

บทที่ 2

วรรณกรรมและผลงานที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการการเคลื่อนที่ของน้ำใต้ดิน

สมการที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของน้ำใต้ดิน เริ่มแรกได้มาจากการทดลองของดาร์ซี (Freeze and Cherry, 1979, p.16) ซึ่งต่อมาเรียกว่า กฎของดาร์ซี เป็นกฎที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างเฮดชลศาสตร์ (h) ระยะทางการไหล (l) และอัตราการไหล (Q) เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$Q = -K \frac{dh}{dl} A \quad (2.1)$$

ซึ่ง A คือ พื้นที่ที่ตั้งฉากกับทิศทางการไหล

K คือ ค่าสัดส่วนคงที่ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ความซึมได้ (Hydraulic Conductivity) ซึ่งค่าของมันขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของของไหล และคุณสมบัติของตัวกลาง จากสมการ (2.1) ถ้าหารด้วยพื้นที่ A ทั้งสองข้าง จะได้

$$V = -K \frac{dh}{dl} \quad (2.2)$$

ซึ่ง V คือ อัตราการไหลจำเพาะ (= Q/A) หรืออาจเรียกว่า ความเร็วดาร์ซี (Darcy Velocity) เมื่อเขียนสมการ (2.2) ให้อยู่ในรูปของการแตกแกน จะได้

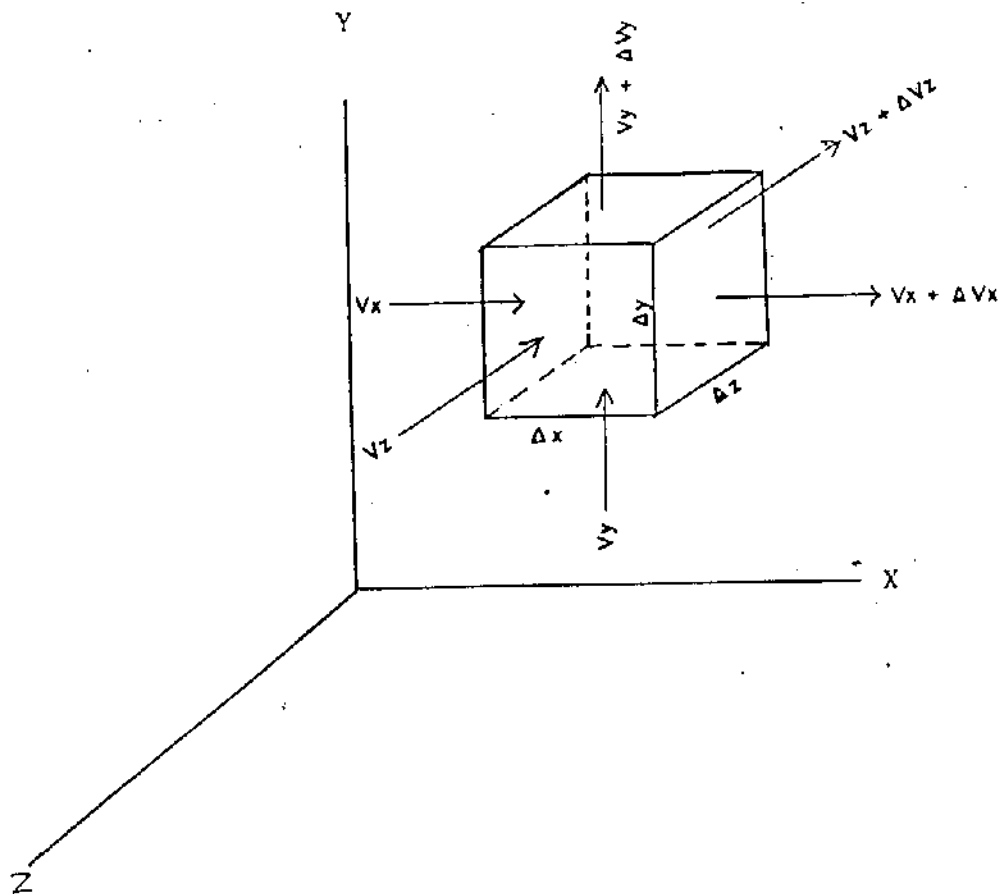
$$V_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$V_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.4)$$

$$V_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.5)$$

สมการ (2.3)-(2.5) นี้ คือตัวแทนของกฎดาร์ซี ที่พร้อมจะนำไปใช้ในการพิสูจน์ หาสมการหลักของการเคลื่อนที่ของน้ำใต้ดินต่อไป

สังเกตจากสมการว่าด้วยการเคลื่อนที่ของน้ำใต้ดิน ทั้ง 3 สมการ ได้แก่ สมการ (2.3)-(2.5) จะพบว่ามีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอยู่ 4 ตัว คือ v_x , v_y , v_z และ h ดังนั้นจึงต้องมีอีก 1 สมการ ซึ่งอาจหาได้จากการวิเคราะห์จากกฎทรงมวล (Law of Conservation of Mass) (Freeze and Cherry, 1979, p.63) ซึ่งกล่าวว่าผลต่างของอัตราการมวลสารของไหลที่ไหลเข้ากับที่ไหลออกของตัวกลางหนึ่งหน่วยปริมาตร จะเท่ากับอัตราการเก็บกักของมวลสารในหนึ่งหน่วยปริมาตรนั้น



ภาพที่ 2.1 การวิเคราะห์การไหลผ่านตัวกลางพรุน

พิจารณาจากภาพที่ 2.1 กำหนดเอาว่าของไหลเป็น Incompressible Fluid คือมีค่าความหนาแน่น (ρ) คงที่ จะได้อัตราการไหลเข้าเป็น

$$Q_{in} = V_x \Delta y \Delta z + V_y \Delta x \Delta z + V_z \Delta x \Delta y \quad (2.6)$$

และอัตราการไหลออกเป็น

$$Q_{out} = (V_x + \Delta V_x) \Delta y \Delta z + (V_y + \Delta V_y) \Delta x \Delta z + (V_z + \Delta V_z) \Delta x \Delta y \quad (2.7)$$

จากคำจำกัดความของค่าการกักเก็บจำเพาะ (Specific Storage, S_s) ซึ่งหมายถึง "ปริมาณน้ำที่ได้จากชั้นให้น้ำ (Aquifer) หนึ่งหน่วยปริมาตร ทำให้เขตความดัน (Piezometric Head) ของชั้นให้น้ำนั้นลดลงหนึ่งหน่วย" ทำให้สามารถเขียนสมการ ได้ดังนี้

$$Q_{out} - Q_{in} = -S_s \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.8)$$

แทนค่าจากสมการ (2.6) และ (2.7) ลงใน (2.8) จะได้

$$\Delta V_x \Delta y \Delta z + \Delta V_y \Delta x \Delta z + \Delta V_z \Delta x \Delta y = -S_s \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.9)$$

