

บทที่ 2

การวิเคราะห์โครงสร้างมัลติบีม โดยวิธีการเปลี่ยนตำแหน่ง

2.1 หลักการและสมมติฐานเบื้องต้น

2.1.1 หลักการของการวิเคราะห์

จุดมุ่งหมายในการวิเคราะห์โครงสร้างมัลติบีม ก็เพื่อต้องการทราบแรงและการกระจัดของคานและข้อต่อ โดยใช้สมมติฐานว่าเป็นวัสดุที่เป็นอีลาสติกในแนวตามยาวของคาน แนวตั้งด้านข้างและการหมุน ส่วนน้ำหนักที่กระทำกับโครงสร้างจะใช้เทคนิคของฮาร์โมนิก (Harmonics) ซึ่งน้ำหนักนี้จะถูกกระจายออกเป็นพจน์ของอนุกรม (Fourier) ผลลัพธ์ของแต่ละพจน์ที่ถูกน้ำหนักของแต่ละพจน์ที่กระทำจะถูกรวมเป็นผลลัพธ์สุดท้าย ซึ่งจะต้องเท่ากับผลลัพธ์ที่ถูกน้ำหนักทั้งหมดกระทำ

น้ำหนักที่กระทำบนโครงสร้างจะถูกสมมติเป็นจุดหรือเป็นพื้นที่เล็ก ๆ ในแนวตั้งแรงและการกระจัดแต่ละพจน์ของน้ำหนักจะถูกแสดงในฟังก์ชันของ Sine และ Cosine ดังนี้

แรงและการกระจัดในแนวตามยาวของคาน คือ $\cos \alpha x$

แรงและการกระจัดในแนวตั้ง ด้านข้าง และการหมุน คือ $\sin \alpha x$

การพิจารณาข้อต่อจะพิจารณาเป็นจุด ซึ่งจะมีฟังก์ชันของแรงและการกระจัดเดียวในการเปลี่ยนแปลงถ้าสภาวะสมดุล และการเข้ากันได้ในเรขาคณิตสามารถพิจารณาเป็นจุดได้ จุดนั้นถือว่าเป็นตัวแทนของข้อต่อตลอดความยาวคาน

พิจารณาโครงสร้างมัลติบีมที่มีข้อต่อเป็นตัวยาน้ำหนักดัง ภาพที่ 2.1 เมื่อคานมีความแข็งแรง (Rigidity) การเคลื่อนที่ของข้อต่อทั้งสองข้างของคานแต่ละข้างจะมีความสัมพันธ์ที่คงที่ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีและสมมติฐานของโครงสร้างมัลติบีมที่จะกล่าวต่อไป

2.1.2 สมมติฐานเบื้องต้นในการวิเคราะห์

ก. วัสดุที่ใช้เป็นข้อต่อและคานจะต้องเป็นไปตามกฎของฮุก (Hooke's law)

ข. การโก่งตัวของคานเป็นไปตามทฤษฎีของคานธรรมดา (Simple Beam Theory)

ค. การบิดตัวของคานเป็นไปตามทฤษฎีของเซนต์เวอร์นองต์

(St. Venant Torsion Theory)

ง. การยืดหดตัวของคานเป็นไปตามทฤษฎีการยืดหดตัวของแท่งอย่างง่าย

(Simple Bar Theory)

จ. โครงสร้างมีจุดรองรับที่ปลายทั้งสองข้าง และมีความเกร็ง (Rigidity)

2.2 สติฟเนสของคาน (Beam Stiffnesses)

2.2.1 การพิจารณาสติฟเนสของคาน

แกน x , y , z และ ϕ มีจุดกำเนิดอยู่ที่เซนตริคทรอยด์ของหน้าตัดคานพิจารณาความยาวขนาด dx ในภาพที่ 2.2 หัวลูกศรจะแสดงทิศทางเป็นบวกของแรงและการกระจัดที่กระทำกับคาน

จากทฤษฎีของคานสมการของแรงและการกระจัดสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ตามแกน } x \quad p_x &= -EA \frac{d^2u}{dx^2} \\ \text{ตามแกน } y \quad p_y &= EI_z \frac{d^4v}{dx^4} \\ \text{ตามแกน } z \quad p_z &= EI_y \frac{d^4w}{dx^4} \\ \text{ตามแกน } \phi \quad p_\phi &= -GJ \frac{d^2\phi}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

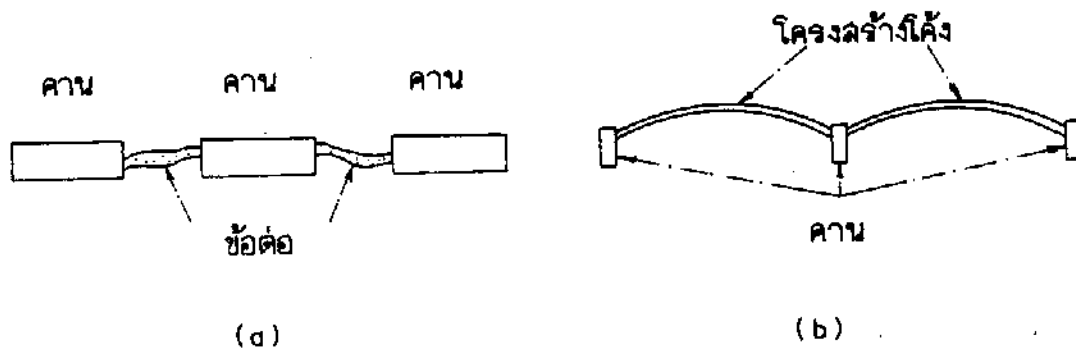
เมื่อ p_x , p_y , p_z และ p_ϕ เป็นแรงต่อหน่วยความยาวที่เซนตริคทรอยด์ในแกน x , y , z และ ϕ

u , v , w , ϕ เป็นการกระจัดที่เซนตริคทรอยด์ในแกน x , y , z และ ϕ

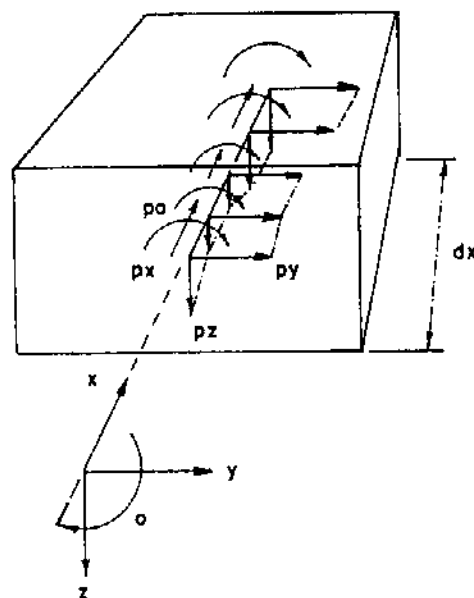
สรุป

$$\begin{aligned} u(x) &= U \cos \alpha x & p_x(x) &= P_x \cos \alpha x \\ v(x) &= V \sin \alpha x & p_y(x) &= P_y \sin \alpha x \\ w(x) &= W \sin \alpha x & p_z(x) &= P_z \sin \alpha x \\ \phi(x) &= \phi \sin \alpha x & p_\phi(x) &= P_\phi \sin \alpha x \end{aligned} \quad (2.2)$$

