

บทที่ 2

ทฤษฎีและการแจกแจงที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยทั่วไป ตามปกติผู้วิจัยจะไม่สามารถศึกษาประชากรทั้งหมดได้ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะต้องเสียค่าใช้จ่ายสูง สิ้นเปลืองเวลา แรงงาน และมีความยุ่งยากในการรวบรวมข้อมูล จึงได้เลือกกลุ่มประชากรมาเป็นกลุ่มตัวอย่าง เพื่อใช้เป็นตัวแทนของประชากรซึ่งกลุ่มตัวอย่างจะเป็นตัวแทนที่ดีของประชากรหรือไม่ขึ้นอยู่กับเทคนิคการสุ่ม ผลที่ได้จากการศึกษากลุ่มตัวอย่างสามารถอ้างอิงไปยังพารามิเตอร์ได้ แต่การอ้างอิงนั้นจะกล่าวอย่างเลื่อนลอยมิได้ จำต้องทำการทดสอบสมมติฐาน ที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์ก่อน โดยใช้สถิติพารามेटริกทำการทดสอบซึ่งมีข้อตกลงเกี่ยวกับลักษณะของประชากร ดังนี้

1. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ศึกษานั้นจะต้องเลือกมาอย่างสุ่มจากกลุ่มประชากรเดิม
2. กลุ่มประชากรที่ศึกษาทั้งหลายเหล่านั้นมีค่าความแปรปรวนเท่ากัน
3. กลุ่มประชากรแต่ละกลุ่มที่เลือกมาศึกษานั้นต้องมีการแจกแจงปกติ

จะเห็นได้ว่าการทดสอบพารามेटริก ย่อมทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการวิเคราะห์และแปลผลได้ หากข้อมูลนั้นไม่เป็นไปตามข้อตกลงที่กำหนดไว้ เพื่อแก้ปัญหาจึงมีการใช้การทดสอบแบบนอนพารามेटริก ซึ่งใช้สถิติที่มีข้อตกลงเบื้องต้นน้อยกว่า แต่ใช้ได้กว้างไกลกว่าแบบพารามेटริก เช่น ข้อมูลไม่จำเป็นต้องมีการแจกแจงปกติ และ การทดสอบก็ใช้ข้อมูลในกลุ่มตัวอย่าง อย่างง่าย ๆ เป็นต้นว่า ความถี่ หรือ จำนวนหรือโดยการนับเครื่องหมาย และสามารถใช้ได้กับข้อมูลที่อยู่ในมาตรวัดตั้งแต่ มาตรนามบัญญัติ

แม้ว่าสถิตินอนพารามेटริกนี้จะใช้ได้ง่ายกว่าสถิติพารามेटริกก็ตาม แต่ความสามารถในการวิเคราะห์ และ แปลผลจะถูกจำกัด ด้วยเหตุนี้จึงควรเลือกใช้สถิติในการทดสอบให้เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลเพื่อการวิเคราะห์ และ แปลผลมีโอกาสถูกต้องมากที่สุด ในกรณีนี้จะมีการวัดความสัมพันธ์ของข้อมูลโดยใช้สถิติที่วัดความสัมพันธ์ เช่น สหสัมพันธ์ฟี (Phi) และ สหสัมพันธ์แครมเมอร์ วี (Crammer' s V), สหสัมพันธ์อันดับที่สเปียร์แมน(The Spearman Rank Correlation), สหสัมพันธ์อันดับที่เคนดอลล์ (The Kendall Rank Correlation), สหสัมพันธ์อันดับที่ส่วนย่อยเคนดอลล์ (The Kendall Partial Rank Correlation) และ สหสัมพันธ์ความสอดคล้องเคนดอลล์ (The Kendall of Concordance) ซึ่งค่าวัดความสัมพันธ์ จะต้องใช้กับข้อมูลที่เหมาะสมโดยแต่ละค่าวัดจะใช้กับข้อมูลที่มีมาตรวัดแตกต่างกัน , ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวัดความ

สัมพันธ์ และพิสูจน์สูตรความสัมพันธ์ การแจกแจงที่เป็นพื้นฐานการทดสอบสถิติอนพารามตริก เช่น การแจกแจงปกติ การแจกแจงปกติมาตรฐาน การแจกแจงไคสแควร์ และการแจกแจงแบบ ที่

2.1 มาตรการวัด

ในการใช้สถิติเพื่อวิเคราะห์ข้อมูลในการวิจัยนั้น จำเป็นจะต้องทราบลักษณะของข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยเสียก่อน เพื่อเป็นเครื่องวินิจฉัยว่าจะใช้วิธีการทางสถิติแบบใดในการวิเคราะห์จึงจะถูกต้องเหมาะสม ฉะนั้นควรจะทราบถึง “มาตราของการวัด” เสียก่อน มาตรการวัดแบ่งออกได้เป็น 4 มาตรา คือ

2.1.1 มาตรการนามบัญญัติ (Nominal Scales) การวัดในระดับนี้เป็นเพียงการเรียกชื่อ (Naming) หรือจำแนกชนิดของต่าง ๆ เรื่องราวต่าง ๆ เหตุการณ์ต่าง ๆ ฯลฯ เท่านั้นเอง ดังนั้นการวัดในระดับนี้บางทีจึงไม่เป็นที่ยอมรับว่าเป็น “การวัด” (Measurement) เพราะไม่สามารถบอกปริมาณมากน้อยได้ เป็นแต่เพียงแสดงให้เห็นความแตกต่างของสิ่งต่าง ๆ เท่านั้น

ตัวอย่างการวัดในระดับนี้ เช่น การจำแนกคนเป็น เพศชาย-หญิง เป็นนิสิต นักศึกษา พ่อค้า ประชาชน เป็นคนดี-คนชั่ว เป็นคนที่นับถือศาสนาพุทธ คริสต์ อิสลาม เป็นต้น การจำแนกเหล่านี้เป็นลักษณะหรือคุณสมบัติประจำตัวของแต่ละคน ในการวิจัยมักใช้ลักษณะเหล่านี้เป็นตัวแปรต้นหรือตัวแปรอิสระ (Independent) ตัวอย่างเช่น ความสูงแปรตามเพศหรือขึ้นอยู่กับเพศ ในที่นี้เพศเป็นตัวแปรอิสระ

นอกจากนี้มาตรการวัดนี้ ยังกำหนดตัวเลขขึ้นเพื่อจำแนกสิ่งต่าง ๆ เรื่องราวต่าง ๆ เหตุการณ์ต่าง ๆ ลักษณะต่าง ๆ ฯลฯ ออกเป็นหมู่พวก ประเภท เพื่อให้จำได้ง่ายหรือสะดวกในการนับ ตัวอย่างเช่น ตัวเลขที่ระบุสายรถยนต์ เลขประจำตัวนิสิต เลขที่บ้าน หมายเลขโทรศัพท์ เบอร์นักฟุตบอล ตัวเลขประจำนักเก้าอี้ในหอประชุม ฯลฯ

ตัวเลขเหล่านี้ไม่มีความหมายเชิงปริมาณ คือไม่สามารถแสดงให้เห็นปริมาณมากน้อยหรือสูงต่ำ แต่อย่างไรก็ตามแต่เพียงบอกให้รู้ว่าสิ่งเหล่านั้นไม่ใช่สิ่งเดียวกันเท่านั้น ดังนั้นจึงไม่สามารถนำตัวเลขเหล่านั้นมาบวก ลบ คูณ หรือหารกันได้เลย นอกจากกระทำได้แต่เพียงการนับจำนวน (หรือหาความถี่) ของลักษณะที่มีเหมือนกันเท่านั้น

2.1.2 มาตรการเรียงอันดับ (Ordinal Scales) มาตรการเรียงอันดับนี้เป็นมาตรการวัดที่ตัวเลขคะแนนจะบอกถึงอันดับที่ (Order) หรือตำแหน่ง (Rank) ที่ลดหลั่นกันเป็นลำดับ คือตัวเลขคะแนนจะบอกความหมายในลักษณะมาก-น้อย สูง-ต่ำ เหนือ-ด้อย ดี-เลว เก่ง-อ่อน กว่ากัน เป็นต้น ตัวอย่างการวัดในมาตรานี้ เช่น นักเรียนที่สอบได้ที่ 1, 2, 3, ... ตามลำดับ นางงานอันดับ