เนื่องจาก $\Delta V_x = \frac{\partial V_x}{\partial x} \Delta x$, $\Delta V_y = \frac{\partial V_y}{\partial y} \Delta y$ และ $\Delta V_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} \Delta z$

จะทำให้สมการ (2.9) กลายเป็น

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = -S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.10)$$

สมการ (2.10) คือสมการเพิ่มเติมแก่ (2.3), (2.4) และ (2.5) ทำให้เราสามารถหาสมการอนุพันธ์ของการไหลของน้ำใต้ดินที่สมบูรณ์ได้ นั่นคือ ถ้าแทนค่า V_x , V_y และ V_z ลงใน (2.10) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial h}{\partial z}) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.11)$$

สมการ (2.11) คือสมการการเคลื่อนที่ของน้ำใต้ดินในชั้นให้น้ำแบบ Anisotropic Nonhomogeneous Aquifers ซึ่งเป็นชั้นให้น้ำที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความซึมได้ แปรไปตามทิศทางและตำแหน่ง แต่ถ้าชั้นให้น้ำเป็นแบบ Isotropic and Nonhomogeneous Aquifers สมการ (2.11) จะกลายเป็น

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.12)$$

โดยปกติเมื่อเราพิจารณาการไหลในชั้นให้น้ำตามธรรมชาติ เราจะพบว่า ระยะทางในแนวระนาบจะมีค่ามากเมื่อเทียบกับระยะในแนวตั้ง เช่นอาณาบริเวณของชั้นให้น้ำในแนวระนาบอาจเป็น 10 ถึง 1000 กิโลเมตร แต่ความลึกของบ่อน้ำเป็น 10 ถึง 1000 เมตร เท่านั้นเอง ดังนั้นเราจึงมักจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของน้ำใต้ดิน ในแนวระนาบเท่านั้น สมการ (2.12) จึงเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.13)$$

สมการ (2.13) เป็นการพิจารณาการไหลแบบสองมิติในแนวระนาบเท่านั้น ซึ่งการพิจารณาแบบนี้ทำให้การแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้นโดยเฉพาะการนำเอาค่า Storativity (S) มาใช้แทน Specific Storage (S_s) โดยมีความสัมพันธ์คือ (Bear, 1979, p.87)

$$S = S_s b \quad (2.14a)$$

$$T = Kb \quad (2.14b)$$

เมื่อ b คือความหนาเฉลี่ยของชั้นให้น้ำ

T คือค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (Transmissivity)

แทนค่าสมการ (2.14) ลงใน (2.13) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.15)$$

หรืออาจเขียนในรูปเวกเตอร์ได้เป็น

$$\nabla \cdot (T \nabla h) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.16)$$

ถ้าพิจารณาว่าในหนึ่งหน่วยปริมาตรที่เราใช้ มีจุดที่ทำให้น้ำเพิ่มขึ้น (Source) หรือจุดที่ทำให้สูญเสีย น้ำ (Sink) ก็จะเปลี่ยนแปลงสมการ (2.16) ไปเป็น

$$\nabla \cdot (T \nabla h) + \frac{Q}{a} - R = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.17)$$

เมื่อ Q/a เป็นอัตราการการลด เช่นการสูบน้ำออกต่อพื้นที่หน้าตัด a และ R เป็นอัตราการเพิ่ม เช่น ฝนตกในพื้นที่หนึ่งหน่วยปริมาตรที่พิจารณา
สมการ (2.17) คือสมการการเคลื่อนที่ของน้ำใต้ดินแบบไม่คงตัวในสองมิติ ในชั้นอุ้มน้ำแบบปิด (Confined Aquifers) ที่มี Source และ Sink
กรณีของชั้นอุ้มน้ำแบบปิดและรั่วซึม (Leaky Confined Aquifers) จะเป็น

$$\nabla \cdot (T \nabla h) + \frac{Q}{a} - R - \left[\frac{K'}{b'} \right] (h - h') = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.18)$$

โดยที่

K' คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความซึมได้ของชั้นอุ้มน้ำแบบปิดและรั่วซึม

a คือ พื้นที่หน้าตัดของ Control Volume ตามเส้นประในภาพที่ 3.2

b' คือ ความหนาของชั้นอุ้มน้ำแบบปิดและรั่วซึม

h' คือ ค่า Piezometric head ของชั้นอุ้มน้ำแบบปิดและรั่วซึม

กรณีของชั้นอุ้มน้ำแบบเปิด (Unconfined Aquifers) เราอาจประมาณให้ความหนาของชั้น อิ่มตัวด้วยน้ำโดยวัดจากชั้นที่บ้น้ำถึงชั้นผิวน้ำอิสระมีค่าเท่ากับ h ซึ่งหากเรากำหนดให้ชั้นที่บ้น้ำเป็น แกนอ้างอิงก็คือค่า head นั้นเอง (Bear, 1979, p.87) ดังนั้นสมการ (2.14a) จะเป็น

$$S = S_s h \quad (2.19)$$

แทนลงในสมการ (2.13) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.20)$$

ดังนั้น จะได้สมการการไหลของน้ำใต้ดินสำหรับการไหลแบบไม่คงตัวในสองมิติ ในชั้นอุ้มน้ำแบบเปิด ที่มี Source และ Sink เป็น

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{Q}{a} - R = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.21)$$

2.2 Theis Equation

ในสภาพการไหลเข้าบ่อแบบไม่คงตัว (Unsteady-State Flow to a Well) สำหรับในชั้นอุ้มน้ำแบบปิด เมื่อมีการสูบน้ำออกจากเดิมมีระดับน้ำในสภาพสมดุลจะทำให้ระดับน้ำลดลงซึ่งจะลดลงมากในบริเวณใกล้ ๆ กับบ่อ แล้วค่อยๆ ลดน้อยลงไปเมื่อระยะห่างออกไปจากบ่อ โดยมีรูปร่างลักษณะคล้ายรูปกรวย โดยค่า head จะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา และระยะรัศมีอิทธิพล (Radius of Influence) ในขณะที่มีการสูบน้ำออกด้วยอัตรา Q คงที่ (ประกอบ, 2530)

จากสมการ (2.15) ซึ่งเป็นสมการการไหลในสภาพไม่คงตัวของน้ำใต้ดินในชั้นอุ้มน้ำแบบ Homogeneous and Isotropic คือมีเนื้อเดียวกันตลอดมีความหนาแน่นและมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทุกทาง สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ Polar Coordinates ซึ่งเป็นการไหลในทิศทางเดียวเนื่องจากไม่เปลี่ยนแปลงตามมุมได้เป็น (Gupta, 1989, P.182)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.22a)$$