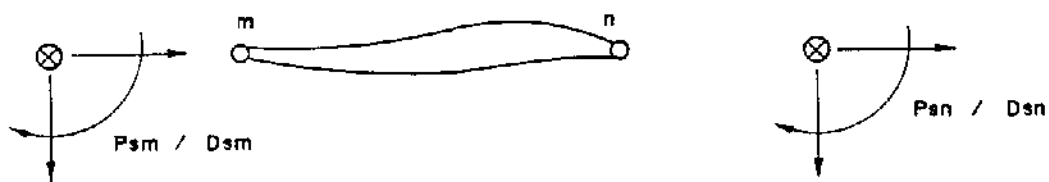
เมื่อ U , V , W และ ϕ คือ ขนาดที่สัมพันธ์กับการกระจัด P_x , P_y , P_z และ P_ϕ คือ ขนาดที่สัมพันธ์กับแรง



ภาพที่ 2.1 ภาพโครงล้า้งโค้งโครงล้า้งมัลติบีม



ภาพที่ 2.2 ภาพแสดงแรงและการกระจัดที่หน้าตัดคานในทิศทางบวก



ภาพที่ 2.3 ภาพแสดงแรงและการกระจัดของข้อต่อในทิศทางบวก

2.2.2 การพิจารณาสภาวะขอบเขต (Boundary Condition)

v, w, ϕ และ $p_y, p_z, p_o = 0$ ที่จุดรองรับ และ $u, P_x = 0$ ที่กึ่งกลางความยาวของคาน

เมื่อแทนค่า $u, v, w, \phi, P_x, P_y, P_z$ และ P_o จากสมการ 2.2 ลงในสมการ 2.1

$$\text{จะได้ } P_x = EA \propto^2 U$$

$$P_y = EI_z \propto^4 V$$

$$P_z = EI_y \propto^4 W$$

$$P_o = GJ \propto^2 \phi$$

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA \propto^2 & & & \text{Zeros} \\ & EI_z \propto^4 & & \\ & & EI_y \propto^4 & \\ \text{Zeros} & & & GJ \propto^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

หรือ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $\{P_b\} = [k_b] \{D_b\}$

เมื่อ $[k_b]$ คือ เมตริกซ์สติฟเนสของคาน

2.3 สติฟเนสของข้อต่อ (Shear Connector Stiffnesses)

ข้อต่อจะพิจารณาเป็นโครงสร้างชิ้นหนึ่งซึ่งมีทิศทางเป็นบวกทั้ง 4 ทิศทางดังภาพที่ 2.3 และแรงกับการกระจัดก็จะอยู่ในรูปของ $\sin \alpha x$ และ $\cos \alpha x$ เช่นเดียวกับคานและสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_{sm} \\ P_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{mm}] & [k_{mn}] \\ [k_{nm}] & [k_{nn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{sm} \\ D_{sn} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

หรือ $\{P_s\} = [k_s] \{D_s\}$

เมื่อ $4(P_{sm})^1$ และ $4(P_{sn})^1$ คือ แรงของข้อต่อด้านซ้ายและขวามือ

$4(D_{sm})^1$ และ $4(D_{sn})^1$ คือ การกระจัดของข้อต่อด้านซ้ายและขวามือ

$g[k_s]^B$ คือ เมตริกซ์สติเฟเนสของข้อต่อซึ่งประกอบด้วย $(k_{nn})^4$,
 $4(k_{nn})^4$, $4(k_{nn})^4$ และ $4(k_{nn})^4$

(A) B เมื่อ A คือจำนวนแถว ; B คือจำนวนหลัก)

เมื่อ $[k_s]$ คือ เมตริกซ์สติเฟเนสของข้อต่อที่จะใช้ในการเปลี่ยนตำแหน่ง
 (Transformation) ของแรงและการกระจัดไปที่เซนต์ทรอยด์ของคานที่อยู่ติดกัน

2.3.1 การเปลี่ยนตำแหน่งของแรงและการกระจัด

พิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งของการกระจัดจากจุดที่ 1 ไปจุดที่ 2 ดังภาพที่ 2.4(a)
 นี่เป็นหลักการการเปลี่ยนตำแหน่งของการกระจัดจากจุดกำเนิดไปสู่หน้าตัดของคานที่พิจารณา
 โดยหาความสัมพันธ์ของการกระจัดที่จุดที่ 1 และ จุดที่ 2 ซึ่งอยู่ในรูปฟังก์ชัน $\sin \alpha x$ และ $\cos \alpha x$
 และจากทฤษฎีของคาน เมตริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่งสามารถเขียนได้ดังนี้

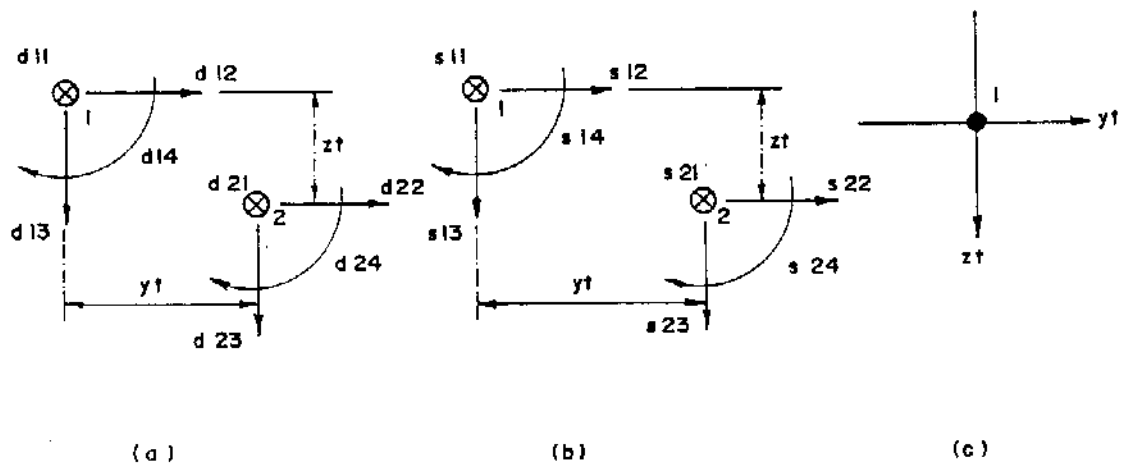
$$\begin{bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \\ d_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha y_t & -\alpha z_t & 0 \\ & 1 & 0 & -z_t \\ & & 1 & y_t \\ \text{Zeros} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