1, 2, 3, ... ระดับการศึกษาชั้นประถม 1, 2, 3, ... เป็นต้น จะเห็นว่าคะแนนในมาตราการวัดระดับนี้นอกจากจะเป็นการจำแนกข้อมูลว่าต่างกันแล้ว ยังบอกได้อีกว่าที่ต่างกันนั้น ต่างไปทางไหน คือบอกทิศทางในขั้นกว่าได้ แต่ไม่สามารถบอกระยะห่างระหว่างของสองสิ่งหรือหลาย ๆ สิ่งได้ คือแต่ละช่วงของอันดับหรือตำแหน่งจะไม่เท่ากัน ดังนั้นข้อมูลที่ปรากฏออกมาเป็นตัวเลขในระดับนี้ไม่สามารถนำมาบวก ลบ คูณ หรือหารกันได้ เช่น จะบอกว่่านักเรียนที่สอบได้ที่ 1 เก่งกว่านักเรียนที่สอบได้ที่ 2 เท่ากับนักเรียนที่สอบได้ที่ 3 เก่งกว่านักเรียนที่สอบได้ที่ 4 ไม่ได้ หรือจะบอกว่่านางงามอันดับ 1 สวยเป็น 2 เท่าของนางงามอันดับ 2 ก็ไม่ได้เช่นกัน คะแนนที่ได้จากการใช้ข้อสอบไปสอบวัดนักเรียนเพื่อทราบผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนในแต่ละวิชานั้นจะอยู่ในมาตราการวัดชนิดนี้

2.1.3 มาตราอันตรภาค (Interval Scales) คะแนนที่อยู่ในมาตราชนิดนี้มีลักษณะเหมือนมาตราเรียงอันดับทุกอย่าง แต่มีคุณสมบัติที่ดีกว่าตรงที่แต่ละหน่วยของการวัดจะมีระยะห่างเท่า ๆ กัน จึงสามารถเปรียบเทียบกันได้ว่ามากน้อยกว่ากันเท่าใด แต่ไม่สามารถบอกว่าเป็นกี่เท่าของกันและกัน เพราะมาตราชนิดนี้ไม่มีศูนย์แท้หรือศูนย์สัมบูรณ์ (True Zero or Absolute Zero) ตัวอย่างเช่น มาตราการวัดอุณหภูมิแบบเซลเซียส แบ่งเป็น 100 องศาเซลเซียส แต่ละเซลเซียสมีช่วงเท่า ๆ กัน แต่อุณหภูมิ 0°C ไม่ใช่ศูนย์แท้ คือมิได้หมายความว่าไม่มีความร้อนอยู่เลย ความจริง ณ อุณหภูมินี้เป็นอุณหภูมิที่น้ำจะกลายเป็นน้ำแข็ง แต่ยังมีความร้อนอยู่ จุดที่ไม่มีความร้อนอยู่เลยคือที่อุณหภูมิ -273°C ดังนั้น 0°C จึงเป็นศูนย์เทียม (Arbitrary Zero or Relative Zero)

โดยเหตุที่การวัดในมาตรานี้ไม่มีศูนย์แท้ การเปรียบเทียบในทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการคูณและการหารจึงยังใช้ไม่ได้ จะใช้ได้เฉพาะการบวกและการลบเท่านั้น เช่น ไม่สามารถบอกว่ ณ อุณหภูมิ 30°C ร้อนเป็น 2 เท่ากับ 15°C เพราะ ณ อุณหภูมิ 30°C ก็คือจุดที่มีความร้อน $273+30=303$ ช่วงเท่า ๆ กัน ส่วน ณ อุณหภูมิ 15°C ก็คือจุดที่มีความร้อน $273+15=288$ ช่วงเท่า ๆ กัน ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนว่า 303 มิได้เป็นสองเท่าของ 288 เป็นต้น

การวัดทางการศึกษาหรือจิตวิทยา หรือการวัดทางพฤติกรรมศาสตร์ บางทีก็จัดอยู่ในมาตรานี้ เพราะผู้ที่สอบได้ศูนย์คะแนนไม่ได้หมายความว่า ไม่มีความรู้ในวิชานั้น เป็นแต่เพียงว่าเขาผู้นั้นทำข้อสอบฉบับนั้นไม่ได้เลย แต่ความรู้ความสามารถที่ผู้สอบรู้ แต่ครูไม่ได้วัดก็ยังมีอยู่ คะแนนมาตรฐาน (Standard Score) ไม่ว่าจะอยู่ในรูปใดถือว่าเป็นคะแนนประเภทนี้ เพราะว่ามีช่วงคะแนนเท่ากัน สามารถบวกลบกันได้แต่เอาไปคูณหรือหารไม่ได้เนื่องจากไม่มีศูนย์แท้ เช่นเดียวกับอุณหภูมินั่นเอง

2.1.4 มาตราอัตราส่วน (Ratio Scales) เป็นมาตราการวัดที่สมบูรณ์ที่สุด เพราะมีช่วงคะแนนที่เท่า ๆ กัน มีศูนย์แท้ (Absolute Zero or True Zero) คือตัวเลข 0 หมายถึงไม่มีอะไรอยู่เลย เช่น แก้วสูง 0 เซนติเมตร แปลว่าไม่มีความสูงเลย การวัดในมาตรานี้เป็นการวัดทางฟิสิกส์ เช่น ความสูง ความยาว น้ำหนัก ปริมาตร อายุ เวลา เป็นต้น ตัวเลขในมาตรานี้นำมาบวก ลบ คูณ หาร ออครากหรือยกกำลังต่าง ๆ ได้ทั้งสิ้น

สรุปว่าตัวเลขคะแนนต่าง ๆ จะมีความหมายมากน้อยเพียงใด ขึ้นอยู่กับตัวเลขคะแนนนั้นมีคุณสมบัติอยู่ในมาตราการวัดใด การเลือกใช้สถิติก็ต้องพิจารณาว่ามีความเหมาะสมถูกต้องปานใดด้วย

2.2 การแจกแจงทางสถิติ

ในสถิติอนุมาน (Inferential Statistics) มักศึกษากับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก ๆ แต่ผลที่ได้สามารถนำไปใช้อ้างอิงหรือสรุปผลไปถึงกลุ่มใหญ่ทั้งหมดที่เรียกว่า ประชากร (Population) ได้ แต่การสรุปหรือการอ้างอิงนั้น จะมีความเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับลักษณะ หรือวิธีการเลือกกลุ่มตัวอย่างว่าสามารถเป็นตัวแทนของประชากรได้มากน้อยเพียงใด การใช้สถิติอนุมานจำเป็นจะต้องมีการทดสอบทางสถิติ ซึ่งการใช้สถิติทดสอบนั้นมักมีข้อตกลงต่าง ๆ ที่เป็นกฎตายตัว การที่จะใช้สถิติดังกล่าวจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องเข้าใจในทฤษฎีการแจกแจงทางสถิติ (Statistical Distribution) ก่อน ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงการแจกแจงแบบต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องทราบเป็นพื้นฐานการทดสอบอนพารามตริกเท่านั้น เช่น

1. การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)
2. การแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution)
3. การแจกแจงไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)
4. การแจกแจงสตัเด้นท์ที (Student 's t Distribution)

2.2.1 การแจกแจงปกติ

การแจกแจงปกติได้รับการค้นพบโดย De Moivre (1697-1754) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ต่อมา Laplace (1749-1827) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษได้ประยุกต์ใช้ในทางด้านสังคมศาสตร์และวิทยาศาสตร์อย่างแพร่หลาย และ Gauss (1777-1855) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันได้ขยายต่อ โดยนำทฤษฎีนี้ไปศึกษาหาความคลาดเคลื่อน (Error) โดยการวัดซ้ำ ๆ ใน

กลุ่มที่มีขนาดคงเดิม และพบว่าการแจกแจงที่ได้จะมีลักษณะเป็นโค้งปกติ ดังนั้นการแจกแจงปกติจึงเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Gaussian Distribution จะมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} ; -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

เมื่อ σ แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร
 μ แทนคะแนนเฉลี่ยของประชากร
 x เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมีพารามิเตอร์ คือ μ และ σ

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติจะมีคุณสมบัติดังนี้

1. พื้นที่ทั้งหมดภายใต้โค้งปกติเท่ากับ 1
2. โค้งการแจกแจงสมมาตรที่ $X = \mu$
3. โค้งการแจกแจงมีลักษณะเป็นรูประฆังคว่ำ และมีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $X = \mu \pm \sigma$
4. ปลาที่ยทั้งสองข้างของเส้นโค้งจะค่อย ๆ ลดต่ำลง แต่ไม่จรดกับฐานของโค้งหรือแกนนอน

