

บทที่ 2

หลักการและเหตุผล

2.1 สมการทางคณิตศาสตร์ของการอพทไมซ์

การอพทไมซ์มีรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ดังนี้ (Yunliang, 1986)

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && F(\{s\}) \\ &\text{Subject to} && g_j(\{s\}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, nC \end{aligned} \quad (2.1)$$

โดยที่ F คือฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของการอพทไมซ์ g_j คือเงื่อนไขคอนสเตรนที่ลำดับที่ i ของการอพทไมซ์ nC คือจำนวนของเงื่อนไขคอนสเตรนทั้งหมด และ $\{s\}$ คือเวกเตอร์ของตัวแปรออกแบบ

การอพทไมซ์รูปร่างในการวิจัยนี้เลือกใช้ความเค้น von Mises มากสุดที่เกิดขึ้นภายในชิ้นงานของชิ้นงานเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ซึ่งเขียนได้ตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$\text{minimize} \quad F(\{s\}) = (\sigma_{\text{VM}})_{\text{MAX}} \quad (2.2)$$

โดยที่ $(\sigma_{\text{VM}})_{\text{MAX}}$ คือความเค้น von Mises มากสุด

สำหรับเงื่อนไขคอนสเตรนของการอพทไมซ์รูปร่าง ซึ่งในการวิจัยนี้เลือกใช้เงื่อนไขคอนสเตรนที่สองเงื่อนไข ได้แก่ เงื่อนไขคอนสเตรนของความเค้นโดยกำหนดให้ความเค้น von Mises มากสุดของชิ้นงานของแต่ละรอบการคำนวณมีค่าลดลง และเงื่อนไขคอนสเตรนของปริมาตรโดยกำหนดให้ปริมาตรของชิ้นงานที่แต่ละรอบการคำนวณของขั้นตอนการอพทไมซ์มีค่าคงที่ ซึ่งการคำนวณฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขคอนสเตรนที่จะกล่าวรายละเอียดต่อไปในหัวข้อฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขคอนสเตรน

การแก้สมการหาผลลัพธ์ของการอพทไมซ์รูปร่างในการวิจัยนี้เลือกใช้วิธีลำดับโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อปรับเปลี่ยนรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ของการอพทไมซ์ทั้งหมดให้อยู่ในระบบสมการเชิงเส้น (Linear programming) และหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

2.2 อนุกรมของเทเลอร์ (Taylor series)

อนุกรมของเทเลอร์เป็นการประมาณค่าฟังก์ชัน $f(\{z_0\})$ ใด ๆ ใกล้ตำแหน่ง $\{z_0\}$ ด้วยการประมาณค่าโดยใช้อนุกรมซึ่งเป็นสมการโพลิโนเมียล รูปแบบของอนุกรมเทเลอร์แสดงได้ดังนี้ (Nash and Sofer, 1996)

$$f(\{z_0\} + \{\Delta z\}) \approx f(\{z_0\}) + \{\Delta z\}^T \{\nabla f(\{z_0\})\} + \frac{1}{2} \{\Delta z\}^T [\nabla^2 f(\{z_0\})] \{\Delta z\} + \dots \quad (2.3)$$

โดยที่ $f(\{z_0\} + \{\Delta z\})$ คือค่าฟังก์ชัน f ที่ได้จากการประมาณเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งของ $\{z_0\}$ ด้วยขนาด $\{\Delta z\}$ $f(\{z_0\})$ คือค่าฟังก์ชัน f ที่ตำแหน่ง $\{z_0\}$ $\{\nabla f(\{z_0\})\}$ เวกเตอร์เกรเดียนของฟังก์ชัน f ที่ตำแหน่ง $\{z_0\}$ $[\nabla^2 f(\{z_0\})]$ คือเมตริกซ์เฮสเซียน (Hessian) ของฟังก์ชัน f ที่ตำแหน่ง $\{z_0\}$ และ $\{\Delta z\}$ คือเวกเตอร์แสดงการเปลี่ยนขนาดของ $\{z\}$ จากตำแหน่ง $\{z_0\}$ โดยที่ $\{z_0\} + \{\Delta z\}$ มีตำแหน่งใกล้กับ $\{z_0\}$

2.3 วิธีลำดับโปรแกรมเชิงเส้นของการอพยพไม่ซ้ำรูปร่าง

วิธีลำดับโปรแกรมเชิงเส้นเป็นการปรับเปลี่ยนรูปแบบของฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขคอนสเตรนซ์ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น (Nonlinear function) ให้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function) ด้วยการประมาณจากอนุกรมของเทเลอร์โดยตัดพจน์กำลังสองขึ้นไปออก โดยจากอนุกรมของเทเลอร์สำหรับฟังก์ชัน $f(\{z_0\})$ ใด ๆ เมื่อตัดพจน์กำลังสองขึ้นไปออกจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$f(\{z_0\} + \{\Delta z\}) \approx f(\{z_0\}) + \{\Delta z\}^T \{\nabla f(\{z_0\})\} \quad (2.4)$$

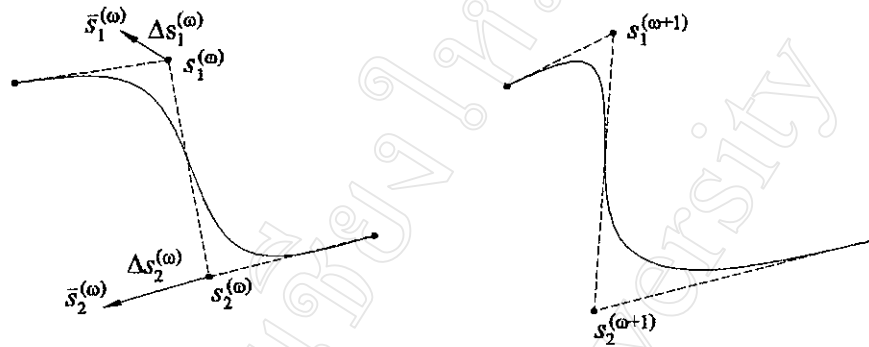
วิธีลำดับโปรแกรมเชิงเส้นจะปรับเปลี่ยนอนุกรมของเทเลอร์ดังสมการ (2.4) เพื่อใช้ประมาณค่าของฟังก์ชันในรอบการคำนวณถัดไปจากรอบการคำนวณเดิม ดังนั้นการประมาณค่าที่รอบการคำนวณ $\omega+1$ สำหรับฟังก์ชัน $f(\{z\})$ ใด ๆ จากรอบการคำนวณ ω โดยใช้วิธีลำดับโปรแกรมเชิงเส้นมีความสัมพันธ์ดังนี้ (Yunliang, 1986)

$$f(\{z^{(\omega+1)}\}) = f(\{z^{(\omega)}\}) + \{\Delta z^{(\omega)}\}^T \{\nabla f(\{z^{(\omega)}\})\} \quad (2.5)$$