หรือ $\{d_2\} = [g] \{d_1\}$

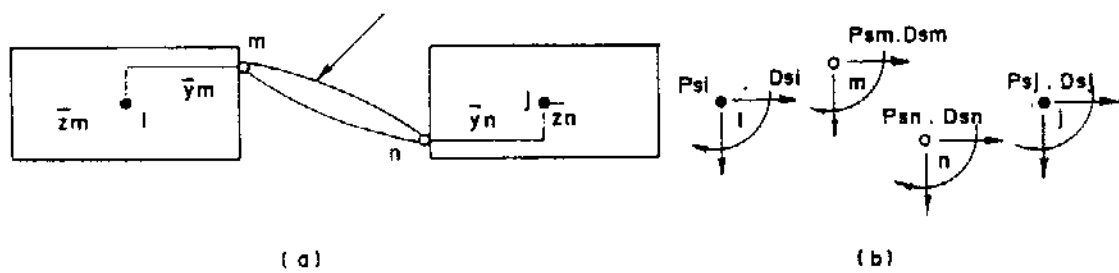
เมื่อ $[g]$ คือ เมตริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่งของการกระจัด $\{d_1\}$ และ $\{d_2\}$ คือ
 ขนาดของการกระจัดที่จุดที่ 1 และ 2

ในทำนองเดียวกันแรงที่จุดที่ 1 สามารถหาความสัมพันธ์กับจุดที่ 2 ดังภาพที่ 2.4(b)
 ได้ซึ่งสามารถเขียนสมการที่จุดที่ 2 ได้ดังนี้

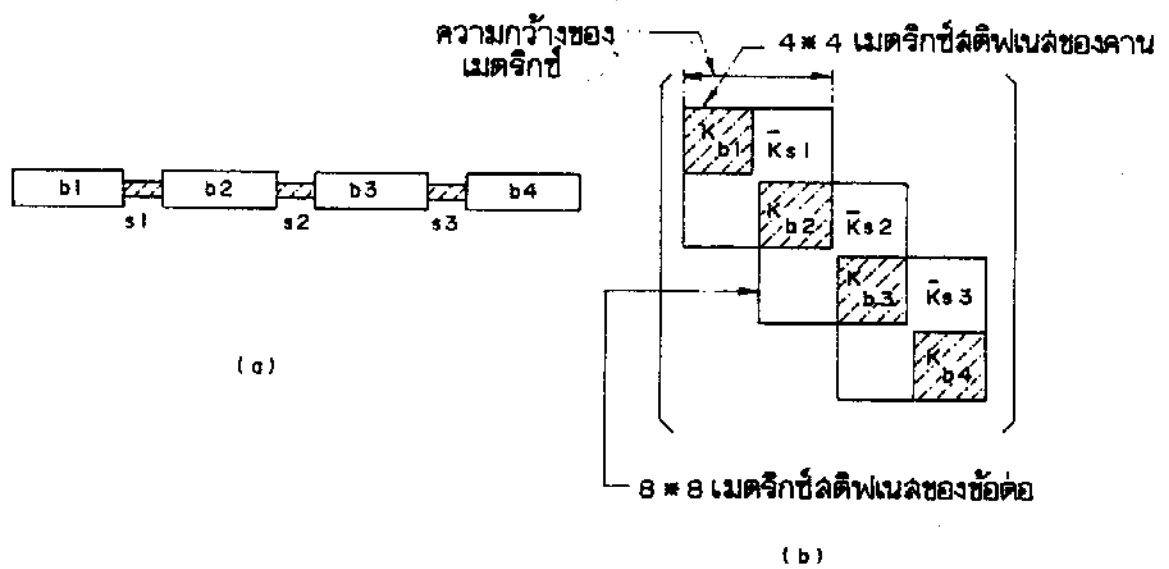
$$\begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \\ s_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \text{Zeros} \\ \alpha y_t & 1 & & \\ \alpha z_t & 0 & 1 & \\ 0 & z_t & -y_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \\ s_{14} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$



ภาพที่ 2.4 ภาพแสดงแนวการเปลี่ยนตำแหน่งของแรงและการกระจัดในทิศทางบวก



ภาพที่ 2.5 ภาพแสดงภาพจำลองของคานสองตัวที่ถูกยึดด้วยข้อต่อ



ภาพที่ 2.6 ภาพแสดงการรวมสติฟเนลของโครงสร้างมัลติบีม

หรือ $\{s_2\} = [b] \{s_1\}$

$[b]$ คือ เมทริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่งของแรง

$\{s_1\}$ และ $\{s_2\}$ คือ ขนาดของแรงที่จุดที่ 1 และที่ 2

y_t และ z_t คือ ระยะระหว่างจุดที่ 1 และจุดที่ 2 ซึ่งมีจุดกำเนิดและทิศทางของเครื่องหมายดังภาพที่ 2.4(c)

พิจารณาสมการ 2.5 และสมการ 2.6 จะเห็นได้ว่า

$$[g]^{-1} = [b]^T \quad (2.7)$$

2.3.2 การพิจารณาสติพเนสของข้อต่อ

พิจารณาคานสองตัวที่ถูกยึดด้วยข้อต่อดังในภาพที่ 2.5(a) แรงและการกระจัดสามารถแสดงด้วยภาพจำลองได้ดังในภาพที่ 2.5(b)