ทฤษฎีที่สำคัญเกี่ยวกับการแจกแจงปกติ

ทฤษฎีบทที่ 2.1

ถ้า X มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น μ และความแปรปรวนเป็น σ^2 และถ้า $Y = aX + b$ แล้ว Y จะมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น $a\mu + b$ และความแปรปรวนเป็น $a^2\sigma^2$

บทแทรก

ถ้า $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ และถ้า $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ แล้ว $Z \sim N(0,1)$

ทฤษฎีบทที่ 2.2

ถ้า $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน มีการแจกแจง ปกติ $N(\mu_i, \sigma_i^2)$,
 $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ให้ $Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ แล้ว Z จะมีการแจกแจงปกติ
 $N(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$

2.2.2 การแจกแจงปกติมาตรฐาน

นิยาม ตัวแปรสุ่ม Z ที่มีการแจกแจงปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 1$ เรียก
 Z มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}; -\infty < z < \infty \quad (2.2)$$

จากทฤษฎีบทที่ 2.1 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจง $N(\mu, \sigma^2)$ และถ้ากำหนดให้

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (2.3)$$

แล้ว Z จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน นั่นคือ $Z \sim N(0, 1)$ เมื่อ Z แทนคะแนนมาตรฐาน

การใช้คะแนนมาตรฐาน (Z) ในสถิติอนุมานเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และทดสอบ
 สมมติฐานเกี่ยวกับ μ มีข้อตกลงเบื้องต้นดังนี้

- 1 ลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นโค้งปกติ
- 2 กลุ่มตัวอย่างได้รับการสุ่มมาอย่างอิสระ
- 3 ทราบค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร
- 4 ข้อมูลจัดอยู่ในมาตราอันตรภาค (Interval Scale)

ถ้ามีข้อมูลหลาย ๆ ชุด และแต่ละชุดมีจำนวนข้อมูลมาก เมื่อคำนวณหาค่าเฉลี่ยและค่า
 ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน ก็จะมีค่าแตกต่างกัน แต่ถ้าลักษณะการแจกแจงของข้อมูลแต่ละชุดเหล่านี้นั้นมีการแจกแจงเป็นแบบปกติแล้ว สามารถทำให้การแจกแจงของข้อมูลเหล่านั้นมีค่าเฉลี่ยเป็น 0

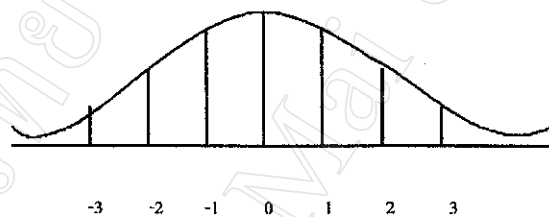
และค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 ได้ โดยเปลี่ยนข้อมูลแต่ละตัว (X) ของแต่ละชุดให้เป็นหน่วยการวัดใหม่คือ Z ซึ่งหาได้จากสมการ (2.3)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

เมื่อ μ แทนค่าเฉลี่ยของข้อมูลแต่ละชุด

σ แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลแต่ละชุด

ดังนั้นการแจกแจงของข้อมูลแต่ละชุดจะเป็นการแจกแจงของข้อมูลชุดเดียวกัน คือการแจกแจงปกติมาตรฐาน ซึ่งการแจกแจงแบบนี้จะเป็นการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 และลักษณะของโค้งการแจกแจงจะเป็นดังรูปข้างล่างนี้



รูปที่ 2.1 แสดงพื้นที่ภายใต้โค้งปกติระหว่าง Z ต่าง ๆ ที่เปิดได้จากตาราง

2.2.3 การแจกแจงแบบ t

การแจกแจงแบบ t ถูกค้นพบโดย W.S. Gosset (1908) ซึ่งใช้นามแฝงว่า Student ดังนั้นการแจกแจงแบบนี้จึงมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Student's t -Distribution

นิยาม การแจกแจงแบบ t จะเกี่ยวข้องกับ การแจกแจงปกติ และ โคสแควร์ นั่นคือ ถ้า

$Z \sim N(0,1)$ และ $Y \sim \chi^2_{(v)}$ จะได้

$$t_v = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{v}}} \quad (2.4)$$

เมื่อ v เป็น จำนวนความเป็นอิสระ

คุณสมบัติของการแจกแจงแบบที่มีดังนี้

1. โค้งมีลักษณะสมมาตร
2. ค่าเฉลี่ยมัธยฐานและฐานนิยมของ t อยู่จุดเดียวกัน และเป็น 0
3. ความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{v}{v-2}$ (เมื่อ v เป็น จำนวนเป็นอิสระ)
 ดังนั้นความเบี่ยงเบนมาตรฐาน $(\sqrt{\frac{v}{v-2}})$ จึงมีค่ามากกว่า 1 เล็กน้อย แต่ถ้า v มีค่ามากขึ้น ความแปรปรวนก็จะเท่ากับ 1
4. ถ้า v มีค่ามาก ๆ การกระจายจะมีลักษณะใกล้เคียงหรือเป็นโค้งปกติ

การใช้สถิติ ที่ ในสถิติอนุมานต้องคำนึงถึงข้อตกลงเบื้องต้นดังนี้

1. ลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็น โค้งปกติ
2. กลุ่มตัวอย่างได้มาโดยการสุ่มอย่างอิสระ
3. ข้อมูลจัดอยู่ในมาตราอันตรภาค
4. ให้ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลกลุ่มตัวอย่าง ประมาณค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร นั่นคือไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรนั่นเอง

2.2.4 การแจกแจงไคสแควร์

การแจกแจงไคสแควร์ (χ^2 Distribution) ผู้ค้นพบเป็นคนแรกคือ F.R. Helmert (1843-1917) นักฟิสิกส์ชาวเยอรมันในปี ค.ศ. 1876 ต่อมา Karl Pearson (1857-1936) นักสถิติชาวอังกฤษ ได้พัฒนาและใช้อย่างแพร่หลายในปี ค.ศ. 1900

นิยาม การแจกแจงไคสแควร์

ให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแกมมาซึ่งมีพารามิเตอร์ $\alpha > 0$, $\beta > 0$
 ถ้า X = การแจกแจงของเวลาซึ่งต้องคอยจนกว่าจะเกิดเหตุการณ์ n เหตุการณ์ เขียนได้เป็น $X \sim \text{Gam}(\alpha, \beta)$ โดยที่ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} ; x > 0 \quad (2.5)$$

และถ้า $X \sim \text{Gam}(\alpha = \frac{n}{2}, \beta = 2)$ จะแจกแจงไคสแควร์ ซึ่งมีขั้นความเป็นอิสระ (Degree of Freedom. : $df = v = n$) เขียนแทนด้วย χ^2_v นั่นคือ X เป็นกรณีพิเศษของการแจกแจงแกมมา ซึ่งได้จากการกำหนด $\alpha = \frac{n}{2}, \beta = 2$ ในฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแกมมา โดยฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X จะอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}; \quad x > 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad E(X) &= v = n \\ V(X) &= 2v = 2n \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.3

ถ้า Z มีการแจกแจงปกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 จะได้ว่า Z^2 จะมีการแจกแจงไคสแควร์ที่มีขั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1
 $Z \sim N(0, 1)$ จะได้ว่า $Z^2 \sim \chi^2_{(1)}$, $df = v = 1$

ทฤษฎีบทที่ 2.4

ถ้า $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่ม n ตัวที่อิสระต่อกัน มีการแจกแจงไคสแควร์มีขั้นความเป็นอิสระ $v_1, v_2, \dots, v_n$, ตามลำดับ และ $Y = \sum X_i$; จะได้ว่า Y มีการแจกแจงไคสแควร์มีขั้นความเป็นอิสระเท่ากับ v โดยที่

$$df = v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

บทแทรก

ถ้า $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มอิสระ n ตัวจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ $N(\mu, \sigma^2)$ จะได้ว่า

$$U = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_n \quad (2.7)$$

ขั้นความเป็นอิสระ (df) = $v = n$

ทฤษฎีบทที่ 2.5 การแจกแจงไคสแควร์อธิบายลักษณะความแปรปรวนของตัวอย่าง

ถ้า $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ เป็นความแปรปรวนของตัวอย่างกลุ่มขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ $N(\mu, \sigma^2)$ จะได้ว่าตัวแปรสุ่ม $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ จะมีการแจกแจงไคสแควร์มีขั้นตอนความเป็นอิสระ (df) = $n-1$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} 1. \text{ จาก } S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2 \\ (n-1)S^2 &= \sum (X_i - \bar{X})^2 \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum (X_i - \bar{X})^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$2. X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Z = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_1^2$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi_n^2 \quad (2.9)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง (2.8) กับ (2.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)]^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) + n(\bar{X} - \mu)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \frac{1}{\sigma^2} n(\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\bar{X}$ เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