โดยที่ $f(\{z^{(\omega+1)}\})$ คือค่าของฟังก์ชัน f ของรอบการคำนวณ $\omega+1$ โดยได้จากการประมาณค่าเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งของ $\{z\}$ ด้วยขนาด $\{\Delta z\}$ ที่รอบการคำนวณ ω

2.4 ตัวแปรออกแบบของการอพทที่ไม่ซ้ำรูปร่างและการตรวจสอบการลู่เข้า

2.4.1 ตัวแปรออกแบบของการอพทที่ไม่ซ้ำรูปร่าง



(ก) รอบการคำนวณ ω

(ข) รอบการคำนวณ $\omega+1$

รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ของตัวแปรออกแบบที่รอบการคำนวณ ω และรอบการคำนวณ $\omega+1$

ตัวแปรออกแบบของการอพทที่ไม่ซ้ำรูปร่างในการวิจัยนี้เลือกใช้ตำแหน่งพิกัดของจุดควบคุมของเส้นขอบเบซิเอร์และเส้นขอบบี-สไปไลน์โดยมีการเคลื่อนที่ของตัวแปรออกแบบตามทิศทางที่กำหนด โดยตัวแปรออกแบบลำดับที่ i เขียนแทนด้วย s_i ทิศทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรออกแบบลำดับที่ i เขียนแทนด้วย $\bar{s}_i$ และเวกเตอร์แสดงกลุ่มของตัวแปรออกแบบเขียนแทนด้วย (Zienkiewicz and Cambell, 1973)

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_q \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

โดยที่ q คือจำนวนของตัวแปรออกแบบทั้งหมด

ในการอพทที่ไม่ซ้ำงาน ตัวแปรออกแบบจะเปลี่ยนไปในแต่ละรอบการคำนวณ ซึ่งเขียนแทนด้วย (Zienkiewicz and Cambell, 1973)

$$\{s^{(\omega+1)}\} = \{s^{(\omega)}\} + \{\Delta s^{(\omega)}\} \quad (2.7)$$

โดยที่ $\{s^{(\omega)}\}$ และ $\{s^{(\omega+1)}\}$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรออกแบบในรอบการคำนวณ ω และ $\omega+1$ ตามลำดับ และ $\{\Delta s^{(\omega)}\}$ คือเวกเตอร์แสดงการเปลี่ยนแปลงขนาดของตัวแปรออกแบบที่รอบการคำนวณ

ω ดังตัวอย่างตัวแปรออกแบบในรูปที่ 2.1 ซึ่งมีตัวแปรออกแบบจำนวน 2 ตัวแปรคือ s_1 และ s_2 โดยตัวแปรออกแบบที่รอบการคำนวณ ω คือ $s_1^{(\omega)}$ และ $s_2^{(\omega)}$ และมีขนาดการเปลี่ยนของตัวแปรออกแบบที่รอบการคำนวณ ω คือ $\Delta s_1^{(\omega)}$ และ $\Delta s_2^{(\omega)}$ ดังแสดงในรูปที่ 2.1(ก) ตัวแปรออกแบบที่รอบการคำนวณ $\omega+1$ คือ $s_1^{(\omega+1)}$ และ $s_2^{(\omega+1)}$ ดังแสดงในรูปที่ 2.1(ข) โดยตัวแปรออกแบบที่รอบการคำนวณ ω และรอบการคำนวณ $\omega+1$ มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\{s^{(\omega+1)}\} = \begin{Bmatrix} s_1^{(\omega+1)} \\ s_2^{(\omega+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1^{(\omega)} \\ s_2^{(\omega)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta s_1^{(\omega)} \\ \Delta s_2^{(\omega)} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

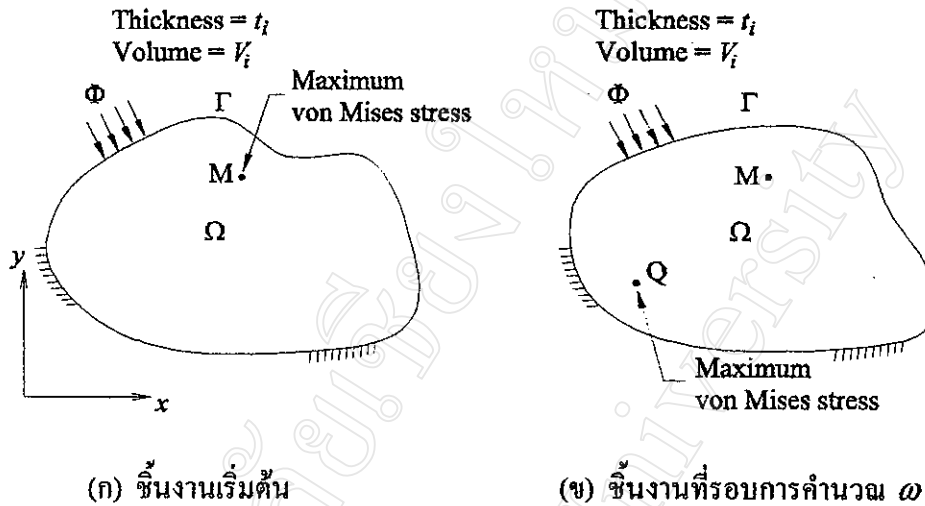
2.4.2 การตรวจสอบการลู่เข้า

การตรวจสอบการลู่เข้าของการคำนวณสามารถตรวจสอบโดยใช้ร้อยละของความผิดพลาดของตัวแปรออกแบบแสดงตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$\left| \frac{s_i^{(\omega+1)} - s_i^{(\omega)}}{s_i^{(\omega)}} \right| \times 100\% < \varepsilon_s \quad (2.9)$$

โดยที่ ε_s คือค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้ซึ่งปกติจะมีค่าเท่ากับ 0.05 และเมื่อตัวแปรออกแบบตัวใดตัวหนึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์ดังสมการ (2.9) แสดงว่าการคำนวณมีการลู่เข้าของผลลัพธ์สู่เกณฑ์ค่าผิดพลาดที่ยอมรับได้และจะหยุดการคำนวณการอพยพไม่ซ้ำรูปร่าง

2.5 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของการอพทที่ไม่ใช่ชิ้นงาน



(ก) ชิ้นงานเริ่มต้น

(ข) ชิ้นงานที่รอบการคำนวณ ω

รูปที่ 2.2 รูปแบบชิ้นงานและตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้น von Mises มากสุด

