, \dots, 24$ 

|           |                |                |                |                |                |                |                |                 |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| ค่า $S_i$ | 6              | 4              | 2              | 0              | -2             | -4             | -6             |                 |
| f         | 1              | 3              | 5              | 6              | 5              | 3              | 1              | $\Sigma f = 24$ |
| $\tau$    | 1.00           | 0.67           | 0.33           | 0              | -0.33          | -0.67          | -1.00          |                 |
| p         | $\frac{1}{24}$ | $\frac{3}{24}$ | $\frac{5}{24}$ | $\frac{6}{24}$ | $\frac{5}{24}$ | $\frac{3}{24}$ | $\frac{1}{24}$ |                 |

กรณีที่ตัวอย่างมีขนาดเล็ก  $n \leq 10$

เมื่อ  $n \leq 10$  ใช้วิธีเปิดตาราง E ภาคผนวก คูณนัยสำคัญของ  $\tau$  ถ้าค่าความน่าจะเป็นในตาราง Kendall's  $\tau$  มีค่าน้อยกว่าค่าความน่าจะเป็น ณ ระดับนัยสำคัญที่ตั้งไว้ แสดงว่ามีนัยสำคัญ

กรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่  $n > 10$

เมื่อ  $n > 10$  เปลี่ยนค่า  $\tau$  เป็น  $Z$  โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{\tau \sqrt{9n(n-1)}}{\sqrt{2(2n+5)}} \quad (3.19)$$

ถ้า  $Z_{(คำนวณ)} > Z_{(ตาราง)}$  แสดงว่ามีนัยสำคัญ

$Z_{(คำนวณ)} < Z_{(ตาราง)}$  แสดงว่าไม่มีนัยสำคัญ

การแปลผลสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์

การแปลผลสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์จะเป็นทำนองเดียวกันกับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมน นั่นคือ ความสัมพันธ์ที่ได้เป็นการแสดงแต่เพียงว่าการเกิดของสองอย่างหรือ สองเหตุการณ์นั้น เป็นไปตามกัน สอดคล้องกัน หรือกลับกัน มิได้หมายความว่าอะไรเป็นเหตุหรือเป็นผลแต่อย่างใด

หมายเหตุ

1. หากผู้ให้อันดับทั้ง 2 คน ให้อันดับเรียงจากน้อยไปมากทั้งหมด คือ +1 จะพบว่าผู้ให้อันดับทั้ง 2 คน ให้อันดับตรงกันทุกคน



2. ถ้าจำนวนอันดับทั้งหมดเป็น  $n$  ตัว และนำมาเปรียบเทียบเป็นคู่ ๆ ดังนั้นจำนวนคู่ที่จะเปรียบเทียบ จะมีจำนวน

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(1)(n-2)!} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{คู่} \quad (3.20) \end{aligned}$$

3. ค่า  $S$  ที่สูงที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้จะมีค่าเท่ากับ  $\frac{n(n-1)}{2}$  หรือ  $\binom{n}{2}$  เมื่อผู้ให้อันดับทั้ง 2 คน ให้อันดับตรงกันหมด และค่า  $S$  จะต่ำสุด เมื่อผู้ให้อันดับทั้ง 2 คน ให้อันดับกลับกันหมด กล่าวคือ ผู้ให้อันดับคนหนึ่งให้อันดับในลักษณะจากน้อยไปหามากตามลำดับ แต่ผู้ให้อันดับอีกคนให้อันดับจากมากไปหาน้อย ตามลำดับ ดังนั้นค่า  $S$  ต่ำสุดที่เป็นไปได้จะมีค่าเท่ากับ  $\frac{-n(n-1)}{2}$

4. ค่าของ  $\tau$  จะอยู่ระหว่าง  $-1$  กับ  $+1$  และถ้าขนาดของกลุ่มตัวอย่าง หรือค่าของ  $n > 10$  ค่าของ  $\tau$  จะมีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติโดยมี

$$E(\tau) = 0 \quad (3.21)$$

$$V(\tau) = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)} \quad (3.22)$$

การอธิบายเปรียบเทียบค่า  $\tau$  กับค่า  $r_s$

จากข้อมูลชุดเดียวกันคำนวณหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์เพื่อเปรียบเทียบ กับ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.5 ในการตรวจผลงานของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 10 คน โดยให้ครู 2 คน เป็นผู้ให้คะแนนแบบจัดอันดับที่ ของผลงานผลเป็นดังนี้

ตารางที่ 3.11 แสดงการจัดอันดับที่ผลงานของนักเรียนของครู 2 คน

| นักเรียน<br>คนที่ | อันดับที่ ที่ให้<br>โดยครูคนที่ 1 ( $X_1$ ) | อันดับที่ ที่ให้<br>โดยครูคนที่ 2 ( $X_2$ ) |
|-------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1                 | 1                                           | 2                                           |
| 2                 | 2                                           | 3                                           |
| 3                 | 3                                           | 1                                           |
| 4                 | 4                                           | 6                                           |
| 5                 | 5                                           | 5                                           |
| 6                 | 6                                           | 4                                           |
| 7                 | 7                                           | 8                                           |
| 8                 | 8                                           | 7                                           |
| 9                 | 9                                           | 10                                          |
| 10                | 10                                          | 9                                           |

จงหาความสัมพันธ์ของการจัดอันดับผลงานนักเรียน โดยครู 2 คนนี้

วิธีทำ หากค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์

สมมติฐาน

$H_0$  : การจัดอันดับผลงานนักเรียนของครูทั้ง 2 คน ไม่มีความสัมพันธ์กัน

$H_1$  : การจัดอันดับผลงานนักเรียนของครูทั้ง 2 คน มีความสัมพันธ์กัน

หรือ

$H_0 : \tau = 0$

$H_1 : \tau \neq 0$

ระดับนัยสำคัญ กำหนดให้  $\alpha=0.05$

การทดสอบ

- เรียงลำดับการให้คะแนนผลงานของนักเรียนของครูคนที่ 1 เป็น 1, 2, 3, 4, ... ก่อน ส่วนอันดับที่ของครูอีกคนหนึ่งจัดให้ตรงกับลำดับของครูคนที่ 1 จัดดังนี้

ตารางที่ 3.12 แสดงการจัดอันดับที่ผลงานของนักเรียนของครู 2 คน

| ครู     | อันดับที่ครูจัดให้แก่นักเรียนคนที่ |   |   |   |   |   |   |   |    |    |
|---------|------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
|         | 1                                  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 |
| คนที่ 1 | 1                                  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 |
| คนที่ 2 | 2                                  | 3 | 1 | 6 | 5 | 4 | 8 | 7 | 10 | 9  |

2. พิจารณาจัดอันดับของครูคนที่ 2 ที่ผลการจัดอันดับไม่เรียงจากน้อยไปมาก พิจารณาเปรียบเทียบจากอันดับซ้ายสุดไปขวาได้ดังนี้

ตารางที่ 3.13 แสดงคู่อันดับที่เปรียบเทียบเพื่อหาผลรวมของการจัดอันดับ

| คู่อันดับที่เปรียบเทียบ                        | คะแนน                      | รวม |
|------------------------------------------------|----------------------------|-----|
| (2,3)(2,1)(2,6)(2,5)(2,4)(2,8)(2,7)(2,10)(2,9) | +1,-1,+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1 | +7  |
| (3,1)(3,6)(3,5)(3,4)(3,8)(3,7)(3,10)(3,9)      | -1,+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1    | +6  |
| (1,6)(1,5)(1,4)(1,8)(1,7)(1,10)(1,9)           | +1,+1,+1,+1,+1,+1,+1       | 7   |
| (6,5)(6,4)(6,8)(6,7)(6,10)(6,9)                | -1,-1,+1,+1,+1,+1          | 2   |
| (5,4)(5,8)(5,7)(5,10)(5,9)                     | -1,+1,+1,+1,+1             | 3   |
| (4,8)(4,7)(4,10)(4,9)                          | +1,+1,+1,+1                | 4   |
| (8,7)(8,10)(8,9)                               | -1,+1,+1                   | 1   |
| (7,10)(7,9)                                    | +1,+1                      | 2   |
| (10,9)                                         | -1                         | -1  |
|                                                | รวม                        | 31  |

3. หาผลรวมของการจัดอันดับในขั้นที่ 2 (S)

$$S = (+32) + (-1)$$

$$= +31$$

4. หาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนคอลลี

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)}$$

$$\tau = \frac{2(31)}{10(10-1)}$$

$$\tau = 0.689$$

จากตัวอย่างเดียวกัน หาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมน เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนคอลลี

สมมติฐาน  $H_0$  : การจัดอันดับผลงานนักเรียนของครูทั้ง 2 คน ไม่มีความสัมพันธ์กัน

$H_1$  : การจัดอันดับผลงานนักเรียนของครูทั้ง 2 คน มีความสัมพันธ์กัน

หรือ

$$H_0 : \rho_s = 0$$

$$H_1 : \rho_s \neq 0$$

ระดับนัยสำคัญ กำหนดให้  $\alpha = 0.05$

**การทดสอบ**

1. จัดอันดับคะแนนแต่ละเซต โดยเรียงจากคะแนนต่ำสุดไปหาคะแนนสูงสุด
2. หาผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน ( $d$ )

$$d_i = X_i - Y_i$$

3. ยกกำลังสองของผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน  $d_i^2$
4. หาผลรวมทั้งหมดของกำลังสองผลต่างระหว่างอันดับของคะแนน ( $\sum_{i=1}^n d_i^2$ )

จากข้อ 1-4 จะได้ผลดังตารางที่ 3.14 ต่อไปนี้

ตารางที่ 3.14 แสดงการจัดอันดับที่ผลงานของนักเรียนของครู 2 คน

| นักเรียน<br>คนที่ | อันดับที่ ที่ให้<br>โดยครูคนที่ 1 | อันดับที่ ที่ให้<br>โดยครูคนที่ 2 | d  | d <sup>2</sup>    |
|-------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----|-------------------|
| 1                 | 1                                 | 2                                 | -1 | 1                 |
| 2                 | 2                                 | 3                                 | -1 | 1                 |
| 3                 | 3                                 | 1                                 | 2  | 4                 |
| 4                 | 4                                 | 6                                 | -2 | 4                 |
| 5                 | 5                                 | 5                                 | 0  | 0                 |
| 6                 | 6                                 | 4                                 | 2  | 4                 |
| 7                 | 7                                 | 8                                 | -1 | 1                 |
| 8                 | 8                                 | 7                                 | 1  | 1                 |
| 9                 | 9                                 | 10                                | -1 | 1                 |
| 10                | 10                                | 9                                 | 1  | 1                 |
|                   |                                   |                                   |    | $\sum d_i^2 = 18$ |

5. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมนโดยใช้สูตร

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6(18)}{10(10^2 - 1)}$$

$$r_s = 0.89$$

จากการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ทั้งสองวิธีนี้ ทำให้แปลผลได้ว่าการจัดอันดับที่ผลงานของนักเรียนของครู 2 คน มีความสัมพันธ์กัน โดยที่  $\tau = 0.69$  และ  $r_s = 0.89$  แต่เนื่องจากสูตรการคำนวณค่า  $\tau$  และ  $r_s$  มาจากสูตรที่แตกต่างกัน จึงทำให้ค่าที่ได้แตกต่างกัน ดังนั้น

ไม่ควรนำมาเปรียบเทียบกัน หรือกล่าวได้ว่าค่า  $\tau$  และ  $r_s$  นำมาเปรียบเทียบกันไม่ได้ เพราะมีที่มาของสูตรแตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 3.6 จงทดสอบนัยสำคัญ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์ที่คำนวณได้ จากตัวอย่างที่ 3.5

วิธีทำ สมมติฐาน

$H_0$  : การจัดอันดับผลงานนักเรียนของครูทั้ง 2 คน ไม่มีความสัมพันธ์กัน

$H_1$  : การจัดอันดับผลงานนักเรียนของครูทั้ง 2 คน มีความสัมพันธ์กัน

หรือ

$H_0 : \tau = 0$

$H_1 : \tau \neq 0$

ระดับนัยสำคัญ กำหนดให้  $\alpha=0.05$

$$\tau = 0.689$$

ทดสอบนัยสำคัญ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์ ( $\tau$ )

เนื่องจาก  $n \geq 10$  จึงต้องใช้  $Z$  ในการทดสอบนัยสำคัญ  
โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{\tau \sqrt{9n(n-1)}}{\sqrt{2(2n+5)}}$$

$$Z = \frac{0.689 \sqrt{9(10)(10-1)}}{\sqrt{2\{2(10)+5\}}}$$

$$Z = \frac{19.609}{5.477}$$

$$Z = 3.58$$

หาค่าวิกฤติของ  $Z$  โดยการเปิดตาราง  $A$  ในภาคผนวก ที่  $\alpha = 0.05$

พบว่าค่าวิกฤติของ  $Z$  จากตาราง = 1.96 และ

$Z$  ที่คำนวณได้ = 3.58

จะเห็นว่า  $Z_{\text{คำนวณ}} > Z_{\text{ตาราง}}$  สรุปได้ว่า มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าการจัดอันดับผลงานนักเรียนของครูทั้ง 2 คน มีความสัมพันธ์กันหรือสอดคล้องกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

**ตัวอย่างที่ 3.7 (กรณีให้ผู้ให้อันดับแต่ละคนให้อันดับที่ซ้ำกัน)**

ในการตรวจผลงานของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 10 คน โดยให้ครู 2 คน เป็นผู้ให้คะแนนแบบจัดอันดับที่ ของผลงานผลเป็นดังนี้

ตารางที่ 3.15 แสดงการให้คะแนนผลงานของนักเรียนจำนวน 10 คน โดยครูจำนวน 2 คน

| ครู     | คะแนนผลงานของนักเรียน |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------|-----------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|         | 1                     | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| คนที่ 1 | 19                    | 14 | 20 | 16 | 12 | 11 | 18 | 15 | 13 | 17 |
| คนที่ 2 | 20                    | 13 | 18 | 15 | 14 | 11 | 18 | 17 | 13 | 16 |

ตารางที่ 3.16 แสดงการอันดับที่ผลงานของนักเรียนจำนวน 10 คน โดยครูจำนวน 2 คน

| ครู     | อันดับที่ครูจัดให้แก่นักเรียนคนที่ |     |     |   |   |    |     |   |     |    |
|---------|------------------------------------|-----|-----|---|---|----|-----|---|-----|----|
|         | 1                                  | 2   | 3   | 4 | 5 | 6  | 7   | 8 | 9   | 10 |
| คนที่ 1 | 2                                  | 7   | 1   | 5 | 9 | 10 | 3   | 6 | 8   | 4  |
| คนที่ 2 | 1                                  | 8.5 | 2.5 | 6 | 7 | 10 | 2.5 | 4 | 8.5 | 5  |

**วิธีทำ สมมติฐาน**

$H_0$  : การจัดอันดับผลงานนักเรียนของครูทั้ง 2 คน ไม่มีความสัมพันธ์กัน

$H_1$  : การจัดอันดับผลงานนักเรียนของครูทั้ง 2 คน มีความสัมพันธ์กัน

หรือ

$H_0 : \tau = 0$

$H_1 : \tau \neq 0$

ระดับนัยสำคัญ กำหนดให้  $\alpha=0.05$

### การทดสอบ

- เรียงลำดับการให้คะแนนผลงานของนักเรียนของครูคนที่ 1 เป็น 1, 2, 3, 4, ... ก่อน ส่วนอันดับที่ของครูอีกคนหนึ่งจัดให้ตรงกับคู่ลำดับของครูคนแรกจัดดังนี้

ตารางที่ 3.17 แสดงอันดับที่ผลงานของนักเรียนจำนวน 10 คน โดยครูจำนวน 2 คน

| ครู     | อันดับที่ |   |     |    |   |   |     |     |   |    |
|---------|-----------|---|-----|----|---|---|-----|-----|---|----|
|         | 3         | 1 | 7   | 10 | 4 | 8 | 2   | 9   | 5 | 6  |
| คนที่ 1 | 1         | 2 | 3   | 4  | 5 | 6 | 7   | 8   | 9 | 10 |
| คนที่ 2 | 2.5       | 1 | 2.5 | 5  | 6 | 4 | 8.5 | 8.5 | 7 | 10 |

- การจัดอันดับของครูคนที่ 2 โดยผลการจัดอันดับไม่เรียงจากน้อยไปมาก พิจารณาเปรียบเทียบจากอันดับซ้ายสุดไปขวาได้ดังนี้

ตารางที่ 3.18 แสดงคู่อันดับที่เปรียบเทียบเพื่อหาผลรวมของการจัดอันดับ

| คู่อันดับที่เปรียบเทียบ                                                | คะแนน                   | รวม |
|------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-----|
| (2.5,1)(2.5,2.5)(2.5,5)(2.5,6)(2.5,4)(2.5,8.5)(2.5,8.5)(2.5,7)(2.5,10) | -1,0,+1,+1,+1,+1,+1,+1  | +6  |
| (1,2.5)(1,5)(1,5)(1,6)(1,4)(1,8.5)(1,8.5)(1,7)(1,10)                   | +1,+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1 | +8  |
| (2.5,5)(2.5,6)(2.5,4)(2.5,8.5)(2.5,8.5)(2.5,7)(2.5,10)                 | +1,+1,+1,+1,+1,+1,+1    | +7  |
| (5,6)(5,4)(5,8.5)(5,8.5)(5,7)(5,10)                                    | +1,-1,+1,+1,+1,+1       | +4  |
| (6,4)(6,8.5)(6,8.5)(6,7)(6,10)                                         | -1,+1,+1,+1,+1          | +3  |
| (4,8.5)(4,8.5)(4,7)(4,10)                                              | +1,+1,+1,+1             | +4  |
| (8.5,8.5)(8.5,7)(8.5,10)                                               | 0,-1,+1                 | 0   |
| (8.5,7)(8.5,10)                                                        | -1,+1                   | 0   |
| (7,10)                                                                 | +1                      | +1  |
|                                                                        | รวม                     | 33  |



3. S คือ ผลรวมของการจัดอันดับในขั้นที่ 2

$$S = \sum P - \sum Q = 33$$

4. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เคนคอลลี

ในอันดับของคะแนนของครูคนที่ 1

เนื่องจาก ลำดับเรียงจากน้อยไปหามากและไม่ซ้ำกันเลขจะได้ว่า

$$U = 0$$

ในอันดับของคะแนนของครูคนที่ 2

จะพบว่ามีอันดับที่ซ้ำกัน อยู่ 2 ชุด คือ

ชุดที่ 1 มี 2.5 ซ้ำกัน 2 ค่า และ

ชุดที่ 2 มี 8.5 ซ้ำกัน 2 ค่า

ให้  $v$  = จำนวนของค่าสังเกตที่มีค่าซ้ำกันในอันดับ

ซึ่ง  $v = 2$  ดังนั้น

$$V = \frac{1}{2} \sum v(v-1)$$

$$V = \frac{1}{2} [2(2-1) + (2(2-1))]$$

$$V = 2$$

$$\tau = \frac{S}{\sqrt{\frac{n(n-1)}{2} - U} \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} - V}}$$

$$\tau = \frac{33}{\sqrt{\frac{10(10-1)}{2} - 0} \sqrt{\frac{10(10-1)}{2} - 2}}$$

$$\tau = 0.75$$

คำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนคอลลี จากสมการที่ (3.14) ซึ่งยังไม่ได้ปรับแก้สำหรับข้อมูลที่เป็นค่าสังเกตที่ซ้ำกัน เพื่อเปรียบเทียบกับ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนคอลลี จากสูตรที่ (3.16) ซึ่งปรับแก้แล้ว

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)}$$

$$\tau = \frac{2(33)}{10(10-1)}$$

$$\tau = 0.73$$

ถ้าไม่พิจารณาค่าสังเกตที่ซ้ำกัน โดยการใช้สูตร ที่ (3.14) ในการคำนวณ  $\tau$  เราจะพบว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนคอลลี  $\tau = 0.73$  ซึ่งน้อยกว่าค่าที่คำนวณจากสมการที่ (3.16) ซึ่ง  $\tau = 0.75$  อธิบายค่าความแตกต่างนี้ได้ คือค่าสังเกตที่ซ้ำกันมีผลทำให้ค่า  $\tau$  ลดลงเมื่อไม่ได้ปรับแก้ นั่นคือ สมการที่ (3.14) และ(3.16) แตกต่างกันเนื่องจากการปรับแก้