จาก (2.8)

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad (2.10)$$

สมมุติว่ามีข้อมูลของประชากรซึ่งมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 ถ้าเลือกข้อมูลจากประชากรนั้นมา 1 ค่า (X) โดยวิธีสุ่มจากคะแนนทั้งหมด แล้วแปลงคะแนนที่สุ่มมาให้เป็นคะแนนมาตรฐาน (Z) โดยใช้สูตร $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ แล้วยกกำลังสอง ค่า Z ที่ได้ จะได้ดังนี้

$$Z^2 = \chi_1^2$$

หากเลือกคะแนน X โดยวิธีสุ่มซ้ำหลายครั้ง แล้วแปลงให้เป็น Z และยกกำลังสองจะทำให้ได้ χ_1^2 เมื่อนำเอา χ_1^2 เหล่านั้นมาเขียนกราฟการแจกแจงความถี่ของ χ_1^2 และทำให้เรียบโดยปรับพื้นที่ภายใต้โค้งทั้งหมดให้เป็น 1 ก็จะได้การแจกแจงโคสแควร์ที่มี ชั้นความเป็นอิสระ เป็น 1

ดังนั้นสามารถหาค่า χ_2^2 (หมายถึง χ^2 ที่มี ชั้นความเป็นอิสระ เป็น 2) ได้โดยการเลือกคะแนน (X) มาทีละ 2 ค่า เช่น X_1, X_2 แล้วนำมาหาค่าคะแนนมาตรฐาน (Z) จะได้ Z_1 และ Z_2 เมื่อยกกำลังสองค่า Z แล้วนำมาบวกกัน ผลบวกที่ได้คือค่าของ χ_2^2 ดังนี้

$$\begin{aligned}\chi^2_2 &= \frac{(X_1 + \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(X_2 - \mu)^2}{\sigma^2} \\ &= Z_1^2 + Z_2^2\end{aligned}$$

จะเห็นว่าเมื่อหาค่า χ^2_2 จากการเลือกคะแนนทีละ 2 ตัวหลาย ๆ ครั้ง ก็จะได้ χ^2_2 หลายค่า เมื่อนำมาแจกแจงก็จะได้การแจกแจงไคสแควร์ที่มี ชั้นความเป็นอิสระ เป็น 2

ในทำนองเดียวกันถ้าสุ่ม X มา n ค่า คือ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ สามารถทำการแจกแจงไคสแควร์ที่มี ชั้นความเป็นอิสระ ($v=n$) ได้ดังนี้

$$\chi^2_{(v=n)} = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \dots + Z_n^2$$

เมื่อ v คือจำนวนเลขใด ๆ ก็ได้ และเนื่องจาก v มีค่าต่างกันไปได้ ทำให้การแจกแจงไคสแควร์ มีลักษณะแตกต่างกันไปด้วย ตามจำนวนเลขที่เป็นค่าของ v

คุณสมบัติของการแจกแจงไคสแควร์

ถ้าให้ $v=n$ จะได้คุณสมบัติของการแจกแจงไคสแควร์ดังนี้

- 1 ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงไคสแควร์ จะเท่ากับ ชั้นความเป็นอิสระ ดังนั้นค่าเฉลี่ยของ $\chi^2_n = n$
- 2 ค่านิยามของ $\chi^2_n = n-2$ เมื่อ n มีค่า ≥ 2
- 3 ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\chi^2_n = \sqrt{2n}$ หรือความแปรปรวนเป็น $2n$
- 4 ค่าความเบ้ (Skewness) ของ χ^2_n เป็น $\sqrt{8/n}$ จึงทำให้ลักษณะการแจกแจงไคสแควร์ โดยทั่ว ๆ ไปมักจะมีลักษณะเบ้บวก (Positively Skewed)
- 5 ค่าสถิติไคสแควร์ จะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $+\infty$ คือเป็นค่าบวกหมด ทั้งนี้เนื่องจากสถิติไคสแควร์ คือค่า Z^2 นั่นเอง
- 6 ถ้า n มีขนาดใหญ่แล้ว การแจกแจงไคสแควร์ จะมีลักษณะเข้าสู่การแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น n และความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $\sqrt{8/n}$
- 7 $\chi^2_{n1} + \chi^2_{n2}$ จะมีการแจกแจงเช่นเดียวกับ χ^2_{n1+n2} เมื่อ v_1, v_2 เป็น ชั้นความเป็นอิสระ เช่น $\chi^2_5 + \chi^2_{12} = \chi^2_{17}$

การใช้สถิติไคสแควร์ ในสถิติอนพารามตริกไม่ได้มีข้อกำหนดเกี่ยวกับลักษณะการแจกแจงของประชากรคือ ประชากรจะมีการแจกแจงเป็นแบบใดก็ได้ แต่โดยทั่วไปแล้วลักษณะการแจกแจงของไคสแควร์ ขึ้นอยู่กับค่า n ถ้า n มากขึ้น การแจกแจงจะเข้าใกล้โค้งปกติมากขึ้น

2.3 สถิติไคสแควร์ เพื่อการทดสอบของสถิติแบบนอนพารามетริก

การใช้สถิติไคสแควร์ เพื่อการทดสอบแบบนอนพารามетริกนั้น จะไม่สนใจในเรื่องของข้อตกลงเบื้องต้นตามประการได้กล่าวไว้ในข้างต้น นั่นคือ ถ้าในการศึกษาวิจัยพบว่ากลุ่มตัวอย่างที่ใช้ศึกษาไม่แน่ใจว่าได้เลือกมาอย่างสุ่ม หรือพบว่าข้อมูลมีลักษณะการแจกแจงที่ไม่เป็น โค้งปกติ หรือระดับการวัดข้อมูลเป็นเพียงระดับนามบัญญัติ ก็จะหันมาใช้ สถิติไคสแควร์ แบบนอนพารามетริก ในเรื่องของการแจกแจงของข้อมูล ข้อมูลอาจมีรูปร่างเป็นแบบใดก็ได้ ทั้งนี้เนื่องมาจากว่าสถิติไคสแควร์ มีการแจกแจงเป็น โค้งปกติเมื่อ $df > 30$ เมื่อ $1 < df < 30$ การแจกแจงของ สถิติไคสแควร์ มีลักษณะเบ้ไปทางบวก

การใช้สถิติไคสแควร์ เพื่อการทดสอบสมมติฐานการวิจัย ใช้ได้กับข้อมูลที่มีระดับการวัดทั้งสี่ระดับ ได้แก่ มาตรฐานนามบัญญัติ มาตรฐานเรียงลำดับ มาตรฐานอันดับ และมาตรฐานอัตราส่วน

สมมติฐานการวิจัยที่จะใช้สถิติไคสแควร์ แบบนอนพารามетริกทดสอบนั้นเป็นสมมติฐานที่ต้องการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างคุณลักษณะที่มาจากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มหรือมากกว่าก็ได้ สมมติฐานที่กล่าวถึงเรื่องของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสองตัวแปรที่ใช้สถิติไคสแควร์ทดสอบได้ คาร์ล เพียร์สัน (Karl Pearson, 1857-1936) เป็นผู้ที่ค้นพบการหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสองตัวแปรที่เรียกว่า การหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบโปรดักโมเมนต์ (Pearson Product – Moment Correlation Coefficient) ได้อธิบายวิธีการทดสอบสถิติไคสแควร์ ไว้ในปี ค.ศ. 1900 เป็นการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบความถี่ที่ได้จากวัดผลกับความถี่จากทฤษฎีทางสถิติ

2.3.1 การทดสอบ ความเป็นอิสระกันระหว่างลักษณะ สองลักษณะ

การทดสอบคุณลักษณะเพื่อเปรียบเทียบความแตกต่าง ระหว่างกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน เมื่อระดับการวัดของข้อมูลจัดเป็นประเภทนามบัญญัติ การใช้สถิติไคสแควร์ทดสอบจะมีความเหมาะสมมาก การทดสอบความแตกต่างตามลักษณะที่กล่าวมานี้ ก็คือ การทดสอบสมมติฐานที่กล่าวว่า “กลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มนี้มีความแตกต่างกันตามลักษณะของคุณลักษณะทางจิตวิทยาที่ต้องศึกษาหรือไม่” การทดสอบจึงขึ้นอยู่กับกับจำนวนความถี่ในแต่ละช่อง (Cell) ของตารางแจกแจงความถี่ ตัวอย่าง เช่น อาจทดสอบความเห็นของกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นผู้บริหารและกลุ่มนักวิชาการว่ามีความคิดเห็นแตกต่างกันหรือไม่