2.5.1 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

การคำนวณค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เลือกใช้วิธีลำดับโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อประมาณค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในรอบการคำนวณถัดไปจากรอบการคำนวณเดิม โดยฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือค่าของความเค้น von Mises ที่ตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้นมากที่สุดของชิ้นงานเริ่มต้น จากรูปที่ 2.2(ก) เป็นตัวอย่างของชิ้นงานวิเคราะห์โดยชิ้นงานดังกล่าวมีแรงกระจาย Φ กระทำที่ขอบ ชิ้นงานมีความหนาสม่ำเสมอ t_i และมีปริมาตร V_i รูปร่างของชิ้นงานเริ่มต้นมีความเค้น von Mises มากสุดเกิดที่ตำแหน่ง M และมีค่าเท่ากับ $(\sigma_{vm})_{MAX}$ ดังนั้น ฟังก์ชันวัตถุประสงค์หรือค่าความเค้น von Mises ที่ตำแหน่ง M ของรอบการคำนวณที่หนึ่งซึ่งประมาณจากความเค้น von Mises ของชิ้นงานเริ่มต้นด้วยวิธีลำดับโปรแกรมเชิงเส้นมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$F(\{s^{(1)}\}) = (\sigma_{vm})_M^{(1)} = (\sigma_{vm})_{MAX} + \{\Delta s^{(0)}\}^T \{V(\sigma_{vm})_{MAX}\} \quad (2.10)$$

โดยที่ $(\sigma_{vm})_{MAX}$ คือความเค้น von Mises มากสุดของชิ้นงานเริ่มต้นที่ตำแหน่ง M $\{V(\sigma_{vm})_{MAX}\}$ คือเวกเตอร์เกรเดียนของความเค้น von Mises ที่ตำแหน่ง M และ $\{\Delta s^{(0)}\}$ คือเวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงขนาดของตัวแปรออกแบบของชิ้นงานเริ่มต้น

ภายหลังการอพทที่ไม่ใช่ที่รอบการคำนวณ ω ชิ้นงานจะมีการเปลี่ยนรูปร่างที่ขอบซึ่งทำให้ตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้น von Mises มากสุดเปลี่ยนไปจากตำแหน่งเดิม โดยจากรูปที่ 2.2(ข)

ตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้นมากที่สุดที่รอบการคำนวณ ω คือตำแหน่ง A อย่างไรก็ตามฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของการอพทิมไซ์ชิ้นงานยังคงพิจารณาค่าความเค้นที่ตำแหน่ง M ดังนั้นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่รอบการคำนวณ $\omega+1$ ที่ประมาณได้จากค่าความเค้นที่รอบการคำนวณ ω ด้วยวิธีลำดับโปรแกรมเชิงเส้นมีความสัมพันธ์คือ (Yunliang, 1986)

$$F(\{s^{(\omega+1)}\}) = (\sigma_{VM})_M^{(\omega+1)} = (\sigma_{VM})_M^{(\omega)} + \{\Delta s^{(\omega)}\}^T \{\nabla(\sigma_{VM})_M^{(\omega)}\} \quad (2.11)$$

โดยที่ ω คือลำดับรอบการคำนวณของการอพทิมไซ์ชิ้นงาน และ M คือตำแหน่งที่ใช้คำนวณความเค้น von Mises และค่าเกรเดียนของความเค้น โดยที่ตำแหน่ง M เป็นตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้น von Mises มากสุดของชิ้นงานเริ่มต้น

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $F(\{s\})$ ถูกควบคุมให้มีค่าลดลงโดยการลดขนาดของพจน์ที่สองทางขวามือของสมการ (2.11) โดยที่ $\{\Delta s^{(\omega)}\}$ และ $\{\nabla(\sigma_{VM})_M^{(\omega)}\}$ ต้องมีเครื่องหมายตรงข้ามกันและขนาดของ $\{\Delta s^{(\omega)}\}$ จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของความเค้นและเงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของปริมาตร รายละเอียดของเงื่อนไขคอนสเตรนซ์แสดงในหัวข้อถัดไป การคำนวณ $\{\nabla(\sigma_{VM})_M^{(\omega)}\}$ ใช้วิธีผลต่างสืบต่างสืบเนื่องดังแสดงในหัวข้อ 2.10.1 โดยที่ $\{\nabla(\sigma_{VM})_M^{(\omega)}\}$ มีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าต่ำสุดซึ่งทำให้การเปลี่ยนขนาดของ $\{\Delta s^{(\omega)}\}$ ไม่มีผลต่อการลดลงของสมการ (2.11) อย่างไรก็ตามเนื่องจากในการวิจัยนี้ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องซึ่งเป็นวิธีการประมาณค่าเกรเดียนของความเค้นโดยทำการเปลี่ยนค่าของตัวแปรออกแบบ ดังนั้น $\{\nabla(\sigma_{VM})_M^{(\omega)}\}$ จึงมีค่าไม่เท่ากับศูนย์เมื่อฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าต่ำสุด แต่จะมีค่าลดลงเมื่อมีการเข้าสู่ของคำตอบโดยเปรียบเทียบกับรอบการคำนวณแรก ๆ

2.5.2 เงื่อนไขคอนสเตรนซ์

เงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของการอพทิมไซ์ชิ้นงานแบ่งออกเป็นสองเงื่อนไขขึ้นอยู่กับรูปแบบของชิ้นงานที่ทำการอพทิมไซ์ โดยเงื่อนไขคอนสเตรนซ์ดังกล่าวได้แก่

ก. เงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของความเค้น

การอพทิมไซ์ชิ้นงานดังรูปที่ 2.2 พบว่า ภายหลังจากการอพทิมไซ์ชิ้นงานที่รอบการคำนวณ ω ชิ้นงานดังกล่าวมีค่าความเค้น von Mises มากสุดเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง Q ดังแสดงในรูปที่ 2.2(ข) โดยที่ตำแหน่งดังกล่าวไม่ใช่ตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้นมากที่สุดของชิ้นงานเริ่มต้น และเพื่อเป็นการจำกัดการปรับแต่งรูปร่างขอบชิ้นงานและลดค่าความเค้นมากที่สุดที่ตำแหน่งใหม่ที่มีค่ามากกว่าความเค้นที่ตำแหน่ง M จึงกำหนดเงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของความเค้นโดยกำหนดให้

ความเค้น von Mises มากสุดมีค่าลดลง โดยความสัมพันธ์ของเงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของความเค้นแสดงดังนี้

$$g_1(\{s^{(\omega+1)}\}) \leq 0 \quad (2.12)$$

$$g_1(\{s^{(\omega+1)}\}) = (\sigma_{VM})_Q^{(\omega)} + \{\Delta s^{(\omega)}\}^T \{\nabla (\sigma_{VM})_Q^{(\omega)}\} - \kappa (\sigma_{VM})_Q^{(\omega)}$$

โดยที่ $(\sigma_{VM})_Q^{(\omega)}$ คือค่าความเค้น von Mises ของรอบการคำนวณ ω ที่คำนวณที่ตำแหน่ง Q ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เกิดความเค้นมากที่สุดของแต่ละรอบการคำนวณ และ κ คือพารามิเตอร์ควบคุมการลู่เข้าของคำตอบ โดย κ มีค่าน้อยกว่า 1.0