เมื่อ r = ระยะทางจากบ่อสูบน้ำถึงบ่อสังเกตการณ์หรือจุดที่พิจารณา
หรือเขียนให้อยู่ในเทอมของระดับลด (Drawdown) ได้เป็น

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (2.22b)$$

เมื่อ s = ค่าระดับลด (Drawdown) ที่ระยะ r

ในปี ค.ศ. 1935 C.V. Theis ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาการไหลของสมการ (2.22b) โดยได้ใช้หลักการเดียวกันกับการแก้ปัญหาการไหลของความร้อน โดยมีสมมุติฐาน ดังนี้ (Gupta, 1989, P.182)

1. ชนิดของชั้นอุ้มน้ำเป็นแบบ Homogeneous, Isotropic และมีอาณาบริเวณกว้างขวางไม่มีขอบเขตจำกัด

2. ปริมาณน้ำที่ออกมาจากชั้นอุ้มน้ำ จะทำให้ head ลดลงทันทีทันใด ในขณะที่มีการสูบน้ำ

3. บ่อน้ำมีการขุดเจาะทะลุชั้นอุ้มน้ำและมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเล็กมากเมื่อเทียบกับอัตราการสูบน้ำ ดังนั้นปริมาณการกักเก็บ (Storage) ภายในบ่อสามารถตัดทิ้งได้

โดยสมมุติฐานมีสภาพเริ่มแรกและสภาพขอบเขต (Initial and Boundary Condition) ดังนี้

1. ที่ $t = 0, s = 0$ สำหรับ $r_w < r < \infty$

2. ที่ $t > 0, s = 0$ สำหรับ $r = \infty$

3. ที่ระยะที่ขอบบ่อ (r_w) $\frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r_w T}$

จากสมการ (2.22b) Theis ได้แก้สมการได้ผลเฉลยเป็น

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (2.23)$$

ซึ่งสมการ (2.23) คือ Thels Equation และเทอมของค่าอินทิเกรตด้านขวามือ เรียกว่า Well Function , $W(u)$ โดยที่

$$W(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (2.24)$$

ดังนั้น แทนค่าจากสมการ (2.24) ลงในสมการ(2.23) จะได้

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (2.25a)$$

โดยที่ u คือ ค่าตัวแปร ซึ่ง Boltzman กำหนดให้ u มีค่าเป็น

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad (2.25b)$$

Well Function สามารถหาค่าได้จากอนุกรมดังสมการ (2.26)

$$W(u) = -0.5772 - \ln u + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \dots \quad (2.26)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง Well Function, $W(u)$ กับค่า u ต่างๆ แสดงดังตาราง ที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าความสัมพันธ์ระหว่างค่า Well Function $W(u)$ กับค่าต่าง ๆ ของ $\frac{1}{u}$

$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{u} \times 10^{-1}$	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
1.0	0.00000	0.21938	1.82292	4.03793	6.33154	8.63322	10.93572	13.23831
1.2	0.00003	0.29255	1.98932	4.21859	6.51369	8.81553	11.11804	13.42063
1.5	0.00017	0.39841	2.19641	4.44007	6.73667	9.03866	11.34118	13.64377
2.0	0.00115	0.55977	2.46790	4.72610	7.02419	9.32632	11.62886	13.93145
2.5	0.00378	0.70238	2.68126	4.94824	7.24723	9.51945	11.85201	14.15460
3.0	0.00857	0.82889	2.85704	5.12990	7.42949	9.73177	12.03433	14.33692
3.5	0.01566	0.94208	3.00650	5.28357	7.58359	9.88592	12.18847	14.49107
4.0	0.02491	1.04428	3.13651	5.41675	7.71708	10.01944	12.32201	14.62460
5.0	0.04890	1.22265	3.35471	5.63939	7.94018	10.24258	12.54515	14.84774
6.0	0.07833	1.37451	2.53372	2.82138	8.12247	10.42490	12.72747	15.03007
7.0	0.11131	1.50661	3.68551	5.97529	8.27659	10.57905	12.88162	15.18422
8.0	0.14641	1.62342	3.81727	6.10865	8.41011	10.71258	13.01515	15.31775
9.0	0.18266	1.72811	3.93367	6.22629	8.52787	10.83036	13.13294	15.43553
$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{u} \times 10^7$	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}	
1.0	15.54087	17.74344	20.14604	22.44862	24.75151	27.05379	29.35638	
1.2	15.72320	18.02577	20.32835	22.63094	24.93353	27.05379	29.53870	
1.5	15.94634	18.24892	20.55150	22.85408	25.15668	27.23611	29.76184	
2.0	16.23401	18.53659	20.83919	23.1477	25.4435	27.45926	30.04953	
2.5	16.45715	18.75974	21.06233	23.36491	25.66750	27.74693	30.27267	
3.0	16.63948	18.94206	21.24464	23.54723	25.84982	27.97008	30.45499	
3.5	16.79362	18.09621	21.39880	23.70139	26.00397	28.15240	30.30915	
4.0	16.92715	19.22975	21.53233	23.83492	26.12750	28.30655	30.74268	
5.0	17.15030	19.45288	21.75548	24.05806	26.36064	28.44008	30.96582	
6.0	17.33263	19.63521	21.93779	24.24039	26.54297	28.84555	31.14813	
7.0	17.48677	19.78937	22.09195	24.39453	26.69711	28.9969	31.30229	
8.0	17.62030	19.92290	22.22548	24.52806	26.83064	29.13324	31.43582	
9.0	17.73808	20.04068	22.34326	24.64584	26.94843	29.2502	31.55360	

ที่มา : Reod (1980)

สำหรับในกรณีของชั้นอุ้มน้ำแบบปิดและรั่วซึม (Semi-confined Aquifers หรือ Leaky Aquifers) ซึ่งแสดงในภาพที่ 2.2 Hantush and Jacob (1955) ได้ศึกษาโดยการพัฒนามาจากสมการของ Theis (สมการ 2.25a) แล้วได้คำตอบในรูปความสัมพันธ์ของสมการไร้มิติ เป็น (Freeze and Cherry, 1979, p.321)