เมื่อต้องการเปลี่ยนตำแหน่งของแรงที่ข้อต่อไปที่เซนส์ทรอยด์ของคานทั้งสองตัวโดยพิจารณาจากสมการ 2.6 สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\{P_{si}\} = [b_{mi}] \{P_{sm}\}$$

$$\{P_{sj}\} = [b_{nj}] \{P_{sn}\}$$

และเมื่อรวมสมการการเปลี่ยนตำแหน่งของคานทั้งสองตัวเข้าด้วยกันสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_{si} \\ P_{sj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{mi} & 0 \\ 0 & b_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{sm} \\ P_{sn} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อต้องการเปลี่ยนตำแหน่งของการกระจัดที่ข้อต่อไปอยู่ที่เซนส์ทรอยด์ ของคานทั้งสองตัวโดยพิจารณาจากสมการ 2.5 สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\{D_{sm}\} = [g_{mi}]^{-1} \{D_{si}\}$$

$$\{D_{sn}\} = [g_{nj}]^{-1} \{D_{sj}\}$$

สามารถรวมกันได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} D_{sm} \\ D_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{mi}^{-1} & 0 \\ 0 & g_{nj}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{si} \\ D_{sj} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

และจากสมการ 2.4 , 2.8 และ 2.9 จะได้

$$\begin{bmatrix} P_{si} \\ P_{sj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{mi} & 0 \\ 0 & b_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{mm} & k_{mn} \\ k_{nm} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{mi}^{-1} & 0 \\ 0 & g_{nj}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{si} \\ D_{sj} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

โดย $[b_{mi}]$ และ $[b_{nj}]$ คือ เมตริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่งของแรงจากจุด m ไปจุด i และจากจุด n ไปจุด j

$[g_{mi}]$ และ $[g_{nj}]$ คือ เมตริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่งของการกระจัดจากจุด m ไปจุด i และจากจุด n ไปจุด j

$$\text{เมื่อ} \quad [a] = [g]^{-1} \quad (2.11)$$

และจากสมการ 2.7 จะได้

$$[a] = [b]^T \quad \text{หรือ} \quad [a]^T = [b]$$

จากสมการ 2.10 สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_{si} \\ P_{sj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{mi}^T & 0 \\ 0 & a_{nj}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{mm} & k_{mn} \\ k_{nm} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mi} & 0 \\ 0 & a_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{si} \\ D_{sj} \end{bmatrix}$$

$$\text{หรือ} \quad \{P_S\} = [a]^T [k_S] [a] \{D_S\} \quad (2.12)$$

เมื่อ $[a]$ คือ เมตริกซ์แปลงการเปลี่ยนตำแหน่ง

$$\text{หรือ} \quad \{P_S\} = [\bar{K}_S] \{D_S\}$$

เมื่อ $[\bar{K}_S]$ คือ สติฟเนสของข้อต่อ

$$[\bar{K}_S] = [a]^T [k_S] [a] \quad (2.13)$$

ทิศทางที่ใช้ในการบอกแกนพิกัดของข้อต่อคือ $\bar{x}$ จะเป็นบวก เมื่อจุด m อยู่ด้านขวามือของจุด i ดังรูป 2.5(a) และ จุด n อยู่ทางด้านซ้ายมือของจุด j

$\bar{z}$ จะเป็นบวกเมื่อจุดของข้อต่ออยู่เหนือเซนตทรอยด์ของคาน ดังนั้น $[a_{mi}]$ และ $[a_{nj}]$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$[a_{mi}] = \begin{bmatrix} 1 & -\infty \bar{y}_m & -\infty \bar{z}_m & 0 \\ & 1 & 0 & \bar{z}_m \\ & & 1 & \bar{y}_m \\ \text{Zeros} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$[a_{ni}] = \begin{bmatrix} 1 & -\infty \bar{y}_n & -\infty \bar{z}_n & 0 \\ & 1 & 0 & \bar{z}_n \\ & & 1 & -\bar{y}_n \\ \text{Zeros} & & & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\bar{y}_m, \bar{z}_m$ และ $\bar{y}_n, \bar{z}_n$ เป็นระยะของการเปลี่ยนตำแหน่งของจุด m และ n

2.4 เมตริกซ์ของสติฟเนสของโครงสร้าง [K]

พิจารณาโครงสร้างในภาพที่ 2.6(a) เมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างสามารถรวมกันได้โดยตรงจากสติฟเนสข้อต่อและคานดังภาพที่ 2.6(b) ซึ่งมีขนาดของเมตริกซ์คือ $4N \times 4N$ เมื่อ N คือจำนวนของคานในโครงสร้างนั้น

2.5 สมมติฐานของข้อต่อ

การวิเคราะห์โดยวิธีการเปลี่ยนตำแหน่งเป็นที่ยอมรับมาก และเป็นวิธีที่สามารถวิเคราะห์คานมัลติบีมได้ โดยเลือกสติฟเนสของข้อต่อได้ตามสมมติฐานต่าง ๆ ในส่วนนี้จะนำเสนอชนิดของข้อต่อและการประยุกต์ดังต่อไปนี้

เมื่อเมตริกซ์สติฟเนสของข้อต่อสมมาตรสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_{s1} \\ P_{s2} \\ P_{s3} \\ P_{s4} \\ P_{s5} \\ P_{s6} \\ P_{s7} \\ P_{s8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ & & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ & \text{Symmetric} & & & & & k_{77} & k_{78} \\ & & & & & & & k_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{s1} \\ D_{s2} \\ D_{s3} \\ D_{s4} \\ D_{s5} \\ D_{s6} \\ D_{s7} \\ D_{s8} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.5.1 ข้อต่อแบบสปริง (Spring Type Shear Connectors)

ข้อต่อแบบสปริงจะพิจารณาแบบระบบของสปริง ซึ่งแสดงอยู่ในสมการเมตริกซ์ที่มีตัวแปรอยู่ 4 ทิศทางที่สามารถกำหนดค่าได้ตามพฤติกรรมของข้อตอดังนี้

$$[k_s] = \begin{bmatrix} k_x & & & & -k_x & & & \\ & k_y & & & & -k_y & & \\ & & k_z & & & & -k_z & \\ & & & k_o & & & & -k_o \\ & -k_x & & & k_x & & & \\ & & -k_y & & & k_y & & \\ & & & -k_z & & & k_z & \\ & & & & -k_o & & & k_o \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