ทดสอบนัยสำคัญ ของ  $\tau$  เนื่องจาก  $n > 10$  จึงต้องใช้ สถิติทดสอบ  $Z$  ในการทดสอบนัยสำคัญ โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{\tau\sqrt{9n(n-1)}}{\sqrt{2(2n+5)}}$$

$$Z = \frac{0.75\sqrt{9(10)(10-1)}}{\sqrt{2\{2(10)+5\}}}$$

$$Z = \frac{21.345}{7.07}$$

$$Z = 3.02$$

หาค่าวิกฤติของ  $Z$  โดยการเปิดตาราง  $A$  ในภาคผนวก ที่  $\alpha = 0.05$

พบว่าค่าวิกฤติของ  $Z$  จากตาราง  $= 1.96$  และ

$Z$  ที่คำนวณได้  $= 3.02$

จะเห็นว่า  $Z_{\text{คำนวณ}} > Z_{\text{ตาราง}}$  สรุปได้ว่า มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าการจัดอันดับผลงาน  
นักเรียนของครูทั้ง 2 คน มีความสัมพันธ์กันหรือสอดคล้องกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

### 3.5 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนดอลล์

(The Kendall Partial Rank Correlation Coefficient :  $\tau_{xy.z}$ )

การศึกษาความสัมพันธ์อย่างง่ายนั้นเป็นการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร โดยไม่ได้คำนึงว่าความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นนั้น เป็นผลมาจากตัวแปรอื่นอีกหรือไม่ ดังนั้นค่าสหสัมพันธ์ที่คำนวณได้จึงเป็นค่าสหสัมพันธ์ที่รวมเอาความสัมพันธ์ได้ว่า เช่น ขนาดของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองอย่างแท้จริง หากต้องการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว จะต้องมีการควบคุมตัวแปรอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ให้คงที่เพื่อขจัดอิทธิพลของตัวแปรนี้ออกไป ซึ่งกระทำได้ 2 วิธี

1. กำจัดตัวแปรที่คิดว่ามีส่วนเกี่ยวข้องออกไป (ซึ่งกระทำได้ยากมาก)
2. หาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์บางส่วนย่อย ซึ่งกระทำได้โดยใช้วิธีการทางสถิติ ซึ่งจะกล่าวถึงในที่นี้

การทดสอบสมมติฐานจะตั้งสมมติฐานดังนี้

สมมติฐานการทดสอบ

$H_0$  : ไม่มีความสัมพันธ์กันระหว่าง ตัวแปรทั้ง 2 เมื่อ จำกัดหรือควบคุม อีกตัวแปรหนึ่ง

$H_1$  : ตัวแปรทั้ง 2 มีความสัมพันธ์กัน เมื่อ จำกัดหรือควบคุม อีกตัวแปรหนึ่ง

หรือ

$$H_0 : \tau_{xy.z} = 0$$

$$H_1 : \tau_{xy.z} \neq 0$$

การกำหนดตัวแปร

สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ส่วนย่อยได้โดยใช้สูตร

$$\tau_{xy.z} = \frac{\tau_{xy} - \tau_{xz} \tau_{yz}}{\sqrt{(1 - \tau_{xz}^2)(1 - \tau_{yz}^2)}} \quad (3.23)$$

$$\tau_{xy.z} = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} \quad (3.24)$$

$$\tau_{xy,z} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \quad (3.25)$$

$$r_{ij,k} = \frac{r_{ij} - (r_{ik})(r_{jk})}{\sqrt{(1 - r_{ik}^2)(1 - r_{jk}^2)}} \quad (3.26)$$

เมื่อ  $\tau_{xy}$  แทนค่า สหสัมพันธ์อันดับระหว่าง ตัวแปร X และ Y

$\tau_{xz}$  แทนค่า สหสัมพันธ์อันดับระหว่าง ตัวแปร X และ Z

$\tau_{yz}$  แทนค่า สหสัมพันธ์อันดับระหว่าง ตัวแปร Y และ Z

$\tau_{xy,z}$  แทนค่าสหสัมพันธ์อันดับระหว่าง ตัวแปร Y และ Z โดยควบคุมตัวแปร Z

a, b, c และ d แทนจำนวนความถี่ของเครื่องหมายในการเปรียบเทียบการจัดอันดับที่ละคู่ของตัวแปร โดยที่

a แทนจำนวนความถี่เครื่องหมาย คู่ของตัวแปร X และ Y มีเครื่องหมายเหมือนตัวแปร Z

b แทนจำนวนความถี่เครื่องหมาย คู่ของตัวแปร X มีเครื่องหมายเหมือน ตัวแปร Z แต่คู่ของตัวแปร Y มีเครื่องหมายไม่เหมือน ตัวแปร Z

c แทนจำนวนความถี่เครื่องหมาย คู่ของตัวแปร X มีเครื่องหมายไม่เหมือน ตัวแปร Z แต่คู่ของตัวแปร Y มีเครื่องหมายเหมือน ตัวแปร Z

d แทนจำนวนความถี่เครื่องหมายคู่ของตัวแปร X และ Y มีเครื่องหมายไม่เหมือนตัวแปร Z

วิธีการคำนวณหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนคอลล์ ( $\tau_{xy,z}$ )

1. จัดอันดับกลุ่มตัวอย่างตามตัวแปร สมมติให้เป็น X, Y, Z ตัวอย่าง เช่น การจัดอันดับตามตัวแปร 3 ตัว

ตารางที่ 3.19 แสดงการจัดอันดับกลุ่มตัวอย่างตามตัวแปร X, Y, Z

| ตัวแปร | กลุ่มตัวอย่าง |    |     |    |
|--------|---------------|----|-----|----|
|        | I             | II | III | IV |
| X      | 1             | 2  | 3   | 4  |
| Y      | 2             | 1  | 4   | 3  |
| Z      | 3             | 1  | 2   | 4  |

2. เปรียบเทียบการจัดอันดับของแต่ละคู่ ในแต่ละตัวแปรซึ่งจะจัดได้  $\binom{4}{2}$  คู่ โดยพิจารณาได้ดังนี้
- ถ้าคู่ใดอันดับต่ำกว่าอยู่ข้างหน้าอันดับสูงกว่า จะให้เครื่องหมาย +
- ถ้าคู่ใดอันดับสูงกว่าอยู่ข้างหน้าอันดับต่ำกว่า จะให้เครื่องหมาย -
- จากตารางที่ 3.19 เปรียบเทียบการจัดอันดับทีละคู่ของตัวแปร 3 ตัว จะได้

ตารางที่ 3.20 แสดงผลการเปรียบเทียบการจัดอันดับทีละคู่ของตัวแปร

| ตัวแปร | กลุ่มตัวอย่าง |          |         |           |          |           |
|--------|---------------|----------|---------|-----------|----------|-----------|
|        | (I, II)       | (I, III) | (I, IV) | (II, III) | (II, IV) | (III, IV) |
| X      | +             | +        | +       | +         | +        | +         |
| Y      | -             | +        | +       | +         | +        | -         |
| Z      | -             | -        | +       | +         | +        | +         |

3. จัดอันดับของความสัมพันธ์โดยควบคุมตัวแปรอื่น ที่ไม่เกี่ยวข้อง จากตัวอย่าง คือ ตัวแปร Z นำ ไปใส่ในตารางการฉีกร ดังนี้

ตารางที่ 3.21 แสดงจัดอันดับของความสัมพันธ์โดยควบคุมตัวแปรอื่น ที่ไม่เกี่ยวข้องในรูปตารางการฉีกร

| การเปรียบเทียบ                           | คู่ของ Y ที่มี<br>เครื่องหมายเหมือน Z | คู่ของ Y ที่มี<br>เครื่องหมายไม่เหมือน Z | รวม                                |
|------------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------|
| คู่ของ X ที่มีเครื่องหมาย<br>เหมือน Z    | a                                     | b                                        | a + b                              |
| คู่ของ X ที่มีเครื่องหมายไม่<br>เหมือน Z | c                                     | d                                        | c + d                              |
|                                          | a + c                                 | b + d                                    | $N = \binom{N}{2} = a + b + c + d$ |

#### 4. หาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เชิงอันดับของส่วนย่อย

4.1 เมื่อกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก หาในรูปของตารางการแจกแจงขนาด  $2 \times 2$

$$\tau_{xy,z} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

$\tau_{xy,z}$  = ค่าสหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y โดยจำกัดหรือควบคุม ตัวแปร Z

สูตรนี้บางครั้งเรียก สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ฟิ (Phi Coefficient) และสามารถแสดงให้อยู่ในรูป

$$\tau_{xyz} = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}$$

4.2 ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่  $n > 10$  จะใช้สูตร

$$\tau_{xyz} = \frac{\tau_{xy} - \tau_{xz}\tau_{yz}}{\sqrt{(1-\tau_{xz}^2)(1-\tau_{yz}^2)}}$$

การทดสอบความมีนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนดอลล์

จะใช้การทดสอบด้วยสถิติ  $t$  โดยมี ขั้นตอนความเป็นอิสระ  $(df) = n - 3$  ถ้ามีตัวแปร 3 ตัว

$$t = \frac{r_{123}}{\sqrt{\frac{(1-r_{123}^2)}{(n-3)}}} \quad (3.27)$$

ถ้ามีตัวแปรมากกว่า 3 ตัว

$$t = \frac{(r_{12.34...m})\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{(1-r_{12.34...m}^2)}} \quad (3.28)$$

$$df = n - m - 1$$

$n$  แทน ขนาดกลุ่มตัวอย่าง

$m$  แทนจำนวนตัวแปร

ถ้า  $t_{\text{คำนวณ}} > t_{\text{ตาราง}}$  ที่ระดับนัยสำคัญ  $\alpha$  และ ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ  $n-m-1$  แสดงว่ามีนัยสำคัญ สรุปได้ว่า ตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันอย่างแท้จริง (ค่าวิกฤติของ  $t$  หาโดยการเปิดตาราง B ในภาคผนวก)

#### การแปลผลสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนคอลล์

การแปลผลสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนคอลล์จะเป็นทำนองเดียวกันกับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนคอลล์ นั่นคือ ความสัมพันธ์ที่ได้เป็นการแสดงแต่เพียงว่า การเกิดของสองอย่างหรือ สองเหตุการณ์นั้น เป็นไปตามกัน สอดคล้องกัน หรือกลับกัน