$$r/B = r \sqrt{\frac{K'}{K_1 b_1 b'}} \quad (2.27)$$

เมื่อ r = ระยะทางจากบ่อน้ำถึงบ่อสังเกตการณ์หรือรัศมีอิทธิพล

$$B = \sqrt{\frac{K_1 b_1 b'}{K'}}$$

K_1 = สัมประสิทธิ์ความซึมได้ของชั้นอุ้มน้ำแบบปิด

b_1 = ความหนาของชั้นอุ้มน้ำแบบปิด

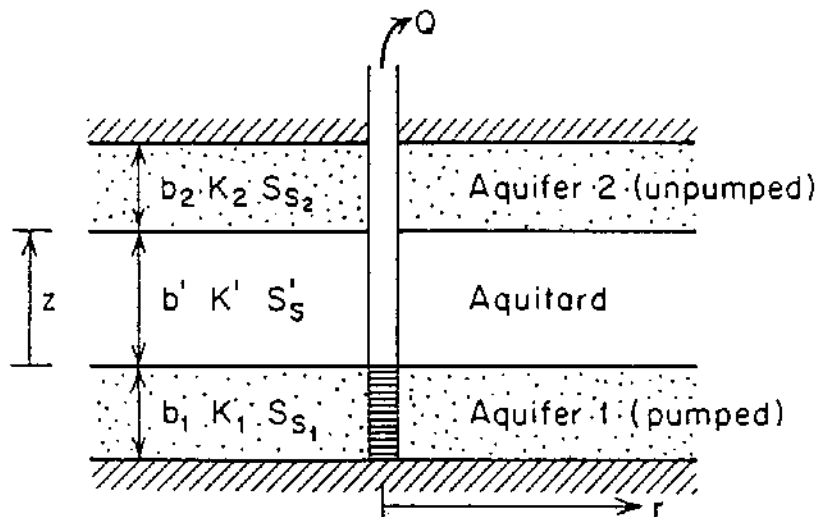
b' = ความหนาของชั้นอุ้มน้ำแบบปิดและรั่วซึม

และ เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (2.25a) แล้วจะได้

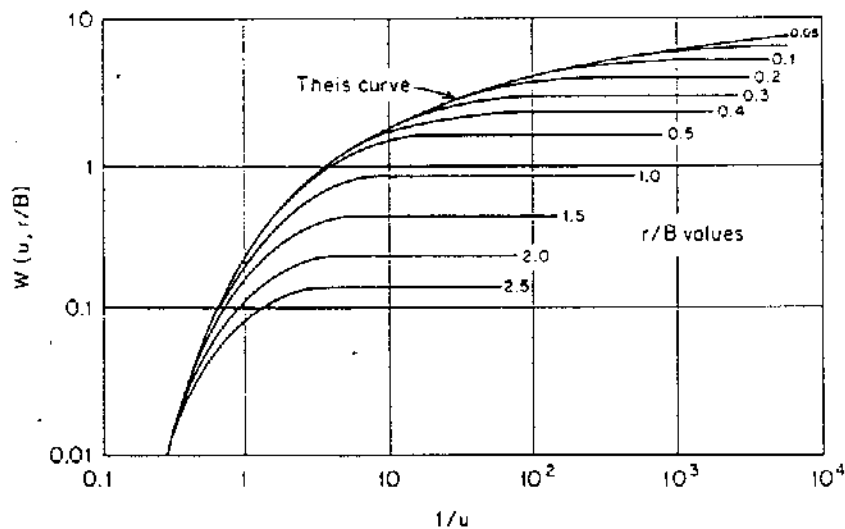
$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u, r/B) \quad (2.28)$$

โดยที่ $W(u, r/B)$ เรียกว่า Leaky Well Function ซึ่ง Hantush (1956) ได้เสนอกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าของ $W(u, r/B)$ กับ $1/u$ ไว้แสดงในภาพที่ 2.3

เมื่อพิจารณาจากสมการ (2.27) หากชั้นอุ้มน้ำชั้นบน ซึ่งเป็นชั้นที่รั่วซึมได้ (Aquitard) เป็นชั้นที่บดน้ำ (Impervious Layer) คือไม่มีการรั่วซึมแล้ว $K' = 0$ ทำให้ค่า r/B จากสมการ (2.27) มีค่าเท่ากับ 0 แล้ว จะเห็นว่า สมการ (2.28) ก็คือสมการของ Theis ซึ่งหากดูจากกราฟ ในภาพที่ 2.3 ที่ $r/B = 0$ แล้ว จะได้ความสัมพันธ์เป็นโค้งของ Theis (Theis curve) นั้นเอง



ภาพที่ 2.2 ชั้นอุ้มน้ำแบบกึ่งปิดและรั่วซึม (Leaky Confined Aquifers)



ภาพที่ 2.3 กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $W(u, r/B)$ กับ $1/u$ (Walton, 1960)

2.3 วิธี Finite Difference

วิธีการของ Finite-Difference เป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้ในการหาผลเฉลยของ Boundary Value Problem ด้วยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) เพื่อหาคำตอบสำหรับการแก้ปัญหาการไหลของน้ำใต้ดิน ทั้งแบบ Steady-State Flow และ Unsteady - State Flow (Hunt, 1983) ซึ่งมีวิธีการคือ กำหนดจุดหรือตารางของ Finite Difference ลงไปบน Problem Domain ซึ่งแต่ละจุดจะมีตำแหน่งและความสัมพันธ์กับจุดข้างเคียงต่อเนื่องกันไปทั่วทั้งพื้นที่ จากนั้นโดยการแทนค่าสมการ Differential ด้วยสมการ Finite Difference ที่จุดต่างๆ ทั่วทั้ง Problem Domain (Sriboonlue, 1985) นั่นคือเราได้เปลี่ยนจาก Continuous Boundary Value Problem เป็นชุดของสมการทางพีชคณิตซึ่งจำนวนสมการจะมีเท่ากับจำนวนของตัวแปร จึงทำให้สามารถแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปรสำหรับทุกๆ จุดใน Problem Domain

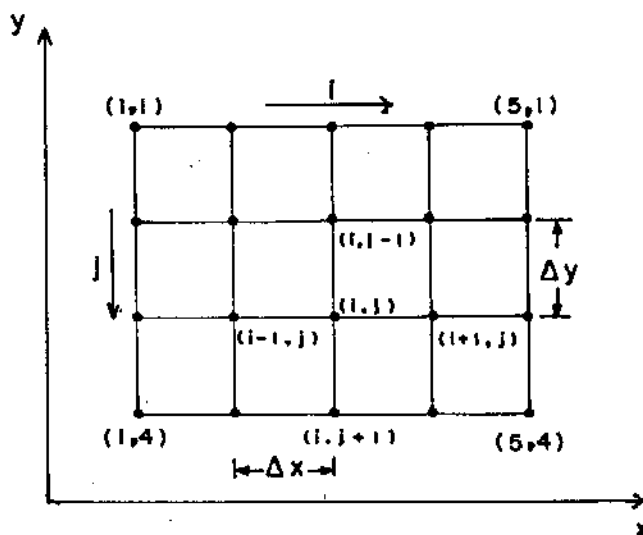
ขั้นตอนของการวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธี Finite-Difference มีดังนี้