ตารางที่ 2.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสองชนิด

คุณ ลักษณะ X	คุณลักษณะ Y				รวม
	Y_1	Y_2	...	Y_c	
X_1	O_{11}	O_{12}	...	O_{1c}	R_1
X_2	O_{21}	O_{22}	...	O_{2c}	R_2
...	...	...	...	...	...
X_r	O_{r1}	O_{r2}	...	O_{rc}	R_r
รวม	C_1	C_2	...	C_c	N

วิธีการทดสอบสมมติฐาน โดยใช้วิธีทางสถิติแบบ สถิติไคสแควร์

1. สมมติฐาน

H_0 : ลักษณะทั้งสองลักษณะเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : ลักษณะทั้งสองลักษณะไม่เป็นอิสระต่อกัน

2. สถิติที่ใช้ทดสอบใช้

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad (2.11)$$

เมื่อ O_{ij} คือจำนวนความถี่จากข้อมูลในตารางแจกแจงความถี่ในแถวตอนที่ i และสคัมภ์ที่ j

E_{ij} คือจำนวนความถี่ในเชิงทฤษฎีจากตารางแจกแจงความถี่ในแถวตอนที่ i และสคัมภ์ที่ j

$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c$ คือผลรวมของตัวเลขทุก ๆ แถวตอนและทุก ๆ สคัมภ์ หรือคือค่าผลรวม

ของค่าตัวเลขทุกตัวเลขในช่อง (Cell) ในตารางแจกแจงความถี่ค่า χ^2 จากสูตรดังกล่าวจะมีการกระจายเป็นแบบไคสแควร์ และมี

$$df = (r-1)(c-1)$$

เมื่อ r คือจำนวนแถวตอนในตารางแจกแจงความถี่

c คือจำนวนสคัมภ์ในตารางแจกแจงความถี่

3. อาณาเขตวิกฤติ

จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ถ้า $\chi^2_{\text{คำนวณ}} > \chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$

2.3.2 การคำนวณหาค่าความถี่คาดหวัง

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระของตัวแปรทั้งสองนี้ เพื่อจะหาค่าคาดหวัง $E_i = NP_i$ จะต้องหาค่า P_i ที่สอดคล้องกับสมมติฐาน กล่าวคือสอดคล้องกับคุณสมบัติของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$\text{ความน่าจะเป็นที่จะเกิด } X_1 : P(X_1) = \frac{R_1}{N}$$

$$\text{ความน่าจะเป็นที่จะเกิด } Y_1 : P(Y_1) = \frac{C_1}{N}$$

พิจารณาเหตุการณ์ $X_1 \cap Y_1$ จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิด $X_1 \cap Y_1$ เพื่อจะหาเกี่ยวกับ O_{11} ความสมมติฐานที่ว่าตัวแปร X และตัวแปร Y เป็นอิสระกัน จะได้ว่า

$$P(X_1 \cap Y_1) = P(X_1)P(Y_1) = \frac{R_1}{N} \times \frac{C_1}{N}$$

$$E_{11} = NP(X_1 \cap Y_1) = N \times \frac{R_1}{N} \times \frac{C_1}{N} = \frac{R_1 C_1}{N}$$

ทำนองเดียวกัน การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ร่วมอื่นๆ ก็ทำได้เช่นเดียวกัน
เช่น

$$E_{32} = \frac{R_3 C_2}{N},$$

$$E_{43} = \frac{R_4 C_3}{N} \quad \text{ เป็นต้น }$$

ดังนั้นจะหา E_{ij} ในรูปทั่วไปจะได้

$$E_{ij} = \frac{(\text{ผลรวมของแถวอนที่ } i)(\text{ผลรวมของสุมภ์ที่ } j)}{\text{ขนาดตัวอย่างทั้งหมด}}$$

$$= \frac{(R_i)(C_j)}{N} \quad i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, c \quad (2.12)$$

2.3.3 การคำนวณหาชั้นความเป็นอิสระ

โดยทั่วไป สถิติไคสแควร์ จะมีชั้นความเป็นอิสระเป็น $k-1-m$

โดยที่ k = จำนวนระดับของลักษณะที่สนใจ

m = จำนวนพารามิเตอร์ของประชากรที่ต้องประมาณค่า

1. การทดสอบลักษณะต่าง ๆ ของประชากร $m=0$
2. การทดสอบการแจกแจงของประชากร m ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าของประชากรที่ต้องการทดสอบ
3. การทดสอบสมมติฐานของตารางการจำแนกแบบ 2 ทาง ซึ่งมีจำนวนระดับหรือจำนวนกลุ่มทั้งหมด $k=rc$ กลุ่ม ต้องประมาณความน่าจะเป็นของระดับต่าง ๆ ของลักษณะที่ 1 $r-1$ ค่า เนื่องจาก $\sum_{i=1}^r P_i = 1$ จึงประมาณค่า $P_1, P_2, \dots, P_{r-1}$ เท่านั้น

โดยที่ $P_i=P$ (จะมีลักษณะที่ 1 ในระดับที่ i)

ในทำนองเดียวกันต้องประมาณค่าความน่าจะเป็นของระดับต่าง ๆ ในสดมภ์หรือ

ลักษณะที่ 2 จำนวน $c-1$ ค่า เนื่องจาก $\sum_{j=1}^c P_j = 1$ จึงประมาณค่า $P_1, P_2, \dots, P_{c-1}$

เท่านั้น โดยที่ $P_j=P$ (จะมีลักษณะที่ 2 ในระดับที่ j)

ดังนั้นจึงต้องประมาณค่าความน่าจะเป็น $= (r-1)+(c-1)$ ค่า หรือ $m = (r-1)+(c-1)$

$$\begin{aligned}
 \text{องศาความเป็นอิสระ} &= k-1-m \\
 &= rc-1-[(r-1)+(c-1)] \\
 &= rc-1-r+1-c+1 \\
 &= rc-r-c+1 \\
 &= r(c-1)-(c-1) \\
 &= (r-1)(c-1)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

เนื่องจากลักษณะของข้อมูลเป็นตารางแจกแจงสองทาง ซึ่งหมายความว่า $\sum \sum E_{ij} = \sum \sum O_{ij}$ ดังนั้นจะต้องทำให้ผลรวมของทุกแถวและทุกสดมภ์ของตารางความถี่คาดหวังเท่ากับตารางความถี่ของการสังเกต นั่นคือ ค่าความถี่คาดหวังในแถวสุดท้ายและสดมภ์สุดท้ายไม่จำเป็นต้องหาค่าความน่าจะเป็น แต่สามารถหาได้จากการลบผลรวมของแถวหรือสดมภ์ด้วยค่าที่คาดหวังที่หาจากความน่าจะเป็นอื่น ๆ นั่นคือจะมีจำนวนแถวและสดมภ์ที่เป็นอิสระเท่ากับ $(r-1)$ และ $(c-1)$ ตามลำดับ ดังนั้นชั้นความเป็นอิสระจึงมีค่าเท่ากับ $(r-1)(c-1)$

ตัวอย่าง 2.1 ทดสอบความคิดเห็นของกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นผู้บริหารและกลุ่มนักวิชาการว่ามีความคิดเห็นแตกต่างกันหรือไม่

สมมติฐานการทดสอบ

H_0 : กลุ่มผู้บริหารและกลุ่มนักวิชาการต่างมีความคิดเห็นที่สอดคล้องกัน

H_1 : กลุ่มผู้บริหารและกลุ่มนักวิชาการต่างมีความคิดเห็นที่แตกต่างกัน

ตารางที่ 2.2 แสดงจำนวนความถี่ระหว่างตัวแปรทั้งสองชนิด

	ผู้บริหาร	นักวิชาการ	รวม
เห็นด้วย	O_{11}	O_{12}	R_1
ไม่เห็นด้วย	O_{21}	O_{22}	R_2
รวม	C_1	C_2	N

$$E_{11} = \frac{R_1 C_1}{N}, \quad E_{12} = R_1 - E_{11}, \quad E_{21} = C_1 - E_{11}, \quad E_{22} = R_2 - E_{21},$$