ตัวอย่างที่ 3.8 จากการสอบนักเรียน 12 คน ในการสอบวิชาการวิเคราะห์การถดถอย (X) การวางแผนการตลาด (Y) และ สถิติเบื้องต้น (Z) ของนักเรียน 12 คน ได้ข้อมูลคะแนน และ อันดับที่ ดังตารางที่ 3.22

ตารางที่ 3.22 แสดงคะแนนและอันดับที่ของคะแนนการสอบ 3 วิชา ของนักเรียน 12 คน

| นักเรียนคนที่ | คะแนน | อันดับ | คะแนน | อันดับ | คะแนน | อันดับ |
|---------------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
|               | X     | X      | Y     | Y      | Z     | Z      |
| 1             | 42    | 3      | 82    | 2      | 1     | 1.5    |
| 2             | 46    | 4      | 98    | 6      | 1     | 1.5    |
| 3             | 39    | 2      | 87    | 5      | 2     | 3.5    |
| 4             | 37    | 1      | 40    | 1      | 2     | 3.5    |
| 5             | 65    | 8      | 116   | 10     | 4     | 5.0    |
| 6             | 88    | 11     | 113   | 9      | 6     | 6.0    |
| 7             | 86    | 10     | 111   | 8      | 7     | 7.0    |
| 8             | 56    | 6      | 83    | 3      | 8     | 8.0    |
| 9             | 62    | 7      | 85    | 4      | 9     | 9.0    |
| 10            | 92    | 12     | 126   | 12     | 10    | 10.5   |
| 11            | 54    | 5      | 106   | 7      | 10    | 10.5   |
| 12            | 81    | 9      | 117   | 11     | 12    | 12.0   |



จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนคอลล์ระหว่างตัวแปร X และ ตัวแปร Y เมื่อกำจัดตัวแปร Z ออกไป

วิธีทำ

สมมติฐาน

$H_0$  : ไม่มีความสัมพันธ์กันระหว่าง ตัวแปร X และ Y เมื่อ ควบคุมตัวแปร Z

$H_1$  : ตัวแปร X และ Y มีความสัมพันธ์กัน เมื่อควบคุมตัวแปร Z

หรือ

$$H_0 : \tau_{xy.z} = 0$$

$$H_1 : \tau_{xy.z} \neq 0$$

กรณีนี้  $n = 12$  ถือเป็นตัวอย่างขนาดใหญ่ ดังนั้นคำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนคอลล์โดยใช้สูตรที่ (3.23)

$$\tau_{xy.z} = \frac{\tau_{xy} - \tau_{xz} \tau_{yz}}{\sqrt{(1 - \tau_{xz}^2)(1 - \tau_{yz}^2)}}$$

คำนวณหาค่าของ  $\tau_{xy}$  ,  $\tau_{xz}$  และ  $\tau_{zy}$  จากสูตรที่ (3.14) และ (3.16) ในเรื่องสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่เคนคอลล์

$$\tau_{xy} = 0.67$$

$$\tau_{xz} = 0.39$$

$$\tau_{zy} = 0.36$$

แทน  $\tau_{xy}$  ,  $\tau_{xz}$  และ  $\tau_{zy}$  ในสูตรที่ (3.23)

$$\tau_{xy.z} = \frac{\tau_{xy} - \tau_{xz} \tau_{yz}}{\sqrt{(1 - \tau_{xz}^2)(1 - \tau_{yz}^2)}}$$

$$\tau_{xy.z} = \frac{0.67 - (0.36)(0.39)}{\sqrt{(1 - 0.36^2)(1 - 0.39^2)}}$$

$$\tau_{xy.z} = 0.62$$

ทดสอบนัยสำคัญ  $\tau_{xyz}$

ใช้สูตร (3.27)

$$t = \frac{r_{12.3}}{\sqrt{\frac{(1-r_{12.3}^2)}{(n-3)}}}$$

$$t = \frac{0.62}{\sqrt{\frac{(1-0.62^2)}{(12-3)}}}$$

$$t = 2.37$$

หาค่าวิกฤติของ  $t$  โดยการเปิดตาราง  $B$  ในภาคผนวก ที่  $\alpha = 0.05$

และ  $df = n-3 = 12-3 = 9$

พบว่าค่าวิกฤติของ  $t$  จากตาราง = 2.262 และ

$t$  ที่คำนวณได้ = 2.37

จะเห็นว่า  $t_{\text{คำนวณ}} > t_{\text{ตาราง}}$  สรุปได้ว่า มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าจะเน้นการสอบวิชา  
การวิเคราะห์การถดถอยมีความสัมพันธ์กับคะแนนการสอบวิชาวางแผนการทดลองอย่างแท้จริงที่  
ระดับนัยสำคัญ 0.05

### 3.6 สัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์

(The Kendall Coefficient of Concordance :  $\omega$ )

โดยทั่ว ๆ ไป ในงานวิจัยผู้วิจัยต้องการศึกษาความสัมพันธ์ ระหว่างตัวแปร 2 ตัวแปร หรือ มากกว่า 2 ตัวแปร ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร ซึ่งคุณสมบัติของตัวแปรเหล่านี้ โดยมากแล้ว ตัวแปรจะเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ และ มีมาตรวัดเป็นมาตราแบบอันดับหรือมาตราเรียงลำดับ ดังนั้นเมื่อสนใจที่จะศึกษาหาความสัมพันธ์ของตัวแปรที่จะใช้วิธีสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์ (The Kendall of Concordance) ตัวอย่าง เช่น การหาระดับความสัมพันธ์ของการให้อันดับความนิยมในการคั้นน้ำอ้อยคน จำนวน 3 ชนิด โดยมีผู้ชิม 3 คน จากตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าต้องการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผู้ตัดสินใจว่ามีความสอดคล้องกันหรือไม่ โดยใช้ตัวสถิติความสอดคล้องเคนคอลล์ (The Kendall of Concordance) เป็นตัววัด ซึ่ง ความสอดคล้องเคนคอลล์ เป็นวิธีการหาสัมประสิทธิ์ที่จะบ่งชี้ให้ทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร  $m$  ตัว (หรือการจัดอันดับ  $m$  ครั้ง) และค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์ เป็นการศึกษาระดับความสัมพันธ์ระหว่างผู้ตัดสิน (Interjudge) ว่ามีความสอดคล้องกันหรือไม่ หรือมุ่งหมายหาความเชื่อถือได้ระหว่างการทดสอบต่าง ๆ (Inter Reliability) หากมีความสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์ ค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์ จะเท่ากับ 1 หากไม่มีความสอดคล้องกันเลยจะเท่ากับ ศูนย์

สถิติที่ใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแบบนี้ สามารถนำมาใช้ได้กับการจัดอันดับของข้อมูลหลาย ๆ ชุด (ตั้งแต่ 3 ชุดขึ้นไป) ดังนั้น ข้อมูลที่จะใช้สถิตินี้ได้ต้องมีมาตรวัดเป็นนามบัญญัติ หรือ เรียงอันดับ

#### สมมติฐานการทดสอบ

$H_0$  : ข้อมูลอันดับที่จำนวน  $m$  ชุด ไม่มีความสอดคล้องกัน

$H_1$  : ข้อมูลอันดับที่จำนวน  $m$  ชุด มีความสอดคล้องกัน

หรือ

$H_0 : \omega = 0$

$H_1 : \omega \neq 0$

### การกำหนดตัวแปร

ดังได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนแล้ว ถึงมาตรวัดที่จะนำมาคำนวณหาค่าความสัมพันธ์ซึ่งสัมพันธ์กับความสอดคล้องเคนคอลล จะคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$\omega = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)} \quad (3.29)$$

กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน

$$\omega = \frac{S}{\frac{1}{2}m^2(n^3 - n) - m \sum U'} \quad (3.30)$$

$\omega$  แทน สัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล

( The Kendall Coefficient of Concordance )

$$0 \leq \omega \leq 1$$

$U'$  แทนเทอมการปรับแก้กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกันของเซตที่ 1 (ซึ่งเป็นเทอมการปรับแก้ ที่ใช้วิธีเดียวกันกับวิธีของสหสัมพันธ์สเปียร์แมน)

$R_j$  แทน ผลรวมของอันดับ

$m$  แทน จำนวนคนที่ให้อันดับ

$n$  แทน อันดับหรือจำนวนกลุ่มตัวอย่างที่ถูกจัดอันดับ

$S$  แทน ผลรวมกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ย ของ  $R_j$

### ขั้นตอนในการคำนวณ

1. จัดอันดับตัวแปร (ซึ่งข้อมูลจะต้องอยู่ในมาตราเรียงลำดับ Ordinal scale ) หรือ สามารถจัดให้อยู่ในมาตราเรียงอันดับได้

2. หาผลรวมของผลรวมอันดับทั้งหมด  $\sum R_j$  ซึ่งหาได้จาก

$$\sum R_j = \frac{mn(n+1)}{2} \quad (3.31)$$

3. หาค่าเฉลี่ยของผลรวมอันดับทั้งหมดคือหาค่า  $\overline{R_j}$

$$\frac{\sum R_j}{n} = \frac{m(n+1)}{2} \quad (3.32)$$

4. หาผลรวมกำลังสองของผลต่างของยอดรวมของอันดับที่กำหนดให้แต่ละหน่วยกับค่าเฉลี่ยของผลรวมอันดับทั้งหมด (S) ได้จากสมการ

$$S = \sum_{i=1}^n (R_j - \frac{\sum R_j}{n})^2 \quad (3.33)$$

5. การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์ ได้ 2 กรณี

- กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตไม่ซ้ำกันใช้สมการที่ (3.29)

$$\omega = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}$$

- กรณีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกันใช้สมการที่ (3.30)

$$\omega = \frac{S}{\frac{1}{2}m^2(n^3 - n) - m \sum U'}$$

ตัวอย่างที่ 3.9 สมมติมีกรรมการบริษัท 3 คน สัมภาษณ์ผู้สมัครงานจำนวน 3 คน และจัดลำดับผู้สมัครงานแยกตามความเหมาะสมสำหรับงานที่เปิด คณะกรรมการ 3 คน คือ X, Y, Z เป็นผู้จัดลำดับผู้สมัครงาน 6 คน แสดงได้ในตารางที่ 3.23