เมื่อ k_x , k_y , k_z และ k_o คือ สติฟเนสในทิศทาง x , y , z และ o

สมการ 2.15 เป็นเมตริกซ์สติฟเนสของข้อต่อโดยทั่วไปจากสมการ 2.13 และ 2.14 สามารถเปลี่ยนเป็นเมตริกซ์สติฟเนสแบบสปริงของข้อต่อ $[k_s]$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
k_{11} &= k_x & k_{12} &= -\alpha \bar{y}_m k_x & k_{13} &= \alpha \bar{z}_m k_x \\
k_{14} &= 0 & k_{15} &= -k_x & k_{16} &= -\alpha \bar{y}_n k_x \\
k_{17} &= -\alpha \bar{z}_n k_x & k_{18} &= 0 & & \\
k_{22} &= (\alpha \bar{y}_m)^2 k_x + k_y & k_{23} &= -\alpha^2 \bar{y}_m \bar{z}_m k_x & k_{24} &= \bar{z}_m k_y \\
k_{25} &= -k_{12} & k_{26} &= \alpha^2 \bar{y}_m \bar{y}_n k_x - k_y & k_{27} &= \alpha^2 \bar{y}_m \bar{z}_n k_x \\
k_{28} &= -\bar{z}_n k_y & & & & \\
k_{33} &= (\alpha \bar{z}_m)^2 k_x + k_z & k_{34} &= \bar{y}_m k_z & k_{35} &= -k_{13} \\
k_{36} &= -\alpha^2 \bar{y}_n \bar{z}_m k_x & k_{37} &= -\alpha^2 \bar{z}_m \bar{z}_n k_x - k_z & k_{38} &= \bar{y}_n k_z \\
k_{44} &= \bar{z}_m^2 k_y + \bar{y}_m^2 k_z + k_o & k_{45} &= 0 & k_{46} &= -k_{24} \\
k_{47} &= -k_{34} & k_{48} &= -\bar{z}_m \bar{z}_n k_y + \bar{y}_m \bar{y}_n k_z - k_o & & \\
k_{55} &= k_x & k_{56} &= -k_{16} & k_{57} &= -k_{17} \\
k_{58} &= 0 & & & & \\
k_{66} &= (\alpha \bar{y}_n)^2 k_x + k_y & k_{67} &= \alpha^2 \bar{y}_n \bar{z}_n k_x & k_{68} &= -k_{28} \\
k_{77} &= (\alpha \bar{z}_n)^2 k_x + k_z & k_{78} &= -k_{38} & & \\
88 &= \bar{z}_n^2 k_y + \bar{y}_n^2 k_z + k_o & & & &
\end{aligned}$$

ข้อต่อแบบสปริงนี้สามารถกำหนดค่าของสติฟเนสได้ตั้งแต่ 0 (ข้อต่อไม่สามารถรับแรงได้ หรือไม่มีข้อต่อระหว่างคาน) ถึง ∞ (ข้อต่อสามารถรับแรงได้มากจนเหมือนเป็นคานตัวเดียวกัน) ซึ่งเป็นข้อได้เปรียบของข้อต่อชนิดนี้

ข้อต่อแบบสปริงแสดงอยู่ในภาพที่ 2.7(a) ซึ่งสามารถตั้งสมมุติฐานให้เป็น จุดหมุนโดยสามารถประมาณค่าของสติฟเนสได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
k_x &\rightarrow \infty \text{ หรือ } 0 \\
k_y &\rightarrow \infty \\
k_z &\rightarrow \infty \\
k_o &\rightarrow 0
\end{aligned}$$

2.5.2 ข้อต่อแบบแผ่น (Plate Type Shear Connector)

ข้อต่อแบบแผ่นนี้จะมีค่าสติฟเนสเป็น Folded Plate โดยถูกนำเสนอโดย De Fries-Skene and Scordellis สติฟเนสของแผ่นเรียบกับการดัดจะถูกพิจารณาแยกจากกันซึ่งสามารถแยกพิจารณาได้ดังนี้

จากภาพที่ 2.8 เมตริกซ์สติฟเนสของข้อต่อแบบแผ่นเรียบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} p_{s1} \\ p_{s2} \\ p_{s5} \\ p_{s6} \end{bmatrix} = E_s t_s \begin{bmatrix} \frac{w_s \alpha^2 + 1}{3} & \frac{-\alpha}{2w_s} & \frac{w_s \alpha^2 - 1}{6} & \frac{-\alpha}{2w_s} \\ & \frac{w_s \alpha^2 + 1}{8} & \frac{\alpha}{w_s} & \frac{w_s \alpha^2 - 1}{8} \\ & & \frac{w_s \alpha^2 + 1}{3} & \frac{\alpha}{2w_s} \\ \text{Symmetric} & & & \frac{w_s \alpha^2 + 1}{8} & \frac{\alpha}{w_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{s1} \\ D_{s2} \\ D_{s5} \\ D_{s6} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

เมื่อ t_s คือ ความหนาของแผ่น

w_s คือ ความกว้างของแผ่น

เมตริกซ์สติฟเนสการแอ่น ซึ่งรวมผลของแรงเฉือนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} p_{s3} \\ p_{s4} \\ p_{s7} \\ p_{s8} \end{bmatrix} = E_s \frac{(t_s/w_s)^3}{6(1+2\beta)} \begin{bmatrix} 6 & 3w_s & -6 & 3w_s \\ (2+\beta)w_s^2 & -3w_s & (1-\beta)w_s^2 & \\ & 6 & -3w_s & \\ \text{Symmetric} & & & (2+\beta)w_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{s3} \\ D_{s4} \\ D_{s7} \\ D_{s8} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\text{เมื่อ } \beta = (6/5)(1+\nu)(t_s/w_s)^2$$

ห้ามยืมออก



๗ ๖๐๖๗๖

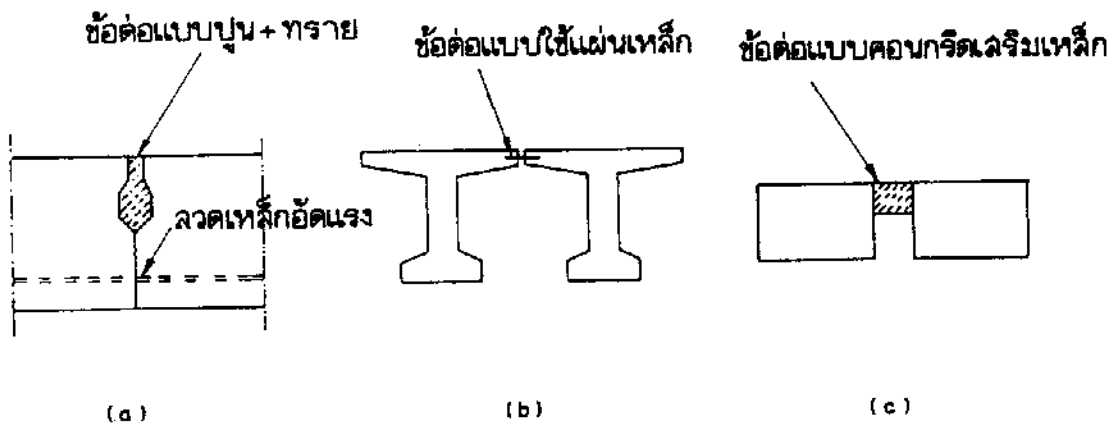
หอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ฉพ
TA