แทนค่าเป็นตัวเลขได้ดังนี้คือ

ตารางที่ 2.3 แสดงจำนวนความถี่ระหว่างความคิดเห็นของคนสองกลุ่มตัวอย่าง

	ผู้บริหาร	นักวิชาการ	รวม
เห็นด้วย	$O_{11} = 12$	$O_{12} = 32$	$R_1 = 44$
ไม่เห็นด้วย	$O_{21} = 22$	$O_{22} = 14$	$R_2 = 36$
รวม	$C_1 = 34$	$C_2 = 46$	$N = 80$

$$E_{11} = \frac{R_1 C_1}{N} = \frac{30 \times 44}{80} = 18.7$$

$$E_{12} = R_1 - E_{11} = 44 - 18.7 = 25.3$$

$$E_{21} = C_1 - E_{11} = 34 - 18.7 = 15.3$$

$$E_{22} = R_2 - E_{21} = 36 - 15.3 = 20.7$$

นำค่า O_{ij} และ E_{ij} มาใส่ในตารางได้ผลดังนี้คือ

ตารางที่ 2.4 แสดงจำนวนความถี่ระหว่าง O_{ij} และ E_{ij}

	ผู้บริหาร		นักวิชาการ		รวม
	O_{ij}	E_{ij}	O_{ij}	E_{ij}	
เห็นด้วย	12	18.7	32	25.3	$R_1 = 44$
ไม่เห็นด้วย	22	15.3	14	20.7	$R_2 = 36$
รวม	$C_1 = 34$		$C_2 = 46$		$N = 80$

การคำนวณค่า ขั้นตอนความเป็นอิสระ

$$r = 2, c = 2 \text{ ดังนั้น } df = (r-1)(c-1) = (2-1)(2-1) = 1$$

การคำนวณค่า χ^2

$$\begin{aligned}
 \text{สูตร } \chi^2 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \\
 &= \frac{(12 - 18.7)^2}{18.7} + \frac{(32 - 25.3)^2}{25.3} + \frac{(22 - 15.3)^2}{15.3} + \frac{(14 - 20.7)^2}{20.7} \\
 &= 2.40 + 1.77 + 2.93 + 2.17 \\
 &= 9.27
 \end{aligned}$$

หาค่าวิกฤติของ χ^2 โดยการเปิดตาราง C ภาคผนวกที่ $\alpha = 0.05$

$$\text{และ } df = (2-1)(2-1) = 1$$

พบว่าค่าวิกฤติของ χ^2 จากตาราง = 3.84 และ

$$\chi^2 \text{ ที่คำนวณได้ } = 9.27$$

ดังนั้นจึงเห็นได้ว่า

$$\chi^2_{\text{คำนวณ}} > \chi^2_{.05 \text{ ตาราง}}$$

สรุปได้ว่า มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่ากลุ่มผู้บริหารและกลุ่มนักวิชาการต่างมีความคิดเห็นที่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

2.3.4 การทดสอบ ความเป็นอิสระกันระหว่างลักษณะ สองลักษณะของ ตารางแจกแจงความถี่แบบ 2×2

ตัวอย่างที่ 2.2 จากตัวอย่างที่ 2.1 เป็นตัวอย่างของตารางแจกแจงความถี่แบบ 2×2 ซึ่งสามารถนำหลักการที่ได้อธิบายไปนี้ไปใช้กับตารางแจกแจงความถี่แบบ $r \times c$ และ $r > 2$ และ $c > 2$ กรณีที่เป็นตารางแจกแจงความถี่แบบ 2×2 นี้มีสูตรการคำนวณ ทำให้การคำนวณได้รวดเร็วขึ้น พิจารณาตารางที่ 2.5

ตารางที่ 2.5 แสดงจำนวนความถี่ระหว่างความคิดเห็นของผู้บริหารและนักวิชาการ

	ผู้บริหาร	นักวิชาการ	รวม
เห็นด้วย	a(12)	b(32)	a+b
ไม่เห็นด้วย	c(22)	d(14)	c+d
รวม	a+c	b+d	N = a+b+c+d

$$\text{สูตร } \chi^2 = \frac{N(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)} \quad df = 1 \quad (2.14)$$

แทนค่าได้

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{80(12 \times 14 - 32 \times 22)^2}{(12 + 32)(22 + 14)(12 + 22)(32 + 16)} \\ &= \frac{80(536)^2}{(44 \times 36 \times 34 \times 46)} \\ &= 9.27 \end{aligned}$$

2.3.5 ข้อจำกัดในการใช้สถิติทดสอบไคสแควร์ของการทดสอบสมมติฐานสำหรับตารางการจำแนกสองทาง

1. การใช้สถิติไคสแควร์ ทดสอบสมมติฐานควรคำนึงถึงหลักการใช้ด้วย เมื่อจำนวน E_{ij} มีมากพอสมควร หรือไม่น้อยจนเกินไป การใช้สถิติไคสแควร์

เมื่อจำนวน E_{ij} น้อยจนเกินไปจะทำให้การแปลความหมายคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง โคแครน (Cochran, 1954.) ได้ให้ข้อเสนอแนะดังนี้ว่า

- สำหรับตารางแจกแจงความถี่แบบ 2×2 และ $n > 40$ ให้ใช้สูตร

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(O_{ij} - E_{ij} - 0.5)^2}{E_{ij}} \quad (2.15)$$

หรือ

$$\chi^2 = \frac{N \left(|ad - bc| - \frac{N}{2} \right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \quad (2.16)$$

สูตรนี้เป็นสูตรที่ปรับค่าแล้ว

- เมื่อ $20 < N \leq 40$ ก็อาจใช้สูตร (2.15) หรือ (2.16) ได้ แต่จำนวน E_{ij} ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 5 ในกรณีที่ E_{ij} น้อยกว่า 5 ให้ใช้วิธีสถิติอย่างอื่นทดสอบจะเหมาะสมกว่า
- กรณีที่ $N \leq 20$ ควรใช้วิธีการทางสถิติอย่างอื่นทดสอบ

2. เมื่อตารางแจกแจงความถี่มีค่า $df > 1$, ($k > 2$) การใช้ สถิติไคสแควร์ ทดสอบให้ใช้หลักการว่า อาจใช้ สถิติไคสแควร์ ทดสอบได้ ถึงแม้ว่าจำนวน 20% ของ E_{ij} น้อยกว่า 5 ก็ตาม แต่ต้องได้ $E_{ij} > 1$ ถ้า $E_{ij} < 1$ อาจใช้วิธียุบรวมช่องในตารางแจกแจงความถี่ที่ใกล้เคียงกันเข้าไว้ด้วยกัน เพื่อเป็นการเพิ่มจำนวน E_{ij} ให้มากขึ้น

3. การใช้สถิติไคสแควร์ ทดสอบเมื่อ $df > 1$ ใช้ทดสอบความสำคัญของลำดับที่ในช่องแต่ละช่องของความถี่ไม่ได้ ถ้าต้องการดูเรื่องความสำคัญของอันดับที่ของช่องความถี่ว่าช่องใดเรียงอันดับที่มาก่อนมาหลังอย่างนี้ต้องใช้สถิติอย่างอื่นทดสอบแทน

ข้อสังเกต การใช้สถิติไคสแควร์ ทดสอบสมมติฐานการวิจัยนี้ จะไม่บอกถึงการเรียงลำดับที่ของแต่ละช่องความถี่ได้ ถ้าต้องการจัดอันดับความสำคัญของตัวแปรซึ่งเป็นชื่อของช่องความถี่ จำเป็นต้องใช้วิธีอื่นที่มีความเหมาะสม

2.3.6 ประสิทธิภาพของการใช้สถิติไคสแควร์

โคแครน (Cochran. 1952 : 323) ได้กล่าวถึงเรื่องประสิทธิภาพไว้ว่า การใช้สถิติไคสแควร์ จะมีประสิทธิภาพเข้าใกล้ 1 เมื่อจำนวนกลุ่มตัวอย่างมีค่ามาก ๆ ดังนั้นถ้าต้องการให้มีประสิทธิภาพสูง ก็ควรเลือกจำนวนกลุ่มตัวอย่างให้มีขนาดใหญ่

2.3.7 สรุป การใช้สถิติทดสอบไคสแควร์ในการทดสอบสมมติฐานสำหรับตารางการจำแนกสองทาง

การทดสอบโดยใช้สถิติไคสแควร์ เป็นสถิติที่สามารถนำไปใช้ได้ทั้งแบบสติดินอนพาราเมตริก และสติดิพาราเมตริก การใช้สถิติไคสแควร์ ที่เป็นสถิติแบบพาราเมตริกมีสูตรดังนี้