- ก. แบ่งส่วนย่อยของพื้นที่ออกเป็น Node หรือ Grid ย่อยเล็กๆ
- ข. เลือกรูปแบบของฟังก์ชันที่จะนำมาใช้สำหรับการประมาณค่าของทุกๆ จุด หรือ Nodes
- ค. สร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่าง Nodes
- ง. แก้ระบบสมการเส้นตรง เพื่อหาค่าตัวแปรที่จุดต่างๆ

(ก) การแบ่งส่วนย่อยของพื้นที่ (Discretization)

การแบ่งพื้นที่ขนาดใหญ่ โดยการซอยให้เป็นพื้นที่ขนาดเล็ก เป็นการศึกษาเพื่อประมาณค่า โดยการแบ่งพื้นที่ออกเป็น Grid หรือ Nodes เพื่ออธิบายพฤติกรรมของแต่ละ Node ที่ประกอบกันเป็น Grid และมีความสัมพันธ์ต่อเนื่องกันภายในระบบ กล่าวคือค่าของตัวแปรบนจุดแต่ละจุดหรือ Nodes จะอยู่ในรูปของสมการพีชคณิต (Polynomial Equation) ซึ่งสัมประสิทธิ์ของสมการพีชคณิตจะเป็นตัวไม่ทราบค่ามีค่าสัมพันธ์กับ Node ข้างเคียงต่อเนื่องกันไป ดังนั้นยิ่งถ้าหากแบ่งพื้นที่ย่อยออกมากเท่าใดก็ยังสามารถอธิบายพฤติกรรมของพื้นที่ขนาดใหญ่ได้มากและถูกต้องยิ่งขึ้น

การแบ่งพื้นที่ขนาดใหญ่เป็นส่วนย่อยเล็กๆ เป็น Grid หรือ Nodes เพื่อการประมาณค่า แสดงดังภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.4 การแบ่งส่วนย่อยของพื้นที่ออกเป็นกริด

พิจารณาภาพที่ 2.4 เป็นการแบ่งกริดย่อย โดยให้ระยะห่างระหว่างจุดในแนวราบมีค่าเท่ากับ Δx และระยะห่างระหว่างจุดในแนวตั้ง เท่ากับ Δy กำหนดตัวอักษรประจำ Node เป็นคู่ลำดับ (i,j) ให้ i แทนเลขที่ของแถวตั้ง j แทนเลขที่ของแถวนอน โดยมีตัวเลขและเครื่องหมายดังรูป

(ข) การเลือกรูปแบบของฟังก์ชันและการสร้างสมการระหว่าง Nodes

จากสมการ (2.17) สำหรับการไหลของน้ำใต้ดินในชั้นอุ้มน้ำแบบ Homogeneous และ Isotropic จะสามารถเขียน Governing Equation ได้เป็น (Wang and Anderson, 1981, p.22)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q}{T} \quad (2.29)$$

พิจารณาเทอมทางซ้ายมือ สามารถแทนอนุพันธ์ด้วย Finite Difference ได้เป็น (Wang and Anderson, 1981, p.22)

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (2.30)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} \quad (2.31)$$

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} - \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} \quad (2.32)$$

หรือ

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (2.33)$$

และในทำนองเดียวกัน สำหรับในแนวแกน y

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \quad (2.34)$$

สำหรับเทอมทางขวามือ ในช่วงเวลา (Time Step) = Δt
กรณีเป็น Forward Difference Approximation ได้

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (2.35)$$

- Backward Difference Approximation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^n - h_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.36)$$

- Central Difference Approximation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.37)$$

จากสมการ (2.35) ซึ่งเป็นกรณีของ Forward Difference Approximation แทนค่าลงในสมการ (2.29) ได้ (Wang and Anderson, 1981, P.69)

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \\ &= \frac{S}{T} \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{Q_{i,j}^n}{T} \end{aligned} \quad (2.38)$$

ให้ $\Delta x = \Delta y = a$ แล้วหาค่า $h_{i,j}^{n+1}$ จะได้

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4T\Delta t}{Sa^2}\right) h_{i,j}^n + \frac{4T\Delta t}{Sa^2} \left(\frac{h_{i+1,j}^n + h_{i-1,j}^n + h_{i,j+1}^n + h_{i,j-1}^n}{4} \right. \\ & \quad \left. + h_{i,j}^n \right) + \frac{Q_{i,j}^n \Delta t}{S} \end{aligned} \quad (2.39)$$

สมการ (2.39) คือสมการที่ใช้สำหรับประมาณค่าระดับน้ำใต้ดิน (head) กรณีการไหลแบบไม่คงตัว ในสองมิติ เมื่อรู้ค่า head ที่ Node และ Nodes รอบๆ ของช่วงเวลาก่อนหน้า

(ค) การแก้ระบบสมการเส้นตรง

สมการ (2.39) เป็นสมการเส้นตรง เรียกว่า Explicit Difference Approximation หรือ Forward Difference Approximation เนื่องจากค่า head สามารถหาได้จากการรู้ค่า h ในช่วงเวลาก่อนหน้าที่ Node รอบๆ (i,j) จากนั้นก็ทำการแก้สมการหาค่าตัวแปร head ได้ และที่จุดอื่นๆแต่ละจุดก็จะมีสมการดังกล่าว 1 สมการ

จากระบบสมการเส้นตรงดังกล่าววิธีการแก้ที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายวิธีหนึ่งคือ Gauss-Seidel Iteration (Hunt, 1983, p.58) ซึ่งแสดงได้โดยการแทนค่าของสมการลงบนแต่ละ Node แล้วสมการทั้งหมดจะถูกแก้โดยพร้อมๆ กันจนได้คำตอบที่เหมาะสมที่สุด สำหรับทุกจุดบนพื้นที่

จากปัญหาที่ประกอบด้วย n สมการจะอยู่ในรูป

$$[A] \{h\} = \{C\} \quad (2.40)$$

วิธี **Gauss-Seidel Iteration** มีวิธีการหาคำตอบดังนี้ ถ้าค่าใน Matrix A (a_{nn}) ในแนวเส้นทะแยงมุมไม่เป็นศูนย์ทั้งหมดแล้ว การหาคำตอบทำได้โดยการสมมุติค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า แล้วแก้สมการให้ได้คำตอบครั้งที่ 1 เรียกเป็น 1 Iteration จากนั้นใช้ค่าที่ได้แทนในสมการเดิมอีก โดยกระทำเช่นเดียวกันเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งค่าที่ได้ไม่มีความแตกต่างกันหรือแตกต่างกันน้อยมาก จึงใช้เป็นคำตอบของสมการ ซึ่งสามารถแสดงวิธีการหาโดยการแก้สมการ ดังตัวอย่าง ดังนี้

$$3h_1 + 2h_3 = 4 \quad (2.41a)$$

$$h_1 + 4h_2 + h_3 = 7 \quad (2.41b)$$

$$h_1 + 2h_2 + 6h_3 = 12 \quad (2.41c)$$

จะเห็นว่าสมการ (2.41) เป็น Diagonal Dominant ซึ่งหมายถึง สมการที่มีค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร ที่เรียงกันเป็นเมตริกซ์ในแนวเส้นทะแยงมุม มีผลบวกของค่าที่เป็นบวกมากกว่า ผลบวกของค่าที่เป็นบวกในแนวนอกเส้นทะแยงมุม จากนั้นเริ่มต้นด้วยการสมมุติค่าตัวแปร h ทุกตัวให้มีค่าเท่ากันหมด เช่นให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$h_1 = h_2 = h_3 = 0 \quad (2.42)$$