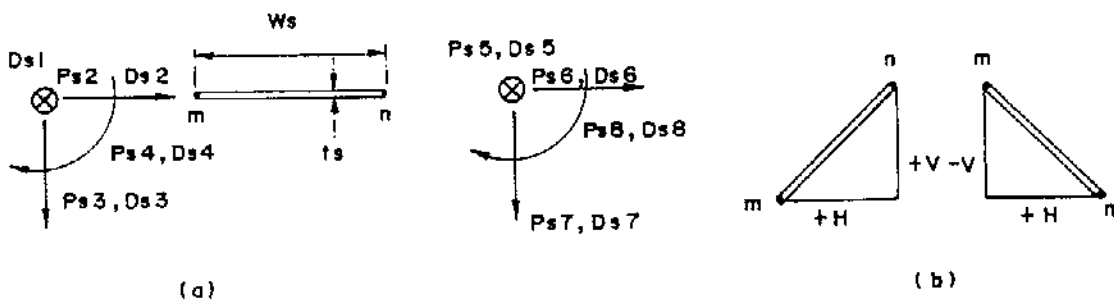
25

๙๒๓๙

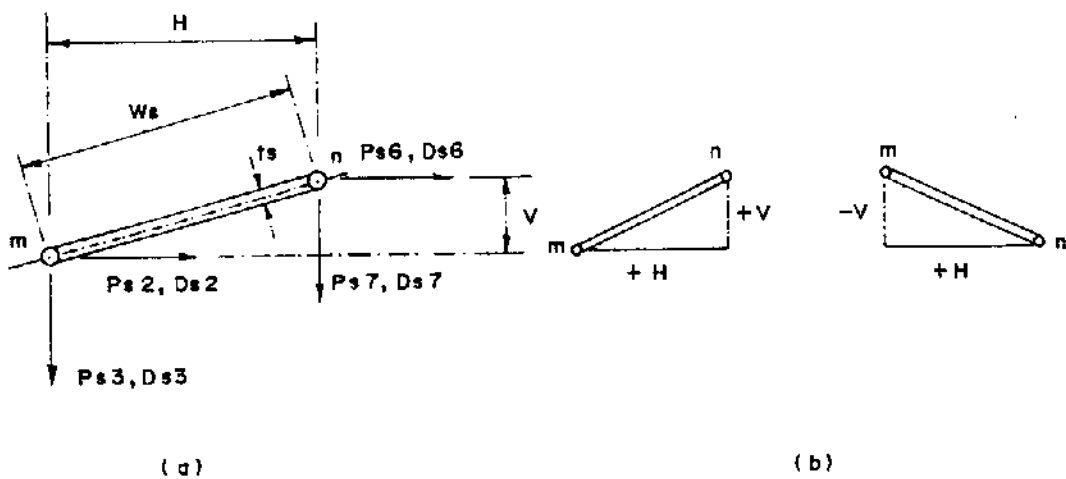
๑๖.๑



ภาพที่ 2.7 ภาพแสดงรูปแบบของข้อต่อ



ภาพที่ 2.8 ภาพแสดงภาพจำลองและทิศทางที่เป็นบวกของข้อต่อชนิดแผ่น



ภาพที่ 2.9 ภาพแสดงภาพจำลองและทิศทางที่เป็นบวกของข้อต่อชนิดโครงข้อหมุน

และเมื่อรวมเมตริกซ์ stiffness ของการเอ้นและผลของแรงเฉือนเข้าด้วยกันจะได้ เมตริกซ์ stiffness แล $|k_s|$ ดังนี้

$$[k_s] = \begin{bmatrix} \frac{E_s t_s w_s \omega^2 + E_s t_s}{3} & \frac{E_s t_s \omega^2}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{6} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} \\ \frac{E_s t_s w_s \omega^2 + E_s t_s}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2}{4} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} \\ \frac{E_s t_s w_s \omega^2 - E_s t_s}{6} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} \\ \frac{E_s t_s w_s \omega^2 - E_s t_s}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{2w_s} \\ \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{2w_s} & \frac{E_s t_s \omega^2 - E_s t_s}{4} \end{bmatrix}$$

จากสมการ 2.13 และ 2.14 เมทริกซ์ของข้อต่อสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll}
 k_{11}=k_x & k_{12}=-\bar{y}_m k_x & k_{13}=\bar{z}_m k_x \\
 k_{14}=0 & k_{15}=-k_x & k_{16}=-\bar{y}_n k_x \\
 k_{17}=\bar{z}_n k_x & k_{18}=0 & \\
 k_{22}=2\bar{y}_m^2 k_x + gH^2 & k_{23}=2\bar{y}_m \bar{z}_m k_x - gHV & k_{24}=\bar{z}_m gH^2 - \bar{y}_m gHV \\
 k_{25}=k_{12} & k_{26}=2\bar{y}_m \bar{y}_n k_x - gH^2 & k_{27}=2\bar{y}_m \bar{z}_n k_x + gHV \\
 k_{28}=\bar{z}_n gH^2 - \bar{y}_n gHV & & \\
 k_{33}=2\bar{z}_m^2 k_x + gV^2 & k_{34}=\bar{z}_m gHV + \bar{y}_m gV^2 & k_{35}=k_{13} \\
 k_{36}=2\bar{y}_n \bar{z}_m k_x + gHV & k_{37}=\bar{z}_m \bar{z}_n k_x - gV & k_{38}=\bar{z}_n gHV + \bar{y}_n gV^2 \\
 k_{44}=\bar{z}_n k_{24} + \bar{y}_n k_{34} + k_0 & k_{45}=0 & k_{46}=-k_{24} \\
 k_{47}=-k_{34} & k_{48}=\bar{z}_n k_{24} + \bar{y}_n k_{34} - k_0 & \\
 k_{55}=k_x & k_{56}=k_{16} & k_{57}=k_{17} \\
 k_{58}=0 & & \\
 k_{66}=2\bar{y}_n^2 k_x + gH^2 & k_{67}=2\bar{y}_n \bar{z}_n k_x - gHV & k_{68}=-k_{28} \\
 k_{77}=2\bar{z}_n^2 k_x + gV^2 & k_{78}=-k_{38} & \\
 k_{88}=\bar{z}_n k_{68} + \bar{y}_n k_{38} & &
 \end{array}$$