ข. เงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของปริมาตร

การกำหนดเงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของปริมาตรจะกำหนดให้ชิ้นงานมีปริมาตรคงที่ตลอดการคำนวณดังแสดงในรูปที่ 2.2 ซึ่งปริมาตรของชิ้นงานเริ่มต้นและปริมาตรของชิ้นงานที่รอบการคำนวณ ω มีค่าเท่ากับ V_i เงื่อนไขคอนสเตรนซ์ของปริมาตรสามารถเขียนได้ดังความสัมพันธ์ดังนี้

$$g_2(\{s^{(\omega+1)}\}) = 0 \quad (2.13)$$

$$g_2(\{s^{(\omega+1)}\}) = V_i + \{\Delta s^{(\omega)}\}^T \{\nabla V^{(\omega)}\} - V_i = \{\Delta s^{(\omega)}\}^T \{\nabla V^{(\omega)}\}$$

โดยที่ $\{\nabla V^{(\omega)}\}$ คือเวกเตอร์เกรเดียนของปริมาตรชิ้นงานที่รอบการคำนวณ ω

2.6 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

วิธีซิมเพล็กซ์เป็นวิธีการหาคำตอบของการออปติไมซ์ที่มีรูปแบบของสมการเป็นระบบสมการเชิงเส้นและอยู่ในรูปแบบมาตรฐาน (Standard form) ดังนี้ (Nash and Sofer, 1996)

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && F(\{s\}) = \{a\}^T \{s\} \\ &\text{subject to} && [A]\{s\} = \{B\}, \\ &&& \{s\} \geq \{0\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

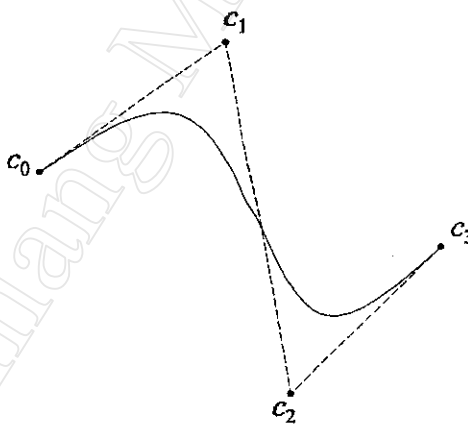
โดยที่ $\{s\}$ คือเวกเตอร์ของตัวแปรออกแบบ $\{a\}$ คือเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $[A]$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขคอนสเตรนธ์ และ $\{B\}$ คือเวกเตอร์ค่าคงที่ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

การหาคำตอบของระบบสมการที่ได้จากวิธีลำดับ โปรแกรมเชิงเส้นโดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์กระทำโดยจัดรูปแบบของสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขคอนสเตรนธ์จากสมการ (2.11), (2.12) และ (2.13) ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน (Nash and Sofer, 1996) ดังสมการ (2.14) โดยเพิ่มตัวแปรส่วนขาด (Slack variable) และตัวแปรส่วนเกิน (Excess variable) ซึ่งในการวิจัยนี้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ของ Press *et al.* (1992) ซึ่งเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

2.7 สมการเส้นขอบโค้งของชิ้นงาน

การแสดงเส้นขอบโค้งของชิ้นงานเลือกใช้การแสดงเส้นขอบโค้งของชิ้นงานด้วยเส้นขอบสองชนิด คือ เส้นขอบเบซิเอร์และเส้นขอบบี-สไปรล

2.7.1 เส้นขอบเบซิเอร์



รูปที่ 2.3 เส้นโค้งเบซิเอร์จากกลุ่มของจุดควบคุมจำนวนสี่จุด

เส้นขอบเบซิเอร์เป็นการสร้างเส้นโค้งจากกลุ่มของจุดควบคุมโดยเส้นโค้งจะลากผ่านจุดควบคุมเฉพาะจุดแรกและจุดสุดท้ายเท่านั้นดังแสดงในรูปที่ 2.3 ซึ่งเป็นรูปเส้นโค้งเบซิเอร์ที่ลากผ่านกลุ่มของจุดควบคุมจำนวน 4 จุด ได้แก่ c_0, c_1, c_2 และ c_3 โดยเส้นโค้งจะลากผ่านเฉพาะ

จุดควบคุม c_0 และ c_3 เท่านั้น เส้นโค้งเบซิเออร์จะมีกำลังของโพลิโนเมียลเท่ากับจำนวนของจุดควบคุมลบหนึ่ง สมการเส้นโค้งเบซิเออร์มีความสัมพันธ์ดังนี้ (Hearn and Baker, 1997)

$$C(\psi) = \sum_{m=0}^n c_m BEZ_{m,n}(\psi), \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad (2.15)$$

โดยที่ c_m คือพิกัดของจุดควบคุมจำนวน $n+1$ จุด โดยสำหรับเส้นขอบเบซิเออร์ในสองมิติ $c_m = (x_m, y_m)$ n คือกำลังของโพลิโนเมียลของเส้นขอบ ψ คือพารามิเตอร์ของเส้นขอบโดยมีค่าเท่ากับศูนย์ถึงหนึ่ง และ $BEZ_{m,n}(\psi)$ คือฟังก์ชันเบลนดิ่งของเบซิเออร์และคำนวณได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$BEZ_{m,n}(\psi) = G(n, m) \psi^m (1-\psi)^{n-m} \quad (2.16)$$

โดยที่ $G(n, m)$ คือสัมประสิทธิ์ทวินามและมีค่า

$$G(n, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (2.17)$$

เมื่อจัดรูปสมการ (2.15) ใหม่ โดยกระจายเทอมฟังก์ชันเบลนดิ่ง และเขียนสมการเส้นขอบเบซิเออร์ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์แล้ว จะได้สมการเส้นขอบเบซิเออร์ดังนี้

$$C(\psi) = \begin{Bmatrix} \psi^n \\ \psi^{n-1} \\ \vdots \\ \psi \\ 1 \end{Bmatrix}^T [X_{BEZ}] \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

หรือ
$$C(\psi) = \{\psi\}^T [X_{BEZ}] \{C\} \quad (2.19)$$

โดยที่ $\{\psi\}$ คือเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ ψ $[X_{BEZ}]$ คือเมตริกซ์เบซิเออร์ และ $\{C\}$ คือเวกเตอร์พิกัดของจุดควบคุม รายละเอียดของเมตริกซ์เบซิเออร์ของจำนวนจุดควบคุมเท่ากับสามถึงเก้าแสดงในภาคผนวก ข.