แทนค่าลงไปในสมการ (2.41a) เพื่อหาค่า h_1 จะได้

$$h_1 = 4/3 = 1.333 \quad (2.42a)$$

แล้วใช้ $h_1 = 1.333$, $h_3 = 0$ แทนค่าเพื่อหาค่า h_2 จากสมการ (2.41b)

$$h_2 = (7 - 1.333)/4 = 1.417 \quad (2.42b)$$

จากนั้นใช้ค่า $h_1 = 1.333$, $h_2 = 1.417$ แทนลงในสมการ (2.41c) เพื่อหาค่า h_3 ได้

$$h_3 = (12 - 1.333 - 1.417) / 6 = 1.542 \quad (2.42c)$$

ดังนั้น จะได้ค่าโดยประมาณของ $(h_1, h_2, h_3) = (1.333, 1.417, 1.542)$

ซึ่งเรียกว่าครบ 1 Iteration

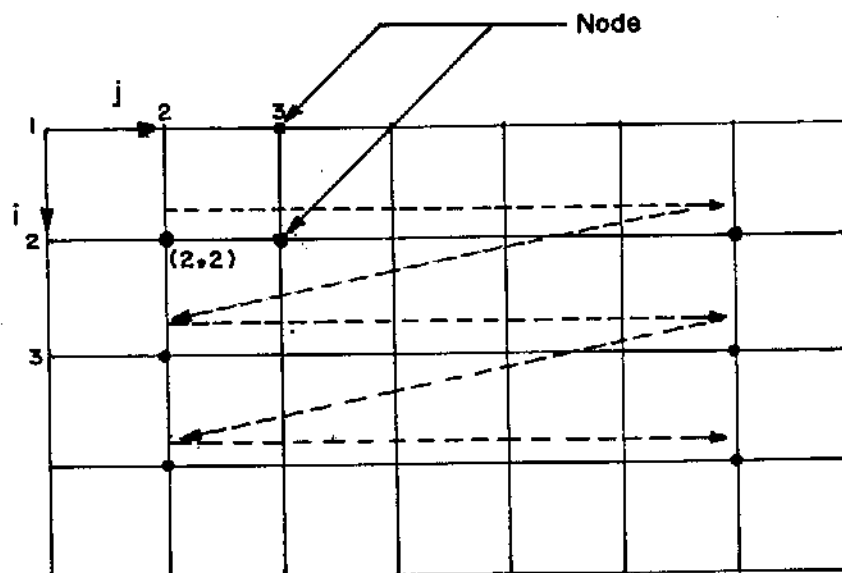
จากนั้นนำเอาค่าที่ได้ไปหาค่า h_1, h_2, h_3 ตามขั้นตอนเดียวกันอีกจะได้ค่า h ใหม่ในรอบที่ 2 เป็น

$$h_1 = 0.305 \quad (2.43a)$$

$$h_2 = 1.288 \quad (2.43b)$$

$$h_3 = 1.520 \quad (2.43c)$$

แล้วกระทำโดยวิธีดังกล่าวนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งค่าที่ได้จากการคำนวณ ในแต่ละ Iteration มีค่าแตกต่างกันไม่เกินค่าที่กำหนดไว้หรือค่าที่ยอมให้ จึงใช้เป็นคำตอบของสมการ



ภาพที่ 2.5 ลักษณะการสร้างสมการพีชคณิตของ Internal Nodes

การสร้างสมการของ Internal Node จะมีการคำนวณตามแนว Grid อย่างเป็นระเบียบดัง ภาพที่ 2.3 คือเริ่มจากจุด (2,2) เคลื่อนจากซ้ายไปขวา และเลื่อนมาทุกๆ บรรทัดตามลำดับ ซึ่งในการคำนวณแต่ละครั้งจะได้ค่าใหม่ 2 ค่า มาใช้ใน Iteration ใหม่ทุกครั้ง แสดงได้โดยสูตร (Wang and Anderson, 1982, p.26)

$$h_{i,j}^{m+1} = \frac{h_{i-1,j}^{m+1} + h_{i,j-1}^{m+1} + h_{i+1,j}^m + h_{i,j+1}^m}{4} \quad (2.44)$$

โดยที่

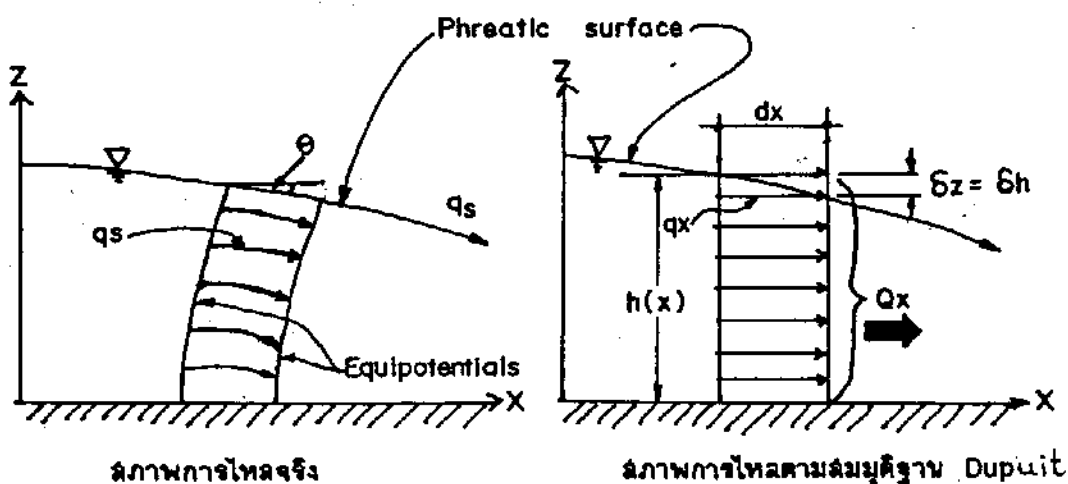
- $h_{i,j}$ = ค่า head ที่จุดที่ต้องการทราบ
 m = จำนวนครั้งของ Iteration ที่กำลังทำ

2.4 การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการทำนายสภาพการไหลของน้ำใต้ดิน

