

บทที่ 2 ทฤษฎี

ในบทนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์เคเบิลได้ทะเล โดยคำนึงถึงผลของการยึดตัวตามแนวแกนของเคเบิล การวิเคราะห์ในระบบพิกัดสามมิติจะช่วยให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น เนื่องจากสภาพการใช้งานของเคเบิลโดยทั่วไป ส่วนใหญ่จะถูกแรงกระทำที่ไม่อยู่ในแนวระนาบเดียวกับเคเบิล ดังนั้นการวิเคราะห์เคเบิลได้ทะเลเพื่อหาสถานะสมดุลสถิตที่เหมาะสมกับการประยุกต์ใช้งานจริง และสามารถนำไปใช้ได้หลากหลาย ควรพิจารณาถึงผลกระทบของการยึดตัวตามแนวแกนในสามมิติ โดยการวิเคราะห์จะเป็นการหาสถานะสมดุลของเคเบิลได้ทะเล ภายใต้แรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ แรงลอยตัว น้ำหนักของเคเบิลเอง รวมถึงแรงดันน้ำที่ระดับความลึกที่พิจารณา

2.1 สมมติฐานของการวิเคราะห์

สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์เคเบิลได้ทะเลในสามมิติมีดังนี้

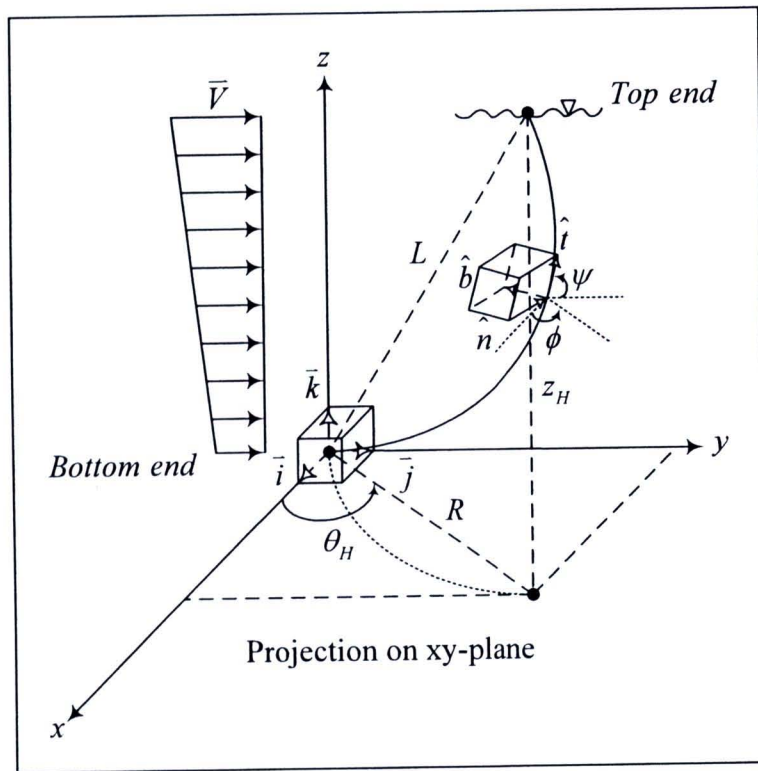
1. ขนาดหน้าตัดของเคเบิลสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันตลอดความยาว
2. วัสดุเป็นแบบเชิงเส้น
3. เคเบิลรับแรงตามแนวแกนเพียงอย่างเดียว ไม่สามารถรับแรงคดได้
4. มวลต่อหน่วยปริมาตรของเคเบิลไม่เปลี่ยนแปลง ภายใต้สภาวะที่เคเบิลเกิดการยึดตัวตามแนวแกน
5. ความเร็วของกระแสน้ำคงที่ตลอดความลึกของน้ำทะเล

2.2 รูปแบบจำลองของการวิเคราะห์

เคเบิลจัดเป็นส่วนประกอบที่สำคัญในการยึดรั้งโครงสร้างที่ลอยอยู่ที่ระดับผิวน้ำให้อยู่กับที่ หรืออยู่ในบริเวณที่ต้องการ รูปที่ 2.1 แสดงลักษณะการวางตัวของเคเบิลได้ทะเล ณ สภาวะสมดุล โดยที่ปลายทั้งสองของเคเบิลถูกจำลองให้มีตำแหน่งการวางตัวที่แน่นอน โดยที่ปลายบนถูกยึดติดกับโครงสร้างด้านบนหรือท่อนลอยในทะเล ส่วนปลายล่างจะยึดติดกับจตุรรองรับที่ท้องทะเล การวิเคราะห์เคเบิลได้ทะเลนั้น เคเบิลจะถูกแรงกระทำตลอดความยาวของเคเบิล อันได้แก่ แรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ แรงดันน้ำ แรงลอยตัว และน้ำหนักของเคเบิลเอง โดยแรงทั้งหลายเหล่านี้ล้วนแต่มีผลต่อลักษณะการวางตัวของเคเบิลในสภาวะสมดุลทั้งสิ้น