ตารางที่ 3.23 แสดงการจัดอันดับที่ผู้สมัครงานแยกตามความเหมาะสมสำหรับงานที่เปิดโดยคณะกรรมการ 3 คน

| กรรมการ        | ผู้สมัคร |    |    |    |    |   |
|----------------|----------|----|----|----|----|---|
|                | A        | B  | C  | D  | E  | F |
| X              | 1        | 6  | 3  | 2  | 5  | 4 |
| Y              | 1        | 5  | 6  | 4  | 2  | 3 |
| Z              | 6        | 3  | 2  | 5  | 4  | 1 |
| R <sub>j</sub> | 8        | 14 | 11 | 11 | 11 | 8 |

แถวล่างสุดของตารางให้เป็น R<sub>j</sub> เป็นผลรวมอันดับของแต่ละผู้สมัครถ้าคณะกรรมการมีความคิดเห็นสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์เกี่ยวกับผู้สมัครงาน เช่น ถ้าเขาให้อันดับของผู้สมัครงาน 6 คนในอันดับเดียวกัน นั่นคือ ผู้สมัครงาน คนหนึ่ง จะถูกจัดอันดับเป็น 1 และผลรวมของอันดับเป็น R<sub>j</sub> จะได้ว่า  $1+1+1 = 3 = m$

ถ้าคณะกรรมการทั้ง 3 คน จัดอันดับผู้สมัครงาน โดย ให้อันดับผู้สมัครงาน ตั้งแต่ อันดับที่ 1 ถึง 6 จะได้ดังนี้

$$R_j = 1 + 1 + 1 = 3 = m$$

$$R_j = 2 + 2 + 2 = 6 = 2m$$

⋮

$$R_j = 6 + 6 + 6 = 18 = nm$$

ในความเป็นจริง ความคิดเห็นของคณะกรรมการที่สอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์ นั้นจะมีผลรวมของอันดับมากมายให้เป็น R<sub>j</sub> ซึ่งอาจจะเป็น 3, 6, 9, 12, 15 และ 18 โดยทั่วๆ ไป เมื่อความคิดเห็นของอันดับ m เขต สอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์ จะได้ R<sub>j</sub> ซึ่งมีลักษณะเป็นอนุกรม  $m, 2m, 3m, \dots, nm$

ในทางกลับกัน ถ้าความคิดเห็นของคณะกรรมการ 3 ท่าน ไม่สอดคล้องกัน R<sub>j</sub> ต่างๆ จะได้โดยการประมาณ

จากตัวอย่าง ถ้าต้องการให้ชัดเจนเกี่ยวกับระดับความคิดเห็นของผู้ตัดสิน m คน ซึ่งถูกสะท้อนโดยระดับของความแปรปรวนท่ามกลางผลรวมอันดับ n กับ ω สัมประสิทธิ์ความสอดคล้อง คือ ฟังก์ชันของระดับความแปรปรวน

จากตัวอย่าง จงหาระดับความสัมพันธ์ของการให้อันดับผู้สมัครงาน 6 คน โดยคณะกรรมการ 3 คน

วิธีทำ สมมติฐาน

$H_0$  : การจัดอันดับที่ผู้สมัครงาน 6 คน โดยกรรมการ 3 คน มีความคิดเห็นที่สอดคล้องกัน

$H_1$  : การจัดอันดับที่ผู้สมัครงาน 6 คน โดยกรรมการ 3 คน มีความคิดเห็นไม่สอดคล้องกัน

หรือ

$$H_0 : \omega = 0$$

$$H_1 : \omega \neq 0$$

จากตัวอย่าง  $m = 3$  ,  $n = 6$

$$\begin{aligned} \overline{R_j} &= \frac{\sum R_j}{n} = \frac{m(n+1)}{2} \\ &= 10.5 \end{aligned}$$

ผลรวมกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของ  $R_j$  ได้จาก

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \left( R_j - \frac{\sum R_j}{n} \right)^2 \\ &= (8-10.5)^2 + (14-10.5)^2 + (11-10.5)^2 + (11-10.5)^2 \\ &\quad + (11-10.5)^2 + (8-10.5)^2 \\ &= 25.5 \end{aligned}$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์(  $\omega$  ) ได้จาก

$$\omega = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}$$

$$\omega = \frac{12(25.5)}{3^2(6^3 - 6)}$$

$$\omega = 0.16$$

$\omega = 0.16$  คือระดับความคิดเห็นที่สอดคล้องกันของกรรมการ 3 คน ที่จัดอันดับผู้สมัครงาน 6 คน ซึ่งการที่จะตัดสินว่าระดับความคิดเห็นของคณะกรรมการนั้นจะสอดคล้องกันหรือไม่นั้นจะต้องมีการทดสอบนัยสำคัญก่อนจึงจะสรุปได้

การทดสอบนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์

กรณีที่ตัวอย่างมีขนาดเล็ก  $n$  ( จำนวนผู้จัดอันดับ )  $\leq 7$

ใช้ตารางค่าวิกฤตของ  $S$  ในการหาสัมประสิทธิ์ความสอดคล้อง (ตาราง F ภาคผนวก) ถ้าค่า  $S$  ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตของ  $S$  ในตาราง สรุปได้ว่าค่า  $\omega$  ที่ได้มีนัยสำคัญทางสถิติ

กรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่  $n > 7$

ให้เปลี่ยนค่า  $\omega$  เป็น  $\chi^2$  โดยใช้สมการ

$$\chi^2 = m(n-1)\omega \quad (3.34)$$

ถ้าค่า  $\chi^2$  ที่คำนวณได้มากกว่าค่าวิกฤตของ  $\chi^2$  ที่เปิดจากตาราง  $C$  ในภาคผนวกที่ ขึ้นความเป็นอิสระ;  $df = n - 1$  แสดงว่า มีนัยสำคัญทางสถิติ



### การแปลผลสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์

ค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์ (K) ที่ได้แสดงถึงความสอดคล้องกันของการให้คะแนนหรือการจัดอันดับของผู้ให้อันดับหลาย ๆ คน

#### จากตัวอย่างที่ 3.9

ทดสอบนัยสำคัญ ของ K เนื่องจาก  $n$  น้อยกว่า 7 จึงเปิดตาราง F ในภาคผนวกเพื่อหาค่าวิกฤติของ S

ที่  $\alpha = 0.05$  เมื่อ  $m = 3$   $n = 6$

พบว่าค่าวิกฤติของ S จากตาราง = 103.9 และ

S ที่คำนวณได้ = 25.5

จะเห็นว่า S(คำนวณ) มีค่าน้อยกว่า S (ตาราง) สรุปได้ว่า ค่า K ที่ได้ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่ากรรมการทั้ง 3 คน จัดอันดับผู้สมัครงาน จำนวน 6 คน ไม่สอดคล้องกัน หรือมีความคิดเห็นไม่ตรงกัน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 นั่นคือการสัมภาษณ์ผู้สมัครงานของคณะกรรมการนี้ไม่น่าจะเชื่อได้

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาระดับความสัมพันธ์ของการให้อันดับความนิยมในการดื่มน้ำอัดลมจำนวน 6 ชนิด โดยผู้ชิม 3 คน จากข้อมูลในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.24 แสดงการจัดอันดับความนิยมในการดื่มน้ำอัดลม 6 ชนิด

| น้ำอัดลมชนิดที่ | อันดับความนิยมของผู้ชิม |         |         | ผลรวมของอันดับ |
|-----------------|-------------------------|---------|---------|----------------|
|                 | คนที่ 1                 | คนที่ 2 | คนที่ 3 |                |
| 1               | 2                       | 6       | 2       | 10             |
| 2               | 4                       | 2       | 6       | 12             |
| 3               | 1                       | 1       | 3       | 5              |
| 4               | 3                       | 5       | 4       | 12             |
| 5               | 6                       | 4       | 5       | 15             |
| 6               | 5                       | 3       | 1       | 9              |

### วิธีทำ

สมมติฐาน  $H_0$  : การจัดอันดับของผู้ชิมน้ำอัดลมทั้ง 3 คน ไม่สอดคล้องกัน

$H_1$  : การจัดอันดับของผู้ชิมน้ำอัดลมทั้ง 3 คน สอดคล้องกัน

จัดอันดับตัวแปรและหาผลรวมของอันดับไว้แล้วจึงหาค่าเฉลี่ยของผลรวมของอันดับได้เลย ดังนี้

$$\overline{R_j} = \frac{\sum R_j}{n} = \frac{m(n+1)}{2}$$

จากตัวอย่าง  $m = 3, n = 6$

$$\begin{aligned}\overline{R_j} &= \frac{\sum R_j}{n} = \frac{3(6+1)}{2} \\ &= 10.5\end{aligned}$$

หาผลรวมทั้งหมดกำลังสองของผลต่างของผลรวมของอันดับที่กำหนดให้แต่ละหน่วย กับค่าเฉลี่ยของผลรวมของอันดับทั้งหมด ( $S$ ) โดยใช้สมการ

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=1}^n (R_j - \frac{\sum R_j}{n})^2 \\ &= (10-10.5)^2 + (12-10.5)^2 + (5-10.5)^2 + (12-10.5)^2 + \\ &\quad (9-10.5)^2 \\ &= 57.5\end{aligned}$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ของความสอดคล้อง ( $\omega$ ) จากสมการ (3.29)

$$\omega = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}$$

$$\omega = \frac{12(57.5)}{3^2(6^3 - 6)}$$

$$\omega = 0.365$$

ทดสอบนัยสำคัญ ของ  $\omega$  เนื่องจาก  $n$  น้อยกว่า 7 จึงเปิดตาราง  $F$  ในภาคผนวกเพื่อหาค่าวิกฤติของ  $S$

ที่  $\alpha = 0.05$  เมื่อ  $m = 3, n = 6$

พบว่าค่าวิกฤติของ  $S$  จากตาราง = 103.9 และ

$S$  ที่คำนวณได้ = 57.5

จะเห็นว่า  $S$ (คำนวณ) มีค่าน้อยกว่า  $S$ (ตาราง) สรุปได้ว่า ค่า  $\omega$  ที่ได้ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าการให้อันดับความนิยมในการดื่มน้ำอัดลมจำนวน 6 ขวด โดยผู้ชิม 3 คนนั้นไม่สอดคล้องกัน หรือมีความเห็นไม่ตรงกัน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

### อันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน

เมื่อมีค่าสังเกตที่มีค่าซ้ำกันเกิดขึ้นจะให้อันดับเรียงไปตามปกติหลังจากนั้นนำอันดับของค่าสังเกตที่มีค่าซ้ำกันมาหาค่าเฉลี่ย

ผลของ อันดับของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน (Tied rank) คือ จะลดค่าของ  $\omega$  ที่หาได้จากสมการที่ (3.29) ถ้าสัดส่วนของ อันดับของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน มีขนาดเล็ก ผลของมันก็จะมองข้ามไปได้ และ ยังต้องใช้สมการที่ (3.29) อยู่เช่นเดิม ถ้าสัดส่วนของอันดับที่ซ้ำกัน มีขนาดใหญ่ การปรับแก้ให้ถูกต้องอาจจะเพิ่มค่าของ  $\omega$  ให้มากขึ้นกว่าการไม่ปรับแก้ การปรับแก้ที่ถูกต้องคือการใช้เทอมการปรับแก้วิธีเดียวกันกับวิธีสหสัมพันธ์สเปียร์แมน โดยคำนวณจากสมการที่ (3.8) ต่อไปนี้

$$U' = \frac{1}{12} \sum (u^3 - u)$$

$U'$  เป็นเทอมการปรับแก้กรณีอันดับของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน ของเซตที่ 1

$u$  จำนวนครั้งของตำแหน่งที่ซ้ำกันในแต่ละเซต

การปรับแก้ของการรวมค่าที่ซ้ำกันของสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์ คือสมการที่ (3.30)

$$\omega = \frac{S}{\frac{1}{2} m^2 (n^3 - n) - m \sum U'}$$

ตัวอย่าง 3.11 การสอบสัมภาษณ์เพื่อรับนักศึกษาเข้าศึกษาต่อระดับปริญญาโท ครั้งหนึ่ง มีนักศึกษาจำนวน 10 คน คือนักศึกษาคนที่ 1, 2, 3, ..., 10 สัมภาษณ์โดยอาจารย์ภาควิชาสถิติ จำนวน 3 คนคือคนที่ 1, 2 และ 3

ตารางที่ 3.25 แสดงคะแนนสอบสัมภาษณ์ของผู้มาสอบสัมภาษณ์ จำนวน 10 คน

| อาจารย์<br>คนที่ | นักศึกษาคนที่ |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------------|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                  | 1             | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 1                | 20            | 15 | 18 | 15 | 17 | 12 | 13 | 10 | 12 | 9  |
| 2                | 19            | 20 | 19 | 17 | 17 | 13 | 12 | 15 | 10 | 15 |
| 3                | 17            | 19 | 15 | 15 | 15 | 15 | 12 | 12 | 12 | 8  |

ตารางที่ 3.26 สร้างตารางแสดงอันดับที่ของคะแนนของนักศึกษาผู้มาสอบสัมภาษณ์และหาค่า  $R_j$  โดยการให้อันดับจะเรียงจากมากไปน้อย

| อาจารย์<br>คนที่ | นักศึกษาคนที่ |     |     |      |     |     |    |      |      |      |
|------------------|---------------|-----|-----|------|-----|-----|----|------|------|------|
|                  | 1             | 2   | 3   | 4    | 5   | 6   | 7  | 8    | 9    | 10   |
| 1                | 1             | 4.5 | 2   | 4.5  | 3   | 7.5 | 6  | 9    | 7.5  | 10   |
| 2                | 2.5           | 1   | 2.5 | 4.5  | 4.5 | 8   | 9  | 6.5  | 10   | 6.5  |
| 3                | 2             | 1   | 4.5 | 4.5  | 4.5 | 4.5 | 8  | 8    | 8    | 10   |
| $R_j$            | 5.5           | 6.5 | 9   | 13.5 | 12  | 20  | 23 | 23.5 | 25.5 | 26.5 |

วิธีทำ

สมมติฐาน  $H_0$  : การให้อันดับคะแนนการสอบสัมภาษณ์ของนักศึกษาผู้สอบสัมภาษณ์จำนวน 10 คน โดยอาจารย์ 3 คน นั้นไม่สอดคล้องกัน

$H_1$  : การให้อันดับคะแนนการสอบสัมภาษณ์ของนักศึกษาผู้สอบสัมภาษณ์จำนวน 10 คน โดยอาจารย์ 3 คน นั้นสอดคล้องกัน

จากตัวอย่าง  $m = 3$  ,  $n = 10$

ค่าเฉลี่ย  $\overline{R_j} = \frac{3(10+1)}{2} = 16.5$

หา  $S$  ได้โดยการหาผลบวกกำลังสอง ของผลต่างของยอดรวมของอันดับในแต่ละหน่วยกับค่าเฉลี่ยของผลรวมของอันดับ ( $S$ )

$$\begin{aligned} S &= (5.5-16.5)^2 + (6.5-16.5)^2 + (9-16.5)^2 + (13.5-16.5)^2 + (12-16.5)^2 + \\ &\quad (20-16.5)^2 + (23-16.5)^2 + (23.5-16.5)^2 + (25.5-16.5)^2 + (26.5-16.5)^2 \\ &= 591 \end{aligned}$$

เพราะว่าสัดส่วนของอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกันนั้นมีขนาดใหญ่ ดังนั้นจะใช้สมการที่มี การปรับแก้ในการคำนวณค่าของ  $U$

ในอันดับของคะแนนของอาจารย์คนที่ 1

จะพบว่ามี อันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน อยู่ 2 ชุด คือ

ชุดที่ 1 มี 4.5 ซ้ำกัน 2 ค่า

ชุดที่ 2 มี 7.5 ซ้ำกัน 2 ค่า

สำหรับ ทั้ง 2 กลุ่ม  $u$  = จำนวนของค่าสังเกตที่มีค่าซ้ำกันในอันดับ

ซึ่ง  $u = 2$  ดังนั้น

$$U'_1 = \frac{\sum(u^3 - u)}{12} = \frac{(2^3 - 2) + (2^3 - 2)}{12} = 1$$

ในอันดับของคะแนนของอาจารย์คนที่ 2

มี อันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน จำนวน 3 ชุด และแต่ละชุดจะมีจำนวน 2 ค่าสังเกตที่ซ้ำกัน นั่นคือ  $u = 2$  ในแต่ละกรณีดังนี้

$$\begin{aligned} U'_2 &= \frac{\sum(u^3 - u)}{12} \\ &= \frac{(2^3 - 2) + (2^3 - 2) + (2^3 - 2)}{12} = 1.5 \end{aligned}$$

ในอันดับของคะแนนของอาจารย์คนที่ 3

มีอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน จำนวน 2 ชุด

ชุดที่ 1 มี 4.5 ซ้ำกัน 4 ค่า ในกรณีนี้  $u = 4$

ชุดที่ 2 มี 8 ซ้ำกัน 3 ค่า ในกรณีนี้  $u = 3$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} U'_3 &= \frac{\sum(u^3 - u)}{12} \\ &= \frac{(4^3 - 4) + (3^3 - 3)}{12} = 7 \end{aligned}$$

เมื่อทราบค่าเทอมการปรับแก้ของอันดับที่ซ้ำกันของอาจารย์คนที่ 1, 2 และ 3 แล้วจะหาผลรวมของ  $U'(U'_1, U'_2, U'_3)$  เหล่านั้นได้

$$\sum U' = 1 + 1.5 + 7 = 9.5$$

และจะคำนวณค่า  $\omega$  ที่ปรับแก้แล้วสำหรับข้อมูลที่มีค่าสังเกตที่ซ้ำกัน ได้โดยใช้สมการที่ (3.30)

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{S}{\frac{1}{12} m^2 (n^3 - n) - m \sum U'} \\ &= \frac{591}{\frac{1}{12} (3^2) (10^3 - 10) - 3(9.5)} \\ &= 0.828 \end{aligned}$$

คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องจากสมการที่ (3.29) ซึ่งยังไม่ได้ปรับแก้สำหรับข้อมูลที่มีค่าสังเกตที่ซ้ำกัน เปรียบเทียบกับสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องจากสมการที่ (3.30) ซึ่งปรับแก้แล้ว

$$\omega = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}$$

$$\omega = \frac{12 \times 591}{3^2(10^3 - 10)}$$

$$\omega = 0.796$$

ถ้าไม่พิจารณาอันดับที่ของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน โดยใช้สมการที่ (3.29) ในการคำนวณ  $\omega$  จะพบว่า  $\omega = 0.796$  มีค่าน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนคอลล์ที่คำนวณโดยใช้สมการที่ (3.30)  $\omega = 0.828$  ซึ่งอธิบายความแตกต่างนี้ได้ คือ อันดับของค่าสังเกตที่ซ้ำกันมีผลทำให้ค่า  $\omega$  ลดลง เมื่อไม่ได้ปรับแก้

ทดสอบนัยสำคัญ ของ  $\omega$  เนื่องจาก  $n$  มากกว่า 7 จึงต้องเปลี่ยนค่า  $\omega$  เป็น  $\chi^2$  โดยใช้สมการ

$$\begin{aligned}\chi^2 &= m(n-1)\omega \\ &= 3(10-1)(0.828) \\ &= 22.36\end{aligned}$$

หาค่าวิกฤติของ  $\chi^2$  โดยการเปิดตาราง ที่ C ในภาคผนวก

$$\text{ที่ } \alpha = 0.05 \text{ และ } df = n - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$\text{เมื่อ } m = 3 \quad n = 10$$

$$\text{พบว่าค่าวิกฤติของ } \chi^2 \text{ จากตาราง} = 16.92 \text{ และ}$$

$$\chi^2 \text{ ที่คำนวณได้} = 22.36$$

จะเห็นว่า  $\chi^2$  ที่คำนวณได้ มีค่ามากกว่า  $\chi^2$  จากตาราง สรุปได้ว่า มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าการให้อันดับคะแนนการสอบสัมภาษณ์ของนักศึกษาผู้สอบสัมภาษณ์จำนวน 10 คน โดยอาจารย์ผู้สัมภาษณ์ 3 คน นั้นสอดคล้องกัน หรือมีความเห็นตรงกัน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