2.7.2 เส้นขอบบี-สไฟลน์

เส้นขอบบี-สไฟลน์เป็นเส้นโค้งที่สร้างจากกลุ่มของจุดควบคุมเช่นเดียวกับเส้นขอบเบซิเอร์ แต่เส้นขอบบี-สไฟลน์มีลักษณะที่แตกต่างจากเส้นขอบเบซิเอร์คือกำลังของโพลิโนเมียลสามารถกำหนดให้มีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงจำนวนของจุดควบคุมลบหนึ่ง สมการของเส้นขอบบี-สไฟลน์มีความสัมพันธ์ดังนี้ (Hearn and Baker, 1997)

$$C(\psi) = \sum_{m=0}^n c_m B_{m,b}(\psi), \quad \psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max} \quad (2.20)$$

โดยที่ b คือกำลังของโพลิโนเมียลของเส้นขอบ และ $B_{m,b}(\psi)$ คือฟังก์ชันเบลนดิงของบี-สไฟลน์ ซึ่งคำนวณได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$B_{m,b}(\psi) = \begin{cases} 1, & \text{if } b=1, \psi_m \leq \psi < \psi_{m+1}, \\ 0, & \text{if } b=1, \psi < \psi_m \text{ or } \psi \geq \psi_{m+1}, \\ \frac{\psi - \psi_m}{\psi_{m+b-1} - \psi_m} B_{m,b-1}(\psi) + \frac{\psi_{m+b} - \psi}{\psi_{m+b} - \psi_{m+1}} B_{m+1,b-1}(\psi), & \text{if } b > 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

โดยที่ ψ คือพารามิเตอร์ของเส้นขอบและมีค่าอยู่ระหว่าง $\psi_{\min}$ และ $\psi_{\max}$ โดยค่าของ ψ ทั้งหมดจะเป็นกลุ่มของจำนวนเต็มซึ่งเรียกว่าเวกเตอร์น็อตและเขียนแทนด้วย $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+b}\}$ ค่าภายในเวกเตอร์น็อทมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq j < b, \\ j - b + 1 & \text{if } b \leq j \leq n, \\ n - b + 2 & \text{if } j > n \end{cases} \quad (2.22)$$

เนื่องจากการแสดงเส้นขอบโค้งของชิ้นงานด้วยเส้นขอบบี-สไฟลน์สามารถกำหนดกำลังโพลิโนเมียลของเส้นขอบให้มีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงจำนวนของจุดควบคุมลบหนึ่ง โดยที่เส้นขอบบี-สไฟลน์ที่มีกำลังของโพลิโนเมียลเท่ากับจำนวนของจุดควบคุมลบหนึ่งจะมีรูปร่างเส้นขอบที่เหมือนกับเส้นขอบเบซิเอร์ ดังนั้น การวิจัยนี้เลือกใช้เส้นขอบบี-สไฟลน์ที่มีกำลังโพลิโนเมียลของเส้นขอบเท่ากับจำนวนของจุดควบคุมลบสอง ซึ่งเวกเตอร์น็อทสำหรับเส้นขอบบี-สไฟลน์ที่มีกำลังโพลิโนเมียลเท่ากับจำนวนของจุดควบคุมลบสองตามสมการ (2.22) คือ

$$\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots, \psi_{n+d-1}, \psi_{n+b}\} = \{0, 0, \dots, 1, \dots, 2, 2\} \quad (2.23)$$

เมื่อจัดรูปสมการ (2.20) ใหม่ โดยกระจายเทอมฟังก์ชันเบรนด์คิง และเขียนสมการเส้นขอบบี-สโพล์ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์แล้ว จะได้สมการเส้นขอบบี-สโพล์ดังนี้

$$C(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} \psi^n \\ \psi^{n-1} \\ \vdots \\ \psi \\ 1 \end{bmatrix}^T [\chi_{B1}] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \right\}, \text{ for } 0 \leq \psi \leq 1$$

หรือ

$$C(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} \psi^n \\ \psi^{n-1} \\ \vdots \\ \psi \\ 1 \end{bmatrix}^T [\chi_{B2}] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \right\}, \text{ for } 1 \leq \psi \leq 2$$

(2.24)

สามารถเขียนย่อได้เป็น

$$C(\psi) = \begin{cases} \{\psi\}^T [\chi_{B1}] [C], & \text{for } 0 \leq \psi \leq 1 \\ \{\psi\}^T [\chi_{B2}] [C], & \text{for } 1 \leq \psi \leq 2 \end{cases} \quad (2.25)$$

โดยที่ $[\chi_{B1}]$ คือเมตริกซ์บี-สโพล์ที่ใช้สำหรับค่าพารามิเตอร์ ψ ที่อยู่ในช่วงศูนย์ถึงหนึ่ง และ $[\chi_{B2}]$ คือเมตริกซ์บี-สโพล์ที่ใช้สำหรับค่าพารามิเตอร์ ψ ที่อยู่ในช่วงหนึ่งถึงสอง

2.8 ฟังก์ชันแมปปีงของเส้นขอบเบซิเออร์และเส้นขอบบี-สไฟลน์

การสร้างฟังก์ชันแมปปีงของเส้นขอบเบซิเออร์และเส้นขอบบี-สไฟลน์ใช้วิธีฟังก์ชันเบลดนค์ดิงของ Szabo and Babuška (1991) ฟังก์ชันแมปปีงในพิกัด x และ y สำหรับอิลิเมนต์สี่หน้าที่มีทุกขอบเป็นขอบโค้งดังรูปที่ 2.4 คือ

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) = & \frac{1-\eta}{2} x_1(\xi) + \frac{1+\xi}{2} x_2(\eta) + \frac{1+\eta}{2} x_3(\xi) + \frac{1-\xi}{2} x_4(\eta) \\ & - \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} X_1 - \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} X_2 \\ & - \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} X_3 - \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} X_4 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} y(\xi, \eta) = & \frac{1-\eta}{2} y_1(\xi) + \frac{1+\xi}{2} y_2(\eta) + \frac{1+\eta}{2} y_3(\xi) + \frac{1-\xi}{2} y_4(\eta) \\ & - \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} Y_1 - \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} Y_2 \\ & - \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} Y_3 - \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} Y_4 \end{aligned} \quad (2.27)$$

โดยที่ $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ และ (X_4, Y_4) คือพิกัดของโหนด 1 ถึง 4 ตามลำดับ $x_1(\xi), x_2(\eta), x_3(\xi)$ และ $x_4(\eta)$ คือฟังก์ชันขอบโค้งของเส้นขอบ 1 ถึง 4 ในระบบพิกัด x ตามลำดับ และ $y_1(\xi), y_2(\eta), y_3(\xi)$ และ $y_4(\eta)$ คือฟังก์ชันขอบโค้งของเส้นขอบ 1 ถึง 4 ในระบบพิกัด y ตามลำดับ