ข้อต่อแบบโครงข้อหมุนได้ตั้งสมมุติฐานมาจากข้อต่อระหว่างคานาที่เตรียมไว้สำหรับ ปูนทรายหรือคอนกรีตดังภาพที่ 2.7(a) ซึ่งพฤติกรรมยังไม่เป็นจริงเพราะยังไม่ได้พิจารณาเหล็กยึดแรงเข้าไปในลตัพเนสของการหมุนอย่างไรก็ตามโครงสร้างของคานามัลติบีม แรงในแนวนอนจะมีผลไม่มากและเมื่อกำหนดให้ k_0 เป็นศูนย์จึงเป็นการประมาณเท่านั้น

2.6 แรงและน้ำหนักที่กระทำกับโครงสร้าง

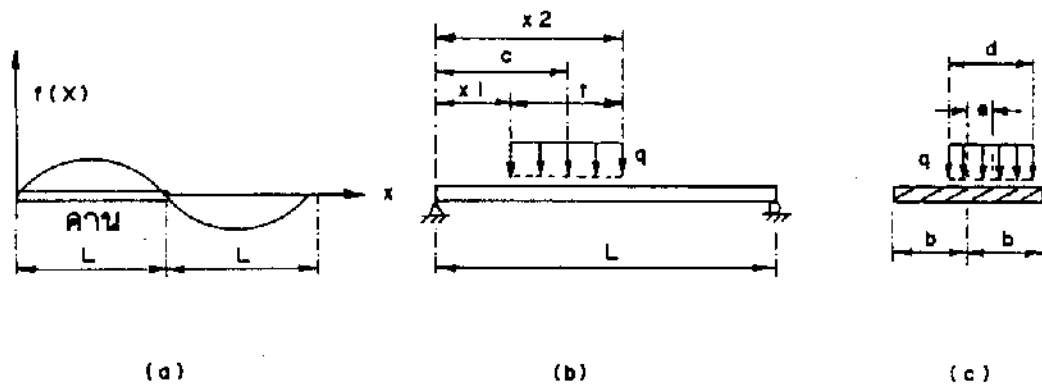
2.6.1 น้ำหนักที่กระทำกับโครงสร้าง

น้ำหนักที่กระทำเป็นจุด และน้ำหนักที่แผ่กระจายบนคานาจะพิจารณาโดยอาศัยอนุกรมของ Fourier Sine มีคาบ = $2L$ ซึ่งแสดงในภาพที่ 2.10

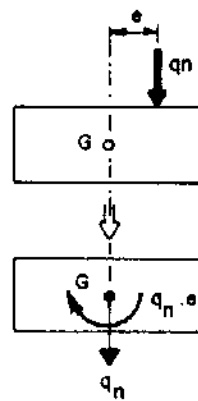
$$\text{เมื่อ } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \alpha_n x \quad (2.22)$$

$$\text{และ } q_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \alpha_n x \, dx \quad (2.23)$$

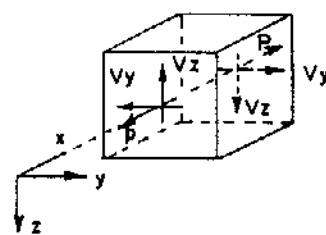
L



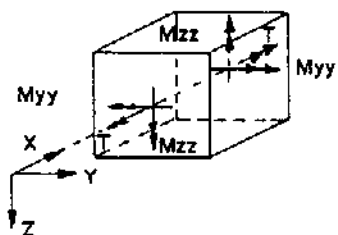
ภาพที่ 2.10 ภาพแสดงน้ำหนักที่กระทำกับโครงสร้าง



ภาพที่ 2.11 ภาพแสดงภาพจำลองของน้ำหนักที่กระทำกับโครงสร้าง



(a) แรงภายใน



(b) โมเมนต์

ภาพที่ 2.12 ภาพแสดงทิศทางที่เป็นบวกของแรงภายในของคาน

โดยปกติน้ำหนักที่กระทำบนคานจะมีพิสัยดังแสดงในภาพที่ 2.10(b) และ 2.10(c)

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } q_n &= 2 \int_{x_1}^{x_2} q \sin \alpha x \, dx \\
 &= -2q \left[\cos \alpha x \right]_{x_1}^{x_2} \\
 &= -2q \left[\cos \alpha x_1 - \cos \alpha x_2 \right] \\
 &= 2q \left[2 \sin \alpha \left(\frac{x_1+x_2}{2} \right) \sin \alpha \left(\frac{x_2-x_1}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{4q \sin \alpha c \sin \alpha l}{n} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

เมื่อน้ำหนักกระทำเป็นจุด

$$q_n = \frac{4Q \sin \alpha c \sin \alpha l}{n\pi} \quad (2.25)$$

น้ำหนักกระทำแผ่กระจาย

$$q_n = \frac{4qd \sin \alpha c \sin \alpha l}{n} \quad (2.26)$$

- เมื่อ
- Q = ขนาดของน้ำหนัก
 - q = ความเข้มเป็นของน้ำหนัก
 - l = ความยาวของน้ำหนัก
 - d = ความกว้างของน้ำหนัก

พิจารณาคานที่ถูกน้ำหนักกระทำเป็นจุด q_n กระทำในทิศทางบวก ดังภาพที่ 2.11 เมื่อพิจารณาคานจุดเซนตริคของคานเราจะได้สมการดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_n \\ q_n \cdot e \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

น้ำหนักเวกเตอร์ (R) จะถูกนำไปคำนวณในพจน์ของน้ำหนัก

2.6.2 แรงในคานและข้อต่อ

หลังจากการคำนวณสมการแต่ละพจน์ของน้ำหนักการกระจายที่เซนต์ทรอยด์ของคานจะ
ใช้การพิจารณาหาแรงของคานและข้อต่อดังนี้