การวิเคราะห์ปัญหาของเคเบิลในสามมิติ ในงานวิจัยนี้จะใช้ระบบพิกัดทรงกระบอกในการวิเคราะห์ โดยมี $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตามแนวแกน r, θ , และ z ตามลำดับ ซึ่งเคเบิลที่ทำกรวิเคราะห์นั้นจะต้องทราบค่าความยาวของเคเบิลก่อนเกิดการยึดตัว (s_l) หรือทราบค่าแรงดึงที่ปลายบนของเคเบิล (T_H) ที่ทำให้เคเบิลอยู่ในสภาวะสมดุล และกำหนดจุดพิกัดแสดงตำแหน่งการ

วางตัวของเคเบิลที่ปลายทั้งสอง รวมทั้งข้อมูลทางกายภาพของเคเบิล ได้แก่ ความเร็วของกระแสน้ำ (V), น้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิล (W_c), เส้นผ่านศูนย์กลางของหน้าตัดเคเบิล (D), ค่าสัมประสิทธิ์แรงลากของเคเบิล (C) และข้อมูลทางกายภาพของทะเล เช่น ความลึกของเคเบิล (z_H), ความหนาแน่นของน้ำทะเล (ρ_w) สำหรับทิศทางความเร็วของกระแสน้ำ (θ_H) กำหนดให้มีความเร็วทางแนวระดับ (x, y) เท่านั้น การวิเคราะห์ปัญหาของเคเบิลในสามมิติจะนำคุณสมบัติของเวกเตอร์มาช่วยในการวิเคราะห์ จึงจะขอก้าวถึงคุณสมบัติและความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ของระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดทรงกระบอก ก่อนจะทำกรวิเคราะห์ดังนี้

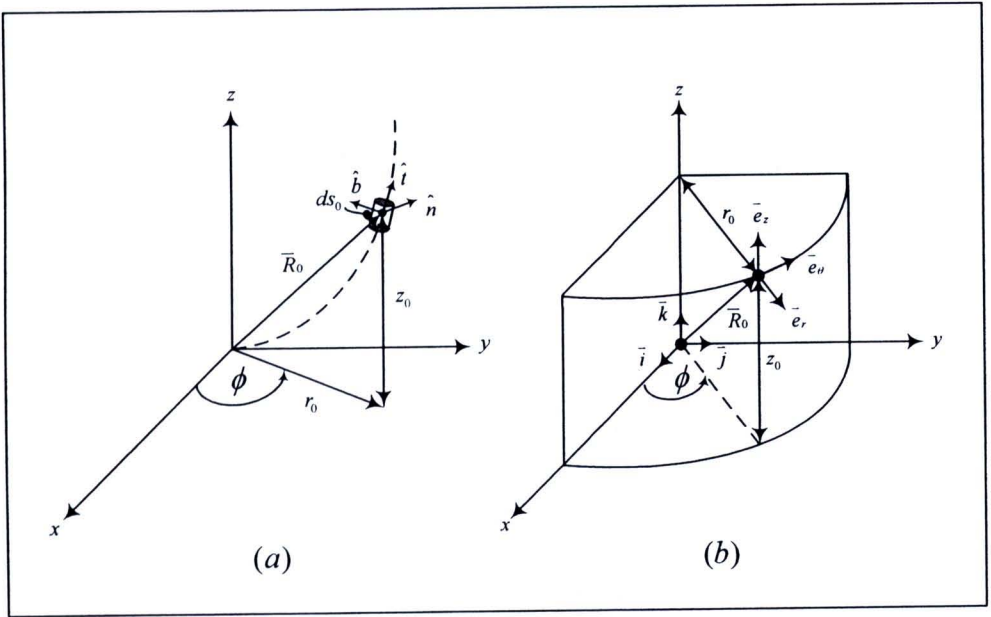


รูปที่ 2.1 ลักษณะการวางตัวของเคเบิลใต้ทะเลในสามมิติที่สภาวะสมดุล

จากรูปที่ 2.1 เวกเตอร์ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตามแนวแกน x, y, z ตามลำดับ และ เวกเตอร์ $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดยกำหนดให้เวกเตอร์ $\hat{t}$ มีทิศทางตามแนวแกนของเคเบิล และให้เวกเตอร์ $\hat{n}$ และ $\hat{b}$ มีทิศทางที่ตั้งฉากกับแนวแกนของเคเบิล ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ กับเวกเตอร์ $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ เป็นดังต่อไปนี้คือ มุม ψ เป็นมุมระหว่างระนาบ $x-y$ กับเวกเตอร์ $\hat{t}$ และมีมุม ϕ เป็นมุมระหว่างเส้นโปรเจกชันของเวกเตอร์ $\hat{t}$ กับระนาบ $x-z$ โดยที่เวกเตอร์ $\hat{n}$ อยู่ในระนาบ $x-y$ ซึ่งความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ทั้งสองคือ