การสร้างฟังก์ชันแมปปีงของเส้นขอบเบซิเออร์และเส้นขอบบี-สไฟลน์กระทำได้โดยแทนความสัมพันธ์ของฟังก์ชันขอบโค้งของเส้นขอบทั้งสองชนิดลงในฟังก์ชันแมปปีงในสมการที่ (2.26) และ (2.27) ซึ่งเป็นฟังก์ชันแมปปีงในพิกัด x และ y ตามลำดับ

การคำนวณฟังก์ชันขอบโค้ง $x_i(\xi)^\dagger$ และ $y_i(\xi)$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ และ 4 สำหรับเส้นขอบเบซิเออร์และเส้นขอบบี-สไฟลน์คำนวณได้จากสมการเส้นขอบเบซิเออร์และสมการเส้นขอบบี-สไฟลน์ในสมการที่ (2.18) และ (2.24) ตามลำดับ โดยใช้การแมประหว่างพารามิเตอร์ ψ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ของเส้นขอบชิ้นงานและพารามิเตอร์ ξ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ของขอบอิลิเมนต์ ทั้งนี้เนื่องจากพารามิเตอร์ ψ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ +1 สำหรับเส้นขอบเบซิเออร์และมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ +2 สำหรับเส้นขอบบี-สไฟลน์ ในขณะที่พารามิเตอร์ ξ มีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ +1 ดังแสดงในรูปที่

[†] ξ เป็นพารามิเตอร์ของขอบอิลิเมนต์ที่หนึ่งและสาม η เป็นพารามิเตอร์ของขอบอิลิเมนต์ที่สองและสี่ โดยในที่นี้จะใช้พารามิเตอร์ ξ เพื่อแสดงการคำนวณโดยรวมสำหรับทุกขอบอิลิเมนต์

2.5 ซึ่งเป็นรูปขอบชิ้นงานที่ประกอบด้วย m อิลิเมนต์ และใช้เส้นขอบเบซิเออร์หรือเส้นขอบบี-สไปไลน์แสดงขอบชิ้นงาน การแมประหว่างพารามิเตอร์ ψ และ ξ ใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\psi = \psi_1 + \frac{(\psi_2 - \psi_1)(1 + \xi)}{2}, \quad -1 \leq \xi \leq +1 \quad (2.28)$$

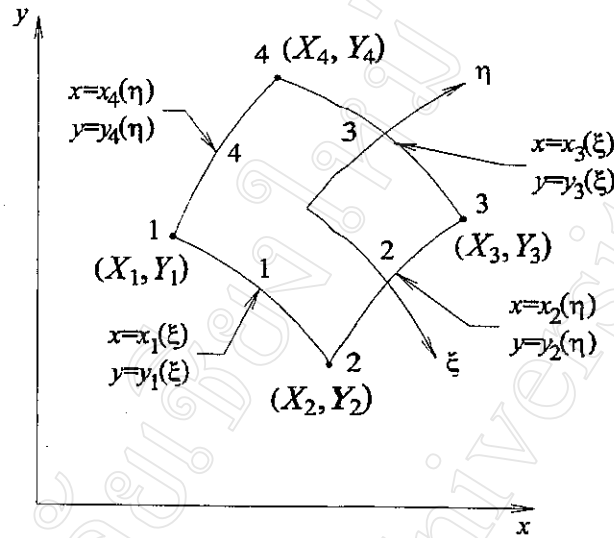
โดยที่ ψ คือตำแหน่งบนเส้นขอบของอิลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา ψ_1 และ ψ_2 คือค่าพารามิเตอร์ ψ ที่ ξ เท่ากับ -1 และ $+1$ ตามลำดับ โดย ψ_1 และ ψ_2 เป็นตำแหน่งโหนดที่มุมของอิลิเมนต์และอยู่บนขอบอิลิเมนต์ที่กำลังพิจารณาดังเช่นอิลิเมนต์ที่หนึ่งของรูปที่ 2.5

ฟังก์ชันขอบโค้งของเส้นขอบเบซิเออร์คำนวณโดยแทนความสัมพันธ์ ψ ในสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.18) ในพิกัด x และ y และจัดรูปสมการใหม่ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

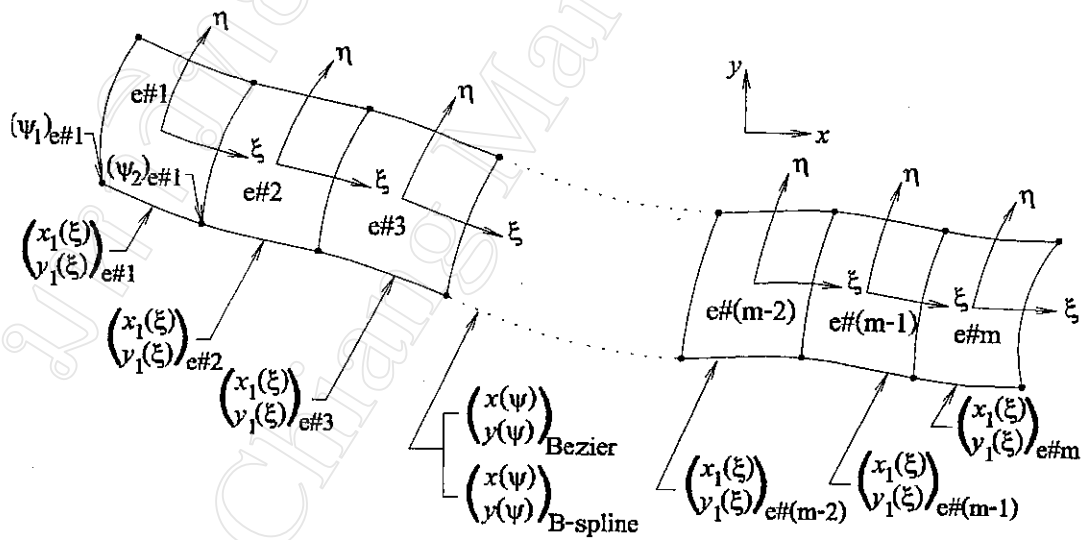
$$x_i(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^n}{2^n} \\ \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^{n-1}}{2^{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi)}{2} \\ 1 \end{array} \right\}^T [x_{\text{BEZ}}] \left\{ \begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \right\} \quad (2.29)$$

และ

$$y_i(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^n}{2^n} \\ \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^{n-1}}{2^{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi)}{2} \\ 1 \end{array} \right\}^T [y_{\text{BEZ}}] \left\{ \begin{array}{c} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{array} \right\} \quad (2.30)$$



รูปที่ 2.4 อิลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีทุกขอบเป็นขอบโค้ง



รูปที่ 2.5 ฟังก์ชันขอบโค้งของขอบชิ้นงานและขอบอิลิเมนต์

ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันขอบโค้งของเส้นขอบบี-สโพลน์คำนวณได้โดยแทนความสัมพัทธ์ ψ ในสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.24) ในพิกัด x และ y และจัดรูปสมการใหม่ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$x_i(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^n}{2^n} \\ \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^{n-1}}{2^{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi)}{2} \\ 1 \end{array} \right\}^T [x_{B1}] \left\{ \begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \right\}, \text{ for } -1 \leq \xi \leq 0$$