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \text{ เมื่อมี } df = n \text{ และ}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - M)^2}{\sigma^2} \text{ เมื่อมี } df = n-1$$

การทดสอบ χ^2 ที่เป็นสถิติแบบนอนพาราเมตริกนั้นมีสูตรใช้ว่า

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

สำหรับกลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน เมื่อมี $df = (c-1)(r-1)$ นอกจากนี้ยังมีสูตรอีกหนึ่งสูตรสำหรับกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียวกัน ได้แก่

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \text{ เมื่อมี } df = r-1$$

สูตรนี้มีประโยชน์ในเรื่องการทดสอบภาวะรูปดี (Goodness of Fit)

การทดสอบโดยสถิติไคสแควร์ จะบอกได้แต่เพียงว่า จำนวนข้อมูลนั้นมีความแตกต่างกันจริง ตามสภาพการจำแนกตัวแปรที่กำหนดไว้หรือไม่เท่านั้น ไม่สามารถบอกถึงลำดับที่ของความสำคัญของตัวแปร หรือไม่สามารถบอกได้ว่าตัวแปรใดมีความสำคัญมากน้อยกว่ากัน การทดสอบเพื่อต้องการบอกถึงอันดับที่ของความสำคัญของตัวแปรต้องใช้สถิติอย่างอื่นทดสอบ

การทดสอบสมมติฐานสำหรับตารางการจำแนกสองทางดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ให้ดำเนินการจำแนกข้อมูลที่ได้มาเข้ากับตารางแจกแจงความถี่ ซึ่งมีจำนวนแถวบน i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, r$ และมีจำนวนสดมภ์ j เมื่อ $j = 1, 2, 3, \dots, c$ ข้อนี้ก็จะรู้ O_{ij} ในแต่ละช่อง
2. คำนวณหาค่า E_{ij} ในแต่ละช่อง โดยใช้หลักการตามตารางดังนี้

ตารางที่ 2.6 แสดงค่าความถี่คาดหวังของตัวแปรสองชนิด

คุณลักษณะ X	คุณลักษณะ Y				รวม
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	
X_1	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	R_1
X_2	E_{21}	E_{22}	E_{23}	E_{24}	R_2
X_3	E_{31}	E_{32}	E_{33}	E_{34}	R_3
รวม	C_1	C_2	C_3	C_4	N

คำนวณได้โดยใช้สูตร คือ $E_{ij} = \frac{R_i \times C_j}{N}$

3. คำนวณหาค่า สถิติไคสแควร์ จากสูตร (2.11)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

4. ตั้งสมมติฐานเพื่อการทดสอบ(Null Hypothesis) และสมมติฐานแย้ง(Alternative Hypothesis)
5. กำหนด α และคำนวณหาค่า df จาก $df = (c-1)(r-1)$ เพื่อหาค่า $\chi^2_{1-\alpha}$ จากตาราง C ภาคผนวก
6. การสรุปผล

ยอมรับ H_0 เมื่อ $\chi^2_{\text{คำนวณ}} < \chi^2_{\text{จากตาราง}}$

ยอมรับ H_1 เมื่อ $\chi^2_{\text{คำนวณ}} > \chi^2_{\text{จากตาราง}}$

รูปแบบทั่วไปของการทดสอบของตารางการแจกแจงแบบสองทาง

การทดสอบความเป็นอิสระกันของลักษณะสองลักษณะที่มีสมมติฐานดังนี้

สมมติฐานเพื่อการทดสอบ

H_0 : ลักษณะทั้งสองลักษณะเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : ลักษณะทั้งสองไม่เป็นอิสระต่อกัน

สถิติทดสอบ

$$\chi^2 = \sum \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$$\text{โดยที่ } E_{ij} = \frac{(R_i)(C_j)}{N}$$

อาณาเขตวิกฤต

จะปฏิเสธ H_0 ถ้า $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}$ ด้วยชั้นความเป็นอิสระ $(r-1)(c-1)$

ข้อกำหนด

1. จะสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรอย่างเป็นอิสระกัน
2. $E_{ij} \geq 5$ ทุกค่า i และ j

ข้อจำกัด

1. ความถี่คาดหวังไม่ควรต่ำกว่า 5 นั่นคือ

$$E_{ij} \geq 5 \text{ ทุก } i, j \text{ ค่า } i, j = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, c$$

2. ถ้า $r = 2, c = 2$ หรือตารางการแจกแจงสองทางมีขนาด 2×2 ชั้นความเป็นอิสระจะเป็น $(r-1)(c-1) = (2-1)(2-1) = 1$ จึงต้องปรับค่าสถิติทดสอบ χ^2 ดังนั้น

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(|O_{ij} - E_{ij}| - 0.5)^2}{E_{ij}}$$

แต่ถ้าขนาดตัวอย่าง $N \geq 50$ จะไม่ต้องใช้ χ^2 ก็ยังคงใช้

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

2.4 นิยามศัพท์

ในทางสถิติมีคำอยู่หลายคำที่มักจะพบอยู่เสมอ คำเหล่านี้มีความหมายเฉพาะตัว ดังนั้นในการศึกษาสถิติอนพารามตริกจึงจำเป็นต้องทราบความหมาย และขอบเขตของคำเหล่านี้บ้างตามสมควร

ประชากร (Population) หมายถึง ทุก ๆ หน่วยของลักษณะที่ศึกษา ซึ่งอาจเป็นวัตถุ สิ่งของ บุคคลหรือปรากฏการณ์ต่าง ๆ ประชากรแบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ

ประชากรที่นับได้ (Finite Population) หมายถึงประชากรที่มีจำนวนจำกัด มีขนาดพอที่จะนับจำนวนที่แน่นอนได้ เช่น จำนวนบริษัท ห้างร้านในประเทศไทย จำนวนนิสิตในมหาวิทยาลัยแห่งใดแห่งหนึ่ง เป็นต้น

ประชากรที่มีจำนวนอนันต์ (Infinite Population) หมายถึงประชากรที่มีจำนวนไม่มีที่สิ้นสุดหรือมีขนาดใหญ่จนไม่สามารถนับจำนวนที่แน่นอนได้ เช่น จำนวนเส้นผมบนศีรษะ จำนวนเชื้อโรคในอากาศ จำนวนเม็ดทรายในกระสอบ เป็นต้น

กลุ่มตัวอย่าง (Sample) หมายถึงบางหน่วยของลักษณะที่ต้องการศึกษา ซึ่งถูกเลือกให้เป็นตัวแทนของประชากร และกลุ่มตัวอย่างจะเป็นตัวแทนของประชากรได้ดีเพียงใดขึ้นอยู่กับวิธีการสุ่มตัวอย่าง

ค่าพารามิเตอร์ (Parameter) หมายถึง ค่าที่ประมวลได้จากข้อมูลทั้งหมดของประชากร โดยใช้วิธีการทางสถิติจะเรียกว่า พารามิเตอร์ เช่น ค่าเฉลี่ย (μ) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) ค่าความแปรปรวน (σ^2) เป็นต้น

ค่าสถิติ (Statistic) หมายถึง ค่าทางสถิติต่าง ๆ ที่ประมวลได้จากกลุ่มตัวอย่าง เช่น ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) ค่าความแปรปรวน (S^2) เป็นต้น

ตัวแปร (Variable) หมายถึง สัญลักษณ์ที่ประกอบไปด้วยค่าเปลี่ยนแปลง (Variate) ซึ่งเป็นปริมาณหรือคุณภาพ ตัวแปรที่ประกอบด้วยค่าเปลี่ยนแปลงเชิงปริมาณ เช่น คะแนนจากการ

สอบความสูง น้ำหนัก อายุ ความเร็ว เป็นต้น ส่วนตัวแปรที่ประกอบด้วยค่าเปลี่ยนแปลงเชิงคุณภาพ เช่น เพศ ศาสนา สถานภาพการสมรส ความเชื่อ อาชีพ เป็นต้น

ในทางการวิจัยหรือทางสถิติมักนิยมใช้สัญลักษณ์ X, Y, Z แทนตัวแปร และให้

X_1, X_2, X_3 แทนค่าเปลี่ยนแปลงของตัวแปร X

Y_1, Y_2, Y_3 แทนค่าเปลี่ยนแปลงของตัวแปร Y

Z_1, Z_2, Z_3 แทนค่าเปลี่ยนแปลงของตัวแปร Z

ตัวอย่างเช่น ให้ X แทนอาชีพ (อาชีพเป็นตัวแปร)