## แผนการทดลองแบบบล็อก(อันดับที่)ไม่สมบูรณ์ (Incomplete Block (Ranking) Designs)

โดยทั่วไปการวางแผนการทดลองจะใช้การวางแผนการทดลองแบบบล็อกสมบูรณ์ แต่บางครั้งไม่สามารถนำทรีทเมนต์ทั้งหมดมาใช้ได้ในแต่ละบล็อกซึ่งอาจจะเนื่องมาจากมีทรีทเมนต์จำนวนมากเกินไปหรืออาจจะมีสาเหตุอื่น ดังนั้นในแต่ละบล็อกจึงมีทรีทเมนต์ไม่ครบทุกทรีทเมนต์ จึงเรียกการวางแผนการทดลองนี้ว่า แผนการทดลองแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ซึ่งจะแยกออกเป็น 2 แบบ คือ แบบสมดุลย์ แบบไม่สมดุลย์ แต่ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะแบบสมดุลย์เท่านั้น

### สัญลักษณ์ที่ใช้

- n คือจำนวนทรีทเมนต์ทั้งหมดในการทดลอง
- b จำนวนบล็อก
- k คือจำนวนทรีทเมนต์ในแต่ละบล็อก
- m คือจำนวนซ้ำของแต่ละวิธีการ
- λ คือจำนวนครั้งที่ทรีทเมนต์แต่ละคู่เกิดพร้อมกันในบล็อกเดียวกัน
- N คือจำนวนค่าสังเกตทั้งหมดในการทดลอง

### แบบสมดุลย์

การวางแผนแบบนี้ทุกๆทรีทเมนต์มีความสำคัญเท่ากันหมดองค์ประกอบของทรีทเมนต์ที่ใช้ในแต่ละบล็อกควรถูกเลือกในลักษณะสมดุลย์นั่นคือในแต่ละคู่ของทรีทเมนต์จะเกิดขึ้นในจำนวนครั้งเท่าๆกัน ดังนั้นการวางแผนการทดลองแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ จึงเป็นการวางแผนที่มีทรีทเมนต์ปรากฏในจำนวนครั้งที่เท่าๆกันสมมติว่ามีทรีทเมนต์  $n$  และแต่ละบล็อกจะมีทรีทเมนต์ ปรากฏ  $k$  ( $k < n$ )



## ตัวอย่าง 3.12 แผนผังการทดลองยูเคนสแควร์

ตารางที่ 3.27 แสดงแผนการทดลองที่สมดุลของ 9 ทรีทเมนต์ ในบล็อกขนาด 3 หน่วยการทดลอง

| บล็อก | ซ้ำที่ 1 | บล็อก | ซ้ำที่ 2 | บล็อก | ซ้ำที่ 3 | บล็อก | ซ้ำที่ 4 |
|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|
| 1     | 1 2 3    | 4     | 1 4 7    | 7     | 1 5 9    | 10    | 1 8 6    |
| 2     | 4 5 6    | 5     | 2 5 8    | 8     | 7 2 6    | 11    | 4 2 9    |
| 3     | 7 8 9    | 6     | 3 6 9    | 9     | 4 8 3    | 12    | 7 5 3    |

เป็นตัวอย่างบล็อกไม่สมบูรณ์แต่สมดุลกัน เนื่องจาก 9 ทรีทเมนต์ ถ้าพิจารณาเป็นคู่ของการจับคู่ จะเห็นว่าทุกคู่จะเกิดในบล็อกเดียวกัน 1 ครั้ง เช่นทรีทเมนต์ที่ 1 อยู่คู่กับทรีทเมนต์ที่ 2 และ 3 ในซ้ำที่ 1 , อยู่คู่กับทรีทเมนต์ที่ 4 และ 7 ในซ้ำที่ 2 , อยู่คู่กับทรีทเมนต์ที่ 5 และ 9 ในซ้ำที่ 3 , อยู่คู่กับทรีทเมนต์ที่ 6 และ 8 ในซ้ำที่ 4 นอกจากจะสมดุลแล้วแผนการทดลองนี้มีชื่อเรียกพิเศษว่า แผนการทดลองแบบ แลทิส ซึ่งจะต้องมีจำนวน ทรีทเมนต์ เป็นกำลัง สอง ของจำนวนซ้ำ และจำนวนซ้ำเท่ากับจำนวนบล็อกหนึ่ง

## ตารางที่ 3.28 แสดงการจัด 9 ทรีทเมนต์ในแลทิสสแควร์

| บล็อก | ซ้ำที่ 1 | บล็อก | ซ้ำที่ 2 | บล็อก | ซ้ำที่ 3 | บล็อก | ซ้ำที่ 4 |
|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|
| แถว   | 1 2 3    |       | 4 5 6    |       | 7 8 9    |       | 10 11 12 |
| 1     | 1 2 3    | 4     | 1 4 7    | 7     | 1 6 8    | 10    | 1 9 5    |
| 2     | 4 5 6    | 5     | 2 5 8    | 8     | 9 2 4    | 11    | 6 2 7    |
| 3     | 7 8 9    | 6     | 3 6 9    | 9     | 5 7 3    | 12    | 8 4 3    |

แผนการทดลองนี้มาจากแผนการทดลองตารางที่ 3.27 แต่จัดแล้วให้มีคุณสมบัติของลาตินสแควร์คือ ทุกคู่ของทรีทเมนต์เกิดร่วมแถวเดียวกันและคอลัมน์เดียวกันอย่างละ 1 ครั้ง เรียกว่า แลทิสสแควร์

ตารางที่ 3.29 แสดง การจัด 7 ทรีทเมนต์ในลาตินสแควร์แบบไม่สมบูรณ์

| แถว | คอลัมน์ / บล็อก |   |   |   |   |   |   |
|-----|-----------------|---|---|---|---|---|---|
|     | 1               | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1   | 1               | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2   | 2               | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 |
| 3   | 3               | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 |

การวางแผนการทดลองแบบนี้ มีเพียง 3 แถว แต่มีครบทุกทรีทเมนต์ในแต่ละแถว ส่วนคอลัมน์ก็ครบทุกคอลัมน์มีเพียง 3 ทรีทเมนต์ แต่เป็นแผนการทดลองที่สมดุลเช่นกัน เพราะทุกๆ คู่อยู่ในบล็อกเดียวกัน 1 ครั้งถ้าพิจารณาให้ดีจะเห็นว่ามีส่วนคล้ายลาตินสแควร์ที่ไม่สมบูรณ์ บางครั้งจึงเรียกว่า Incomplete Latin Square แต่ชื่อเฉพาะคือ ยูเด็นสแควร์ (Youden Square)

#### ยูเด็นสแควร์

เป็นลักษณะของบล็อกไม่สมบูรณ์และลาตินสแควร์รวมกันเป็นแผนการทดลองที่ลดความผันแปร 2 ทิศทาง คือ บล็อก และ คอลัมน์

ตัวอย่างที่ 3.13

| บล็อก | ทรีทเมนต์ |   |   |
|-------|-----------|---|---|
| 1     | 1         | 2 | 3 |
| 2     | 2         | 3 | 4 |
| 3     | 3         | 4 | 1 |
| 4     | 4         | 1 | 2 |

$$n = b = 4$$

$$m = k = 3$$

$$\lambda = 2$$

$$N = bk = mn$$

จะเห็นว่าเป็นส่วนหนึ่งของลาตินสแควร์ ขนาด  $4 \times 4$  ดังนี้

ลาตินสแควร์ ขนาด  $4 \times 4$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |

วิธีการสร้างยูเคียนสแควร์

วิธีการที่ง่ายที่สุด คือการสร้างลาตินสแควร์โดยการเลื่อนตัวเลขแต่ละแถวไปทางขวามือ 1 ตำแหน่ง และเลื่อนตัวอื่นๆ ตามไป เรียกว่า Cyclic Latin Square เมื่อได้ลาตินสแควร์ตามต้องการแล้ว จะสร้างยูเคียนสแควร์ได้โดยการตัดคอลัมภ์ใดก็ได้ 1 คอลัมภ์ สำหรับตารางที่มีจำนวนทริทเมนต์เป็น 4 5 6 8 9 และ 10 จะสร้างยูเคียนสแควร์ได้เพียงแบบเดียว สำหรับตารางที่มี 7 ทริทเมนต์ จะสร้างตารางยูเคียนสแควร์ได้ถึง 3 แบบ โดยวิธีการต่างๆ ดังนี้

1. โดยการตัดคอลัมภ์สุดท้ายออก จะได้ยูเคียนสแควร์สำหรับ 7 ทริทเมนต์ในบล็อคนขนาด 6 ทริทเมนต์โดยมี  $n = b = 7, k = m = 6, \lambda = 5$
2. โดยการเลือกคอลัมภ์ที่ติดกันมาคู่หนึ่ง และอีกคอลัมภ์หนึ่งซึ่งอยู่ห่างไปอีก 1 ลำดับ เช่นสมมติเลือกคอลัมภ์ที่ 2 และ 3 คอลัมภ์ถัดไป 1 ลำดับคือ คอลัมภ์ที่ 5 จะได้แผนผังดังนี้

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

7x7 Latin Square

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 6 |
| 4 | 5 | 7 |
| 4 | 6 | 1 |
| 6 | 7 | 2 |
| 7 | 1 | 3 |
| 1 | 2 | 4 |

$$k = m = 3$$

$$n = b = 7$$

$$\lambda = 1$$

ส่วนที่เหลือ อีก 4 คอลัมภ์ จากแผนผังลาตินสแควร์จะกลายเป็นยูเค็นสแควร์แบบที่ 3 สำหรับ 7 ทริทเมนต์ คือ ยูเค็นสแควร์ที่มี  $k = m = 4$ ,  $n = b = 7$ ,  $\lambda = 1$

ลักษณะที่เกี่ยวข้องนี้จะจริงสำหรับยูเค็นสแควร์ที่มี  $n = b$  และ  $k = m$  ข้อสังเกตคือแม้ว่ายูเค็นสแควร์มาจากลาตินสแควร์ที่มีจำนวนคอลัมภ์หายไปตั้งแต่ 1 คอลัมภ์ขึ้นไปก็จริงแต่ในทางกลับกันลาตินสแควร์ ที่มีคอลัมภ์หายไปตั้งแต่ 1 คอลัมภ์ขึ้นไป อาจไม่มีลักษณะเป็นยูเค็นสแควร์เสมอไป โดยทั่วไปการวางแผนแบบยูเค็นสแควร์สมมติว่ามีทริทเมนต์  $n$  ทริทเมนต์ และแต่ละบล็อคมียุเค็นสแควร์ปรากฏ  $k$  โดยที่  $(k < n)$  ยูเค็นสแควร์จะถูกสร้างโดยมีบล็อคอ่อกเท่ากับ  $b = \frac{mn}{k}$  ภายในแต่ละบล็อคมียุเค็นสแควร์จำนวน  $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$  คู่ที่เปรียบเทียบกัน ผลรวมของการเปรียบเทียบคือ

$$\frac{k(k-1)}{2} \times \frac{mn}{k} = \frac{mn(k-1)}{2}$$

$\lambda$  คือจำนวนครั้งที่ทริทเมนต์แต่ละคู่เกิดพร้อมกันในบล็อคอ่อกเดียวกัน

เนื่องจากการเปรียบเทียบที่เป็นไปได้ทั้งหมด เท่ากับ  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  และ