หรือ

(2.31)

$$x_i(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^n}{2^n} \\ \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^{n-1}}{2^{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi)}{2} \\ 1 \end{array} \right\}^T [x_{B2}] \left\{ \begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \right\}, \text{ for } 0 \leq \xi \leq +1$$

และ

หรือ

$$y_i(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^n}{2^n} \\ \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^{n-1}}{2^{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi)}{2} \\ 1 \end{array} \right\}^T [\chi_{B1}] \left\{ \begin{array}{c} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{array} \right\}, \text{ for } -1 \leq \xi \leq 0$$

$$y_i(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^n}{2^n} \\ \frac{(\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi))^{n-1}}{2^{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\psi_1(1-\xi) + \psi_2(1+\xi)}{2} \\ 1 \end{array} \right\}^T [\chi_{B2}] \left\{ \begin{array}{c} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{array} \right\}, \text{ for } 0 \leq \xi \leq +1$$

(2.32)

2.9 วิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ p เวอร์ชัน

วิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์อิลิเมนต์เป็นวิธีการวิเคราะห์คำตอบของโจทย์ปัญหาด้วยวิธีการประมาณ ซึ่งกระทำโดยการแบ่งชิ้นงานวิเคราะห์ออกเป็นอิลิเมนต์ขนาดเล็กๆ และวิเคราะห์หาสนามการขจัดของโหนดในแต่ละอิลิเมนต์จากฟังก์ชันการประมาณภายใน ซึ่งสนามการขจัดอย่างง่ายสำหรับฟังก์ชันการประมาณภายในเชิงเส้นคือ (Zienkiewicz and Taylor, 1994)

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i = [N_i] \{d_i\} \quad (2.33)$$

โดยที่ i คือหมายเลขของโหนดที่มุมอิลิเมนต์ $[N_i]$ คือฟังก์ชันฐานเชิงเส้น $\{d_i\}$ คือเวกเตอร์ของการขจัดที่โหนด และ n คือจำนวนของโหนดทั้งหมด เมื่อพิจารณาสมการ (2.33) ร่วมกับคุณสมบัติของวัสดุและหลักการของงานเสมือนจะได้สมการสมดุลไฟไนต์อิลิเมนต์คือ (Knight, 1993)

$$[k_{ii}] \{d_i\} = \{f_i\} \quad (2.34)$$

โดยที่ $[k_{ii}]$ คือเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของอิลิเมนต์และ $\{f_i\}$ คือเวกเตอร์ของแรงที่อิลิเมนต์

สำหรับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชันเป็นการวิเคราะห์ชิ้นงานด้วยเอลิเมนต์ที่มีกำลังของเส้นขอบสูงขึ้น โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบไม่เชิงเส้นและฟังก์ชันฐานที่ใช้สร้างจากโพลิโนเมียลของเลอจองด์ (Legendre polynomial) ซึ่งวิธีการนี้กระทำได้โดยการเพิ่มฟังก์ชันฐานที่มีกำลังสูงกว่าฟังก์ชันฐานเดิมเข้าไปในฟังก์ชันการประมาณภายในเดิม สนามการจัดและสมการสมดุลไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชันคือ (Szabo and Babuška, 1991)

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i + \sum_{j=1}^s N_{h,j} d_{h,j} = [N_i] \{d_i\} + [N_h] \{d_h\} \quad (2.35)$$

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ih} \\ k_{ih}^T & k_{hh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_h \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

โดยที่ $[N_h]$ คือฟังก์ชันฐานทั้งหมดที่เพิ่มเข้าไป $\{d_h\}$ คือเวกเตอร์การจัดแบบ p s คือจำนวนของฟังก์ชันฐานทั้งหมดที่เพิ่มเข้าไป และ $[k_{ii}]$, $[k_{hh}]$ และ $\{f_h\}$ คือเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของเอลิเมนต์และเวกเตอร์ของแรงที่เอลิเมนต์ที่สัมพันธ์กับฟังก์ชันฐานที่เพิ่มเข้าไปตามลำดับ

2.10 การวิเคราะห์ความไว

การวิเคราะห์ความไวหรือการคำนวณค่าเกรเดียนของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรออกแบบในการศึกษานี้เลือกใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องเพื่อประมาณค่าเกรเดียนของฟังก์ชัน โดยฟังก์ชันดังกล่าวได้แก่ ค่าความเค้น von Mises และปริมาตรของชิ้นงาน

2.10.1 เกรเดียนของความเค้น von Mises

ความเค้น von Mises ของการวิเคราะห์ชิ้นงานในสองมิติกรณีความเค้นบนระนาบ (Plane stress) คำนวณจากความสัมพันธ์ดังนี้ (Cook and Young, 1985)

$$\sigma_{vm} = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

เกรเดียนของความเค้น von Mises คือการหาอนุพันธ์ของความเค้น von Mises เทียบกับตัวแปรออกแบบ s , ตามความสัมพันธ์คือ

$$\nabla \sigma_{VM} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{VM}}{\partial s_1} \\ \frac{\partial \sigma_{VM}}{\partial s_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{VM}}{\partial s_q} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

อนุพันธ์ของความเค้น von Mises เทียบกับตัวแปรออกแบบ s_i คือ

$$\frac{\partial \sigma_{VM}}{\partial s_i} = \frac{1}{2\sigma_{VM}} \left((2\sigma_x - \sigma_y) \frac{\partial \sigma_x}{\partial s_i} + (2\sigma_y - \sigma_x) \frac{\partial \sigma_y}{\partial s_i} + 6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial s_i} \right) \quad (2.39)$$

โดยที่ $\frac{\partial \sigma_x}{\partial s_i}$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial s_i}$ และ $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial s_i}$ คืออนุพันธ์ของความเค้นนอร์มัลในแนวแกน x ความเค้นนอร์มัลในแนวแกน y และความเค้นเฉือนที่ตั้งฉากกับแกน x และมีทิศทางตามแกน y ตามลำดับ และเขียนอนุพันธ์ของความเค้นทั้งสามด้วยเวกเตอร์อนุพันธ์ของความเค้นหรือ $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial s_i} \right\}$ ซึ่งคำนวณได้โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องดังนี้ (Shyy *et al.*, 1988)

$$\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial s_i} \right\} = \frac{\{\sigma(s_i + ds_i)\} - \{\sigma(s_i)\}}{ds_i} \quad (2.40)$$