อาจประกอบด้วยค่าเปลี่ยนแปลง : $X_1 =$ รับราชการ

$X_2 =$ ค้าขาย

$X_3 =$ เกษตรกรรม

$X_4 =$ รับจ้าง

$X_5 =$ อื่น ๆ

จากตัวอย่างสามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$X : X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$

ข้อมูล (Data) หรือข้อมูลดิบ (Raw Data) หมายถึง ข้อเท็จจริงซึ่งได้มาจากหน่วยตัวอย่าง

ข้อมูลสถิติ (Statistical Data) หมายถึง ข้อเท็จจริงต่าง ๆ ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลหลายค่า และรวบรวมเพื่อจุดประสงค์อย่างใดอย่างหนึ่ง

ชนิดของข้อมูล ข้อมูลอาจจำแนกได้หลายประเภท ทั้งนี้แล้วแต่จะยึดอะไรเป็นเกณฑ์ เช่น

ชนิดของข้อมูลที่จำแนกตามแหล่งที่เกิดข้อมูล จำแนกได้ 2 ประเภทคือ

1) ข้อมูลที่เกิดจากแหล่งปฐมภูมิ (Primary Source) ซึ่งเรียกว่า ข้อมูลปฐม (Primary Data) ได้แก่ข้อมูลที่ได้จากแหล่งต้นตอโดยตรง เช่น ข้อมูลเกี่ยวกับจำนวนคน เพศ อายุ รายได้ อาชีพ เป็นต้น

2) ข้อมูลที่เกิดจากแหล่งทุติยภูมิ (Secondary Source) ซึ่งเรียกว่า ข้อมูลทุติย (Secondary Data) ได้แก่ข้อมูลที่ได้จากแหล่งที่รวบรวมข้อมูลไว้ แต่ไม่ใช่แหล่งที่เกิดของข้อมูลโดยตรง เช่น ข้อมูลเกี่ยวกับคนเกิด คนตาย คนย้าย ที่ได้จากสำนักงานเทศบาล เป็นต้น

ชนิดของข้อมูลที่จำแนกตามลักษณะของข้อมูล จำแนกได้ 2 ประเภท คือ

1) ข้อมูลเชิงปริมาณ (Quantitative Data) ได้แก่ข้อมูลที่แสดงลักษณะของข้อมูล หรือข้อเท็จจริงเกี่ยวกับหน่วยตัวอย่าง เป็นปริมาณที่วัดได้เป็นตัวเลข เช่น อายุ น้ำหนัก ความสูง จำนวนคน ความยาว เวลา เป็นต้น

2) ข้อมูลเชิงคุณภาพ (Qualitative Data) ได้แก่ข้อมูลที่แสดงลักษณะของข้อมูล หรือข้อเท็จจริงเกี่ยวกับหน่วยตัวอย่างเป็นคุณสมบัติ ไม่อาจวัดเป็นตัวเลขได้ เช่น เพศ สีของผมหงอกของสัตว์ เป็นต้น

ตารางการแจกแจง (Contingency Table) คือ ตารางที่ประกอบด้วย r แถว (Row) และ c สดมภ์ (Column) เช่น

ตารางที่มี 2 แถว และ 2 สดมภ์ นิยมเรียกชื่อว่า ตาราง 2×2

ตารางที่มี 2 แถว และ 3 สดมภ์ นิยมเรียกชื่อว่า ตาราง 2×3

ตารางที่มี 2 แถว และ 5 สดมภ์ นิยมเรียกชื่อว่า ตาราง 3×5

ดังนั้น ตารางที่มี r แถว และ c สดมภ์ นิยมเรียกชื่อว่า ตาราง $r \times c$

ตารางจำแนกประเภท (Cross Classified Table) ที่มีจำนวนตั้งแต่ 2 ทางหรือมากกว่าขึ้นไป ถือว่าเป็นตารางการแจกแจงนั่นเอง แต่ถ้าตารางนั้นจำแนกประเภททางเดียวจะไม่ถือว่าเป็นตารางการแจกแจง

ตัวอย่างที่ 2.3 ตัวอย่างตารางการแจกแจงขนาด 2×2

ทดสอบความคิดเห็นของกลุ่มตัวอย่างชายและหญิง จากการตอบแบบสอบถาม สำหรับข้อความที่ว่า “การคุมกำเนิดเป็นการฝืนธรรมชาติ”

ตารางที่ 2.7 แสดงจำนวนความถี่ความคิดเห็นของกลุ่มตัวอย่างชายและหญิง

เพศ	ความเห็น		รวม
	เห็นด้วย (เห็น)	ไม่เห็นด้วย (ไม่เห็น)	
ชาย	99	100	199
หญิง	81	124	205
รวม	180	224	404

2.5 ทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลาง

คือ การที่ตัวแปรสุ่มใดที่เกิดจากการบวกกันของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกัน โดยที่ตัวแปรสุ่มเหล่านั้นมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากัน จะได้ว่าความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มนั้นจะมีค่าอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งจะประมาณได้ด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐาน ซึ่งจะศึกษารายละเอียดได้จากทฤษฎีบทที่ 2.6 ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.6

ให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากการแจกแจง ซึ่งมีค่าเฉลี่ย μ และค่าแปรปรวน σ^2 หรือ $N(\mu, \sigma^2)$ แล้วค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}$ จะมีการแจกแจงเข้าสู่การแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และค่าแปรปรวน σ^2/n ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ โดยไม่คำนึงถึงการแจกแจง X ว่าเป็นแบบใด กล่าวคือตัวแปรสุ่ม $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ จะมีการแจกแจงโดยประมาณแบบปกติมาตรฐาน หรือ $N(0, 1)$ ไม่ว่า X จะมีการแจกแจงแบบใด ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ

ทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลางยังอาจเขียนในรูปของฟังก์ชันผลรวมตัวอย่าง $T = \sum_{i=1}^n X_i$ ได้โดยปรับค่าคาดหวังและค่าแปรปรวนให้ถูกต้อง ดังนั้นค่ารวมตัวอย่าง T จะมีการแจกแจงเข้าสู่การแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย $n\mu$ และค่าความแปรปรวน $n\sigma^2$ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ไม่ว่าการแจกแจงของ X จะเป็นอย่างไร หรืออีกนัยหนึ่งตัวแปรสุ่ม $\frac{T - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ จะมีการแจกแจงโดยประมาณแบบ $N(0, 1)$ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ โดยไม่กำหนดว่า X มีการแจกแจงแบบใด

ดังนั้นในกรณีที่ประชากรที่เลือกตัวอย่างสุ่มมาไม่ได้มีการแจกแจงปกติ การแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่างยังคงเป็นแบบปกติได้ถ้าขนาดตัวอย่างใหญ่พอ ในทางปฏิบัติบ่อยครั้งจะไม่ทราบลักษณะการแจกแจงของประชากร แต่เลือกตัวอย่างสุ่มมาเพื่อทำการอนุมานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งจำเป็นต้องใช้การแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่างทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลาง จึงเป็นทฤษฎีสถิติในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ที่เป็นประโยชน์มากสำหรับการอนุมานเชิงสถิติ

สำหรับเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลางว่า ขนาดตัวอย่างต้องใหญ่พอนั้น มักจะมีคำถามเสมอว่าขนาดตัวอย่างเท่าไรจึงจะเรียกได้ว่าใหญ่พอ อันที่จริงการกำหนดขนาดตัวอย่างที่ใหญ่พอไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัว เพียงแค่ว่าการประมาณการแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่างด้วยการแจกแจงปกติจะใกล้เคียงมากขึ้น ๆ เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ขึ้น ๆ โดยส่วนมากการแจกแจงของ

ค่าเฉลี่ยตัวอย่างจะเข้าสู่การแจกแจงปกติค่อนข้างเร็วด้วยขนาดตัวอย่างที่ไม่ใหญ่นัก ในกรณีทั่วไป อาจกำหนดได้ว่าตัวอย่างตั้งแต่ 30 ขึ้นไป จะใหญ่เพียงพอที่จะใช้ทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลางได้ ซึ่งในการเก็บรวบรวมข้อมูลในทางปฏิบัติ การเก็บข้อมูลตัวอย่างขนาด 30 มักจะเป็นไปได้ ทำให้สามารถใช้ทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลางได้อย่างกว้างขวาง