ผลรวมจำนวนการเปรียบเทียบที่เป็นไปได้ทั้งหมด เท่ากับ  $\frac{\lambda n(n-1)}{2}$

ดังนั้นข้อจำกัดของแผนการทดลองนี้คือ

$$\frac{\lambda n(n-1)}{2} = \frac{mn(k-1)}{2} \quad \text{หรือ} \quad \lambda = \frac{m(k-1)}{(n-1)}$$

โดยที่  $\lambda$  ต้องเป็นจำนวนเต็ม

กำหนดให้  $R_i$  แทนผลรวมอันดับที่ของ ทรีทเมนต์ที่  $i$

ผลรวมอันดับที่ทั้งหมดของแต่ละทรีทเมนต์คือ  $\frac{k(k+1)}{2}$

และจำนวนผู้สังเกตคือ  $\frac{mn}{k}$

ผลรวมทั้งหมด  $\frac{mn(k+1)}{2}$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยผลรวมอันดับที่ต่อทรีทเมนต์คือ  $\frac{m(k+1)}{2}$

และผลบวกกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนคือ

$$S = \sum_{i=1}^n \left( R_i - \frac{m(k+1)}{2} \right)^2$$

$$S = \sum_{i=1}^n R_i^2 - \frac{nm^2(k+1)^2}{4}$$

ค่าที่มากที่สุดของ S เมื่อผลรวมอันดับที่ของพริทเมนส์คือ

$$m, m + \lambda, m + 2\lambda, \dots, m + (n-1)\lambda$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \text{MaxS} &= \sum_{i=1}^n \left[ m + (i-1)\lambda - \frac{m(k+1)}{2} \right]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[ m + (i-1)\lambda - \frac{m(k-1)}{2} - \frac{2m}{2} \right]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[ (i-1)\lambda - \frac{\lambda(n-1)}{2} \right]^2 \quad (m = \lambda, k = n) \\
 &= \lambda^2 \sum_{i=1}^n \left[ (i-1) - \frac{(n-1)}{2} \right]^2 \\
 &= \lambda^2 \sum_{i=1}^n \left[ i - 1 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right]^2 \\
 &= \lambda^2 \sum_{i=1}^n \left[ i - \frac{(n+1)}{2} \right]^2 \\
 &= \lambda^2 \left[ \sum i^2 - \frac{n(n+1)^2}{4} \right] \\
 &= \lambda^2 \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4} \right] \\
 &= \lambda^2 \left[ \frac{4n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1)^2}{24} \right] \\
 &= \lambda^2 \frac{2n}{24} [2(2n+1) - 3(n+1)] \\
 &= \frac{1}{12} \lambda^2 n(n^2 - 1)
 \end{aligned}$$

โดยทั่วไปจะวัดความสัมพันธ์ความสอดคล้องของอันดับได้โดยจากสมการ

$$\omega = \frac{12S}{\lambda^2 n(n^2 - 1)}$$

$$= \frac{12 \sum_{i=1}^n R_i - 3nm^2(k+1)^2}{\lambda^2 n(n^2 - 1)}$$

การทดสอบนัยสำคัญของ สัมประสิทธิ์ความสอดคล้อง ( $\omega$ )

ใช้สถิติ ไคสแควร์

$$\chi^2 = \frac{\lambda(n^2 - 1)}{(k+1)} \omega$$

ชั้นความเป็นอิสระ เท่ากับ  $n-1$

ในบางครั้งใช้สถิติ Fisher's z

$$z = \frac{1}{2} \log_e \frac{\left( \frac{\lambda(n+1)}{k+1} - 1 \right) \omega}{1 - \omega}$$

ชั้นความเป็นอิสระ เท่ากับ

$$v_1 = \frac{mn \left( 1 - \frac{k+1}{\lambda(n+1)} \right)}{\left[ \frac{nm}{n-1} - \frac{k}{k-1} \right]} - \frac{2(k+1)}{\lambda(n+1)}$$

$$v_2 = \left[ \frac{\lambda(n+1)}{k+1} - 1 \right] v_1$$

ตัวอย่างที่ 3.14 โรงงานไอศกรีมต้องการทดสอบรสชาติไอศกรีม 7 ชนิด คือ A, B, C, D, E, F และ G โดยมีผู้ชิมไอศกรีมจำนวน 7 คน และให้คะแนนอันดับที่ของรสชาติไอศกรีม เจ้าของโรงงานได้วางแผนการทดลองเป็นชุดเส้นสแควร์ซึ่งมี 3 แถว (แถวเป็นจำนวนซ้ำ) และผู้ชิมทั้ง 7 คน ให้คะแนนอันดับ ไอศกรีมดังนี้ 1 รสชาติดีมาก 2 รสชาติดีปานกลาง 3 รสชาติดีน้อยที่สุด

ตารางที่ 3.30 แสดงการให้อันดับคะแนนรสชาติไอศกรีม 7 ชนิด โดยผู้ชิม 7 คน

| บล็อก<br>แถว | ผู้ชิมไอศกรีม |     |     |     |     |     |     |
|--------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|              | 1             | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   |
| 1            | A=2           | B=2 | C=1 | D=1 | E=2 | F=2 | G=3 |
| 2            | B=1           | C=3 | D=2 | E=3 | F=3 | G=3 | A=1 |
| 3            | C=3           | D=1 | E=3 | F=2 | G=1 | A=1 | B=2 |

ในที่นี้

ทรีทเมนต์ (n) คือ ไอศกรีม 7 ชนิด คือ A, B, C, D, E, F และ G

บล็อก (b) คือ จำนวนผู้ให้อันดับไอศกรีมเท่ากับ 7

จำนวนซ้ำ (m) เท่ากับ 3

จำนวนทรีทเมนต์ในแต่ละบล็อก (k) เท่ากับ 3

$$\text{และ } \lambda = \frac{m(k-1)}{(n-1)}$$

$$\lambda = \frac{3(3-1)}{(7-1)} = 1$$



ตารางที่ 3.31 แสดงการจัดอันดับคะแนนรสชาติไอศกรีม 7 ชนิด โดยแผนผังการทดลอง  
ยูเคนสแควร์

| แถว | บล็อก(ไอศกรีม) |   |   |   |   |   |   |
|-----|----------------|---|---|---|---|---|---|
|     | A              | B | C | D | E | F | G |
| 1   | 2              | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 2   | 1              | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 3   | 1              | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| รวม | 4              | 5 | 7 | 4 | 8 | 7 | 7 |

ผลรวมทั้งหมดของอันดับที่คะแนนที่ผู้ชิมไอศกรีมให้  $4+5+7+4+8+7+7=42$  ถ้าผู้ชิม  
ไอศกรีมให้อันดับที่อย่างสุ่มแล้วผลรวมอันดับที่ของไอศกรีมแต่ละชนิดจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ค่า  
เฉลี่ยของผลรวมทั้งหมดของอันดับที่นั่นคือ  $\frac{42}{7} = 6$

ในทางกลับกันถ้าให้อันดับแบบกำหนด เช่น ไอศกรีมรสชาติที่ดีที่สุดจะให้อันดับเป็น 1 ทั้ง 3 ซ้ำ  
หรืออาจจะให้อันดับแบบอื่นอีกก็ได้ซึ่งผลรวมของอันดับจะมีค่าตั้งแต่ 3, 4, 5, ..., 9

โดยปกติจะให้ S แทน ผลบวกกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนของทรีทเมนต์

จากตาราง ค่าเฉลี่ย เท่ากับ 6 จะได้ว่า

$$S = (4-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + \dots + (7-6)^2 = 16$$

จะสร้างสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องของอันดับที่ได้โดย

$$\omega = \frac{S}{\text{MaxS}}$$

MaxS คือ ค่าที่เป็นไปได้มากที่สุด ในที่นี้เท่ากับ 28 เพราะว่าถ้าผู้ให้อันดับ ให้อันดับคะแนน  
อย่างสุ่ม จะได้ว่าผลบวกอันดับที่เป็นไปได้จะมีค่าดังนี้

| ผู้ให้อันดับ | A | B | C | D | E | F | G |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|
| ผลรวมอันดับ  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

$$\text{MaxS} = (3-6)^2 + (4-6)^2 + \dots + (9-6)^2 = 28$$

$$\text{จาก } \omega = \frac{S}{\text{MaxS}} = \frac{12S}{\lambda^2 n(n^2-1)}$$

$$\omega = \frac{16}{28} = 0.571$$

ทดสอบนัยสำคัญ สัมประสิทธิ์ความสอดคล้องเคนดอลล์

$$\chi^2 = \frac{\lambda(n^2-1)}{(k+1)} \omega$$

$$\chi^2 = \frac{1(7^2-1)}{(3+1)} (0.571)$$

$$= 6.852$$

ชั้นความเป็นอิสระ เท่ากับ  $n-1$

ค่าวิกฤติของ  $\chi^2$  โดยการเปิดตาราง ที่ C ในภาคผนวก

ที่  $\alpha = 0.05$  และ  $df = n-1 = 7-1 = 6$

เมื่อ  $m = 3$   $n = 7$

พบว่าค่าวิกฤติของ  $\chi^2$  จากตาราง = 12.59 และ

$\chi^2$  ที่คำนวณได้ = 6.852

จะเห็นว่า  $\chi^2$  ที่คำนวณได้ มีค่าน้อยกว่า  $\chi^2$  จากตาราง สรุปได้ว่า ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าการให้อันดับคะแนนรสชาติไอศกรีมของผู้ชิมทั้ง 7 คน ไม่สอดคล้องกัน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05