โดยที่ $\{\sigma(s_i + ds_i)\}$ คือเวกเตอร์ของความเค้นเมื่อเปลี่ยนค่าตัวแปรออกแบบ s_i ซึ่งคำนวณจาก $\{D(s_i + ds_i)\}$ โดยที่ $\{D(s_i + ds_i)\}$ คือสนามของการจัดของรูปร่างชิ้นงานเมื่อเปลี่ยนค่าตัวแปรออกแบบและมีความสัมพันธ์ดังนี้ (Shyy *et al.*, 1988)

$$\{D(s_i + ds_i)\} = \{D(s_i)\} + \left\{ \frac{\partial D}{\partial s_i} \right\} ds_i \quad (2.41)$$

เมื่อ $\left\{ \frac{\partial D}{\partial s_i} \right\}$ คืออนุพันธ์ของสนามการจัดซึ่งคำนวณจากการหาอนุพันธ์ของสมการสมดุลไฟไนต์อีลิเมนต์ในสมการที่ (2.36) เทียบกับตัวแปรออกแบบ สมการ (2.36) เมื่อเขียนใหม่จะได้

$$[K]\{D\} = \{R\} \quad (2.42)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (2.42) เทียบกับตัวแปรออกแบบ s_i และจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$[K] \left\{ \frac{\partial D}{\partial s_i} \right\} = \left(\left\{ \frac{\partial R}{\partial s_i} \right\} - \left[\frac{\partial K}{\partial s_i} \right] \{D\} \right) \quad (2.43)$$

จากสมการ (2.43) พบว่าการหาค่าอนุพันธ์ของสนามการขจัดกระทำได้โดยการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยเวกเตอร์ของแรงตัวใหม่นั้นคือพจน์ขวามือของสมการ (2.43) และเรียกเวกเตอร์ของแรงนี้ว่าแรงชู้โด (Pseudo-loads) (Shyy *et al.*, 1988) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\{g_i\} = \left(\left\{ \frac{\partial R}{\partial s_i} \right\} - \left[\frac{\partial K}{\partial s_i} \right] \{D\} \right) \quad (2.44)$$

จากสมการ (2.44) พบว่า พจน์ทางขวามือประกอบด้วยอนุพันธ์ของเวกเตอร์แรงและอนุพันธ์ของเมตริกซ์ความแข็งแรง โดยอนุพันธ์ของเวกเตอร์แรงมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับอนุพันธ์ของเมตริกซ์ความแข็งแรง ทั้งนี้เนื่องจากแรงที่กระทำกับชิ้นงานมีขนาดและทิศทางคงที่ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นงานเพียงเล็กน้อยจะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของแรงที่กระทำที่ขอบชิ้นงาน ดังนั้นจึงกำหนดให้พจน์ของอนุพันธ์ของเวกเตอร์แรงมีค่าเป็นศูนย์ สมการ (2.44) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\{g_i\} = - \left[\frac{\partial K}{\partial s_i} \right] \{D\} \quad (2.45)$$

การหาอนุพันธ์ของเมตริกซ์ความแข็งแรงเทียบกับตัวแปรออกแบบในสมการ (2.45) กระทำโดยการประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องดังนี้

$$\left[\frac{\partial K}{\partial s_i} \right] = \frac{[K(s_i + ds_i)] - [K(s_i)]}{ds_i} \quad (2.46)$$

2.10.2 เกรเดียนของปริมาตร

การอพทิมัซซ์ชิ้นงานกำหนดให้เป็นการอพทิมัซซ์ชิ้นงานในสองมิติโดยกำหนดให้ชิ้นงานมีความหนาคงที่และสม่ำเสมอ ปริมาตรของชิ้นงานคำนวณได้จาก

$$V = \iint_{\Omega} t dx dy \quad (2.47)$$

โดยที่ t คือความหนาของชิ้นงาน

วิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์อีลิเมนต์วิเคราะห์ชิ้นงานโดยแบ่งชิ้นงานออกเป็นกลุ่มของอีลิเมนต์ ดังนั้นการหาปริมาตรของชิ้นงานกระทำได้โดยการรวมปริมาตรของแต่ละอีลิเมนต์ด้วยความสัมพันธ์คือ

$$V = \sum_{i=1}^m V_i \quad (2.48)$$

โดยที่ V_i คือปริมาตรของอีลิเมนต์ i และ m คือจำนวนของอีลิเมนต์ทั้งหมด การหาปริมาตรของอีลิเมนต์พบว่ากระทำได้ยากในระบบพิกัด xy ดังนั้นการหาปริมาตรของอีลิเมนต์ในระบบพิกัดธรรมชาติสามารถกระทำได้ง่ายกว่า โดยฟังก์ชันแมปปิงของเส้นขอบเบซิเอร์และเส้นขอบบี-สไปไลน์เพื่อแมปอีลิเมนต์ระหว่างระบบพิกัด xy และระบบพิกัดธรรมชาติแสดงวิธีการไว้ในหัวข้อ 2.8 การหาปริมาตรของอีลิเมนต์ในระบบพิกัดธรรมชาติคำนวณได้ดังนี้

$$V_i = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} t \det[J] d\xi d\eta \quad (2.49)$$

โดยที่ $[J]$ คือเมตริกซ์ของจาโคเบียนซึ่งเป็นความสัมพันธ์ของอัตราส่วนพื้นที่ $dxdy$ และ $d\xi d\eta$ เมตริกซ์ของจาโคเบียนคำนวณจาก

$$[J] = \begin{bmatrix} x(\xi, \eta)_{,\xi} & y(\xi, \eta)_{,\xi} \\ x(\xi, \eta)_{,\eta} & y(\xi, \eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

โดยที่ $x(\xi, \eta)_{,\xi}$ และ $x(\xi, \eta)_{,\eta}$ คืออนุพันธ์ของฟังก์ชันแมปปิง $x(\xi, \eta)$ เทียบกับ ξ และ η ตามลำดับ และ $y(\xi, \eta)_{,\xi}$ และ $y(\xi, \eta)_{,\eta}$ คืออนุพันธ์ของฟังก์ชันแมปปิง $y(\xi, \eta)$ เทียบกับ ξ และ η ตามลำดับ

เกรเดียนของปริมาตรชิ้นงานคือการหาอนุพันธ์ของปริมาตรชิ้นงานเทียบกับตัวแปรออกแบบ s_i ตามความสัมพันธ์คือ

$$\nabla V = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial s_1} \\ \frac{\partial V}{\partial s_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial s_g} \end{array} \right\} \quad (2.51)$$

โดยที่ V คือปริมาณของชิ้นงาน อนุพันธ์ของปริมาตรชิ้นงานเทียบกับตัวแปรออกแบบ s_i โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องคือ

$$\frac{\partial V}{\partial s_i} = \frac{V(s_i + ds_i) - V(s_i)}{ds_i} \quad (2.52)$$

โดยที่ $V(s_i)$ และ $V(s_i + ds_i)$ คือปริมาณของชิ้นงานก่อนและหลังเปลี่ยนค่าของตัวแปรออกแบบตามลำดับ