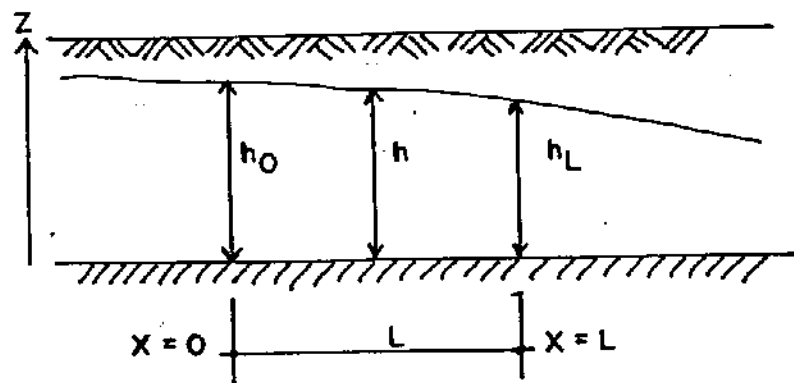
2.4.1 Dupuit-Forchheimer Assumption

Dupuit ได้กล่าวถึงสภาพการไหลของน้ำใต้ดินแบบคงตัวในชั้นอุ้มน้ำแบบเปิด (Steady-State Flow in Unconfined Aquifers) ซึ่งมีการไหลเป็นแบบผิวน้ำอิสระ (Free-Surface Flow) โดยมีความดันเท่ากับความดันบรรยากาศ เนื่องจากเส้นแสดงการไหลของผิวน้ำอิสระจะมีการเปลี่ยนแปลงและไม่ทราบค่า ทำให้การแก้สมการการไหลมีความยุ่งยากเพราะรูปแบบของสมการ Differential เป็นสมการไม่เชิงเส้น (Non-Linear Equation) ซึ่งไม่สามารถแก้ได้โดยใช้สูตรความล้มพันธ์อย่างง่าย (Analytical) Dupuit จึงได้เสนอวิธีการแก้สมการดังกล่าว และปรับปรุงโดย Forchheimer โดยมีข้อสมมุติฐาน ดังนี้ (Bear, 1979, p.361)

1. เส้นการไหล (Flow Lines) อยู่ในแนวราบ
2. ความเร็วของการไหลแปรผันโดยตรงกับเส้นความลาดชันศาสตร์ (Hydraulic Gradient)



ภาพที่ 2.6 สภาพการไหลในชั้นอุ้มน้ำแบบเปิด (Unconfined Aquifers)



ภาพที่ 2.7 การไหลแบบผิวนอิสระเมื่อชั้นหินน้ำอยู่ในแนวราบ

จากสมการการไหลของน้ำใต้ดินแบบคงตัวในทิศทางเดียวและไม่มี Source หรือ Sink โดยมี
การไหลเฉพาะทิศทาง x

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x h \frac{\partial h}{\partial x}) = 0 \quad (2.45)$$

หรือ
$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 0 \quad (3.46)$$

By Integration จะได้

$$h^2 = C_1 x + C_2 \quad (2.47)$$

พิจารณาที่สภาพขอบเขต (Boundary Condition) ตามภาพที่ 2.7

$$x = 0, h = h_0$$

และ $x = L, h = h_L$ จะได้

$$C_2 = h_0^2$$

$$C_1 = (h_L^2 - h_0^2)/L$$

แทนค่า C_1, C_2 ลงในสมการ (2.47)

$$h^2 = (h_L^2 - h_0^2)x/L + h_0^2$$

จัดรูปใหม่

$$h = \sqrt{h_0^2 - (h_0^2 - h_L^2) \frac{x}{L}} \quad (2.48)$$

จากกฎของดาร์ซี (Darcy's Law)

$$V_x = -K \frac{\partial h}{\partial x}$$

ดังนั้น อัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วยความกว้าง $Q = -Kh \frac{\partial h}{\partial x}$ (2.49)

แทนค่า h จากสมการ (2.48) ลงในสมการ(2.49) และโดยการ Differential แล้วจะได้

$$Q = K (h_0^2 - h_L^2) / 2L \quad (2.50)$$

ซึ่งสมการ(2.50) เรียกว่า "Dupuit-Forchheimer Discharge Formular"

2.4.2 SWIFT Models

SWIFT Models เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นโดย Sandia National Laboratories เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ (Analysis) การจำลองสภาพ (Simulation) ปัญหาขบวนการต่าง ๆ ดังนี้ (Ward, Harrover, et al., 1993)

1. การไหลของน้ำใต้ดิน (Fluid Flow)
2. การนำพาความร้อน (Heat Transport)
3. การเคลื่อนตัวของน้ำเค็ม (Brine Migration)
4. Radionuclide-chain Transport

แบบจำลองนี้สามารถใช้ได้กับการไหลของน้ำใต้ดิน ในชั้นหินแตก (Fracture Media) และตัวกลางพรุน (Porous Media) รวมทั้งการไหลของน้ำใต้ดิน ในชั้นอุ้มน้ำแบบปิด (Confined Aquifers) และชั้นอุ้มน้ำแบบเปิด (Unconfined Aquifers)

SWIFT Models ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาทั้งหมด 5 Models ได้แก่ SWIFT , SWIFT II, SWIFT III, SWIFT/386, SWIFT/486 โดยโปรแกรมที่เขียนเป็นภาษา FORTRAN 77 ใช้ Compiler ของ University of Salford สามารถใช้จำลองสภาพการไหลของน้ำใต้ดินทั้ง 1 มิติ 2 มิติ และ 3 มิติ ทั้งแบบคงตัวและไม่คงตัว โดยวิธี Finite Difference

องค์ประกอบของโปรแกรม

SWIFT/486 ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (Main Program) และโปรแกรมน้อย (Sub-routine) หลายโปรแกรม นอกจากนี้ยังมีโปรแกรมช่วยงานอีก เช่น UNSWIFT ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ใช้เปลี่ยน Output file จาก SWIFT ไปเป็น Input file สำหรับโปรแกรม SURFER เพื่อแสดงเส้นชั้นความสูง (Contour) ของตัวแปรที่ต้องการ และนอกจากนี้ ยังสามารถให้โปรแกรม STLINE แสดงเส้น Streamlines ของปัญหาจาก Output file ของ SWIFT ได้อีกด้วย

ขั้นตอนการทำงานของ SWIFT Models

1. เตรียมข้อมูล
2. Run โปรแกรม
3. การแสดงผลการวิเคราะห์
4. เปรียบเทียบผลจากแบบจำลอง กับข้อมูลจริงในสนาม