จากทฤษฎีคานและทิศทางของการกระทำในหน้าตัด แรงและโมเมนต์เราจะได้

$$\text{แรงในแนวแกน } \bar{P} = EA \frac{du}{dx}$$

$$\text{แรงในแนวราบ } V_y^* = -EI_z \frac{d^3v}{dx^3}$$

$$\text{แรงในแนวตั้ง } V_z^* = -EI_z \frac{d^3w}{dx^3}$$

$$\text{โมเมนต์รอบแกน y } M_{yy} = -EI_y \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\text{โมเมนต์รอบแกน z } M_{zz} = -EI_z \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\text{แรงบิดเฉือน } T = GJ \frac{d\phi}{dx}$$

จากสมการ 2.2 เราจะได้

$$\bar{P} = -EA \propto U \sin \alpha x$$

$$V_y^* = EI_z \propto^3 V \cos \alpha x$$

$$V_z^* = EI_y \propto^3 W \cos \alpha x$$

$$M_{yy} = EI_y \propto^2 W \cos \alpha x$$

$$M_{zz} = EI_z \propto^2 V \sin \alpha x$$

$$T = GJ \propto \phi \cos \alpha x$$

แรงและโมเมนต์ตามสมการข้างบนได้มาจากทฤษฎีของคานที่ถูกน้ำหนักกระทำในแนวตั้ง
 แต่ในปัญหาของคานมัลติบีมคานจะถูกน้ำหนักในแนวตั้งกระทำพร้อม ๆ กับข้อต่อ อย่างไรก็ตาม
 ตามการคำนวณค่า $\bar{P}$, M_{yy} , M_{zz} และ T จะใช้ทฤษฎีของคานมัลติบีมได้แต่การพิจารณาค่า

V_z^* และ V_y^* ไม่สามารถจะพิจารณาได้จึงจะใช้แรงในแนวแรงตามแนวยาวของข้อต่อ ในการพิจารณาหา v_z^* และ v_y^*

แรงในข้อต่อสามารถคำนวณได้จากการกระจัดของข้อต่อ ซึ่งถูกถ่ายมาจากการกระจัดของเซนส์ทรอยด์ของคานดังนี้

$$\{P_S\} = [k_S] \{\bar{a}\} \{\bar{D}_S\}$$

เมื่อ $\{\bar{D}_S\}$ คือ เมตริกซ์ของการกระจัดของเซนส์ทรอยด์คาน

2.7 สรุปการวิเคราะห์โดยวิธีการเปลี่ยนตำแหน่ง

ก. หาเมตริกซ์สติฟเนสของคาน

$$[k_b] = \begin{bmatrix} EA \propto^2 & & & \text{Zeros} \\ & EI_z \propto^4 & & \\ & & EI_y \propto^4 & \\ \text{Zeros} & & & GJ \propto^2 \end{bmatrix}$$

ข. หาเมตริกซ์สติฟเนสของข้อต่อ $[k_S]$

ค. หาเมตริกซ์แปลงการเปลี่ยนตำแหน่งของการกระจัด $\{\bar{a}\}$

$$[\bar{a}] = \begin{bmatrix} a_{mi} & 0 \\ 0 & a_{nj} \end{bmatrix}$$

$$[a_{mi}] = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha y_m & \alpha z_m & 0 \\ & 1 & 0 & z_m \\ & & 1 & y_m \\ \text{Zeros} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[a_n] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha y_n & \alpha z_n & 0 \\ & 1 & 0 & z_n \\ & & 1 & -y_n \\ \text{Zeros} & & & 1 \end{bmatrix}$$

ง. หาเมตริกซ์สติฟเฟิสของข้อต่อที่ปม $[k_s]$

$$[k_s] = [\bar{a}]^T [k_s] [\bar{a}]$$

จ. ประกอบเมตริกซ์สติฟเฟิสของโครงสร้าง $[K]$

ฉ. หาเมตริกซ์ของน้ำหนัก $\{R\}$

$$\text{สำหรับแต่ละคาน} \quad \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_n \\ q_n \cdot e \end{bmatrix}$$

เมื่อน้ำหนักกระทำเป็นจุด

$$q_n = \frac{4Q}{n\pi} \sin \alpha c \sin \alpha l$$

น้ำหนักกระทำแผ่กระจาย

$$q_n = \frac{4qd}{n\pi} \sin \alpha c \sin \alpha l$$

ช. คำนวณหาการกระจัดของเซนต์ทรอยด์ของคาน $\{r\}$

$$\{r\} = [K]^{-1} \{R\}$$

ซ. คำนวณการหลุดตัว แรงในคาน และแรงในข้อต่อที่พิจารณาและนำเก็บไว้

ปริมาณ	ขนาด	ฟังก์ชัน
<u>การกระจัดของคาน</u>		
แนวตามยาว (u)	U	$\cos \alpha x$
แนวขวาง (v)	V	$\sin \alpha x$
แนวตั้ง (w)	W	$\sin \alpha x$
การหมุน (ϕ)	ϕ	$\sin \alpha x$

ปริมาณ	ขนาด	ฟังก์ชัน
<u>แรงของคาน</u>		
แนวตามยาว ($\bar{P}$)	$-EA \propto U$	$\sin \alpha x$
แนวขวาง (V_y)	ดูในหัวข้อ 2.6.2	$\cos \alpha x$
แนวตั้ง (V_z)	ดูในหัวข้อ 2.6.2	$\cos \alpha x$
โมเมนต์รอบแกน y (M_{yy})	$EI_y \propto w$	$\sin \alpha x$
โมเมนต์รอบแกน z (M_{zz})	$EI_z \propto v$	$\sin \alpha x$
แรงเฉือนของการบิด (T)	$GJ \propto \phi$	$\cos \alpha x$

<u>แรงของข้อต่อ</u>		
แนวตามยาว		$\cos \alpha x$
แนวขวาง	$(P_s) = [k_s] \{\bar{a}\} \{\bar{D}_s\}$	$\sin \alpha x$
แนวตั้ง		$\sin \alpha x$
โมเมนต์ตามขวาง		$\sin \alpha x$

ฉ. กลับไปทำในข้อ ก. ถึง ข. ใหม่ให้ครบตามจำนวนของพจน์ของน้ำหนัก

ญ. นำผลลัพธ์ที่คำนวณได้มารวมกัน

เพื่อเป็นการประหยัดเวลาจะเห็นว่าการวิเคราะห์ในข้อที่ ก. ถึงข้อที่ จ. จะเหมือนกันทุกพจน์ของน้ำหนักที่กระทำ