2.4.3 MODFLOW Models Processing MODFLOW

ขบวนการของ MODFLOW (Processing MODFLOW) เป็นแบบจำลองที่พัฒนาโดย Wen-Hsing Chaing และ Wolfgang Kinzelbach ใช้ในการทำนายสภาพการไหลของน้ำใต้ดิน Processing MODFLOW ประกอบไปด้วย 4 ขั้นตอน คือ (Scientific Software Group, 1993)

- Modelling
- Simulation
- Analysis
- Data Control

MODFLOW^{EM}

พัฒนาโดย Micheal G. Mc Donald และ Arlen W. Harbaugh เป็นแบบจำลองที่ถูกพัฒนาขึ้นมาใช้สำหรับทำนายสภาพการไหลของน้ำใต้ดินใน 3 มิติโดยวิธี Finite Difference ใช้ได้ทั้งสภาพการไหลแบบคงตัวและแบบไม่คงตัวในชั้นอุ้มน้ำทั้งแบบปิด (Confined Aquifers) และแบบเปิด (Unconfined Aquifers)

MODFLOW^{EM} เป็นการพัฒนาเวอร์ชันล่าสุดของ MODFLOW Models ซึ่งได้รวม Packages ต่างๆไว้มากมายเช่น BCF2, Streamflow Routing Package (STR 1) และเวอร์ชันล่าสุดของ Preconditioned Conjugate Gradient Solver (PCG 2) และใน MODFLOW^{EM} ยังได้รวมโปรแกรม ZONE BUDGET ซึ่งใช้สำหรับการคำนวณสมดุลน้ำในการจำลองสภาพปัญหา (Simulation) ของแบบจำลองน้ำใต้ดินในพื้นที่ที่ต้องการ ซึ่งมีประโยชน์มากในการทำนายการไหลเข้าบ่อ การไหลลงสู่แม่น้ำ หรือการไหลระหว่างชั้น (Layer to Layer)

นอกจากนี้ในโปรแกรมยังสามารถเพิ่ม Model head และ Drawdown files ลงใน Package ได้ และยังสามารถใช้กับโปรแกรม Lotus 1-2-3, MODGRAF^{EM} และ SURFER and Graphics Packages ในการแสดงผล (Scientific Software Group, 1993)

2.4.4 FLONET

FLONET (1993) เป็นแบบจำลองการไหลของน้ำใต้ดิน สำหรับการไหลแบบคงตัวใน 2 มิติ สามารถคำนวณศักยภาพการไหล เส้นการไหลและความเร็วของการไหลน้ำใต้ดินในแนวตั้งในชั้นอุ้มน้ำแบบเปิด และแบบปิด แบบจำลองนี้มีพื้นฐานการคำนวณมาจากการจำลอง ทั้งสภาพการไหลและความต่างศักย์ ซึ่งพัฒนาโดย Dr. E. Frind แห่งมหาวิทยาลัยวอเตอร์ลู (University of Waterloo) คุณสมบัติของแบบจำลอง (IGWMC, 1994)

- ใช้ได้กับสภาพการไหลผ่านตัวกลางพรุนที่เป็นทั้ง Heterogeneous และ Anisotropic
- สภาพพื้นที่ที่มีขอบเขตซับซ้อนและมีรูปแบบต่างๆ (Complex Boundary Condition)
- ใช้ในพื้นที่ที่มี Recharge Rate ต่างๆ
- สำหรับกรณีในชั้นอุ้มน้ำแบบเปิดสามารถคำนวณหาค่าระดับ Water Table ได้โดยวิธี Iteration Method
- การแบ่งกริด หรือ Nodes สามารถแบ่งได้โดยอัตโนมัติ
- การหาผลเฉลยของสมการ Governing Equation และ Boundary Condition ใช้วิธี Finite Element

2.4.5 FLOWCAD (1993)

FLOWCAD เป็นแบบจำลองสภาพการไหลของน้ำใต้ดินแบบไม่คงตัวใน 2 มิติโดยวิธี Finite Difference ใช้สำหรับคำนวณค่าระดับน้ำใต้ดิน (Hydraulic Head) ระดับน้ำลด (Drawdown) และงบประมาณน้ำในแต่ละช่วงเวลา

คุณสมบัติของแบบจำลอง (IGWMC,1994)

- ใช้ได้ทั้งชั้นอุ้มน้ำแบบปิด (Confined) แบบกึ่งปิดและรั่วซึม (Leaky) และแบบเปิด (Unconfined Aquifers) สำหรับชนิดของตัวกลางที่เป็นแบบ Heterogeneous และ Anisotropic
- ใช้สำหรับพื้นที่ที่มี Boundary Condition ที่มีค่าระดับคงที่ (Constant Head) ไม่มีการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเข้าออก (Constant Flux) และไม่มีการไหลตามเส้นขอบเขต (No flow along Boundary)
- ใช้ได้กับพื้นที่ที่มีบ่อสูบเข้าหรือสูบออก รวมทั้งอัตราการคายระเหย โดยสามารถใช้กับบ่อในขณะที่มีการสูบแต่ละช่วงเวลาด้วย
- ใช้ได้กับชั้นอุ้มน้ำที่เป็นแบบกึ่งปิดและรั่วซึมที่มีอัตราการแลกเปลี่ยนปริมาณน้ำ ระหว่างน้ำใต้ดินกับน้ำผิวดิน

2.4.6 FLOWPATH (1994)

FLOWPATH เป็นแบบจำลองสภาพการไหลของน้ำใต้ดิน การไหลแบบคงตัวใน 2 มิติโดยวิธี Finite Difference ใช้สำหรับทำนายค่าระดับน้ำใต้ดิน (head) ความเร็วการไหล เวลาที่สัมพันธ์กับแนวการไหล งบประมาณน้ำและระดับน้ำลดคงที่

คุณสมบัติของแบบจำลอง (IGWMC,1994)

- ใช้ได้ทั้งชั้นอุ้มน้ำแบบปิด (Confined) แบบกึ่งปิดและรั่วซึม (Leaky) และแบบเปิด (Unconfined Aquifers)
- ใช้ได้กับตัวกลางที่เป็นแบบ Heterogeneous และ Anisotropic
- ใช้สำหรับพื้นที่ที่มี Boundary Condition ที่ไม่มีการไหลตามเส้นขอบเขต ไม่มีการเปลี่ยนแปลงปริมาณน้ำ และมีค่าระดับน้ำลดคงที่
- ใช้ได้กับพื้นที่ที่มีบ่อสูบเข้าหรือสูบออก รวมทั้งอัตราการคายระเหย โดยสามารถใช้กับบ่อในขณะที่มีการสูบแต่ละช่วงเวลาด้วย
- ใช้ได้กับชั้นอุ้มน้ำที่เป็นแบบกึ่งปิดและรั่วซึมที่มีอัตราการแลกเปลี่ยนปริมาณน้ำ ระหว่างน้ำใต้ดินกับน้ำผิวดิน