$$\begin{aligned}
 \hat{t} &= (\cos\psi \cos\phi)\bar{i} + (\cos\psi \sin\phi)\bar{j} + (\sin\psi)\bar{k} \\
 \hat{n} &= -(\sin\phi)\bar{i} + (\cos\phi)\bar{j} \\
 \hat{b} &= -(\sin\psi \cos\phi)\bar{i} - (\sin\psi \sin\phi)\bar{j} + (\cos\psi)\bar{k}
 \end{aligned}
 \tag{2.1 ก,ข,ค}$$

ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดทรงกระบอกสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.2 โดยพิจารณาจากลักษณะรูปร่างของชิ้นส่วนย่อย ds_0 ให้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.2 ทิศทางของเวกเตอร์ และการวางตัวของเคเบิลในสามมิติ

(a) การวางตัวของชิ้นส่วนย่อย ds_0 ของเคเบิลในสามมิติ

(b) ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดทรงกระบอก

จากรูปที่ 2.2 (b) เวกเตอร์ $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตามแนวแกน r, θ , และ z ตามลำดับสามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z$ กับเวกเตอร์ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_r &= (\cos\phi)\bar{i} + (\sin\phi)\bar{j} \\
 \bar{e}_\theta &= -(\sin\phi)\bar{i} + (\cos\phi)\bar{j} \\
 \bar{e}_z &= \bar{k}
 \end{aligned}
 \tag{2.2 ก,ข,ค}$$

และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ $\hat{i}, \hat{n}, \hat{b}$ กับเวกเตอร์ $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{i} &= (\cos \psi) \bar{e}_r + (\sin \psi) \bar{e}_z \\ \hat{n} &= \bar{e}_\theta \\ \hat{b} &= -(\sin \psi) \bar{e}_r + (\cos \psi) \bar{e}_z\end{aligned}\tag{2.3 ก,ข,ค}$$

พิจารณาลักษณะรูปร่างของชิ้นส่วนย่อยของเคเบิล ds_0 โดยมีเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยดังนี้

$$\bar{R}_0 = (r_0 \cos \theta_0) \bar{i} + (r_0 \sin \theta_0) \bar{j} + (z_0) \bar{k}\tag{2.4}$$

พิจารณาสมการที่ (2.4) โดยใช้กฎลูกโซ่จะได้

$$d\bar{R}_0 = \frac{\partial \bar{R}_0}{\partial r_0} dr_0 + \frac{\partial \bar{R}_0}{\partial \theta_0} d\theta_0 + \frac{\partial \bar{R}_0}{\partial z_0} dz_0\tag{2.5}$$

$$d\bar{R}_0 = (\cos \theta_0 \bar{i} + \sin \theta_0 \bar{j}) dr_0 + (-r_0 \sin \theta_0 \bar{i} + r_0 \cos \theta_0 \bar{j}) d\theta_0 + (\bar{k}) dz_0\tag{2.6}$$

$$d\bar{R}_0 = (\cos \theta_0 dr_0 - r_0 \sin \theta_0 d\theta_0) \bar{i} + (\sin \theta_0 dr_0 + r_0 \cos \theta_0 d\theta_0) \bar{j} + (dz_0) \bar{k}\tag{2.7}$$

เมื่อพิจารณาลักษณะรูปร่างของชิ้นส่วนย่อยของเคเบิล ds_0 ณ สภาวะสมดุลซึ่งเป็นสภาวะที่เคเบิลเกิดการยืดตัวตามแนวแกน จะได้ว่าความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็กๆ ขณะเกิดความเครียด (ds_0) มีความสัมพันธ์กับ $dr_0, d\theta_0$, และ dz_0 ดังนี้

$$ds_0 = \sqrt{(d\bar{R}_0) \cdot (d\bar{R}_0)}\tag{2.8}$$

$$ds_0^2 = (\cos \theta_0 dr_0 - r_0 \sin \theta_0 d\theta_0)^2 + (\sin \theta_0 dr_0 + r_0 \cos \theta_0 d\theta_0)^2 + (dz_0)^2\tag{2.9}$$

$$ds_0^2 = (dr_0)^2 + (r_0 d\theta_0)^2 + (dz_0)^2\tag{2.10}$$

กำหนดให้สัญลักษณ์ $(\cdot)$ เป็นการหาดิฟเฟอเรนเชียลเทียบกับ z_0 อันได้แก่ $\theta_0' = \frac{d\theta_0}{dz_0}$, $r_0' = \frac{dr_0}{dz_0}$ ดังนั้น จากสมการที่ (2.10) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$ds_0 = \sqrt{(1 + (r_0\theta_0')^2 + (r_0')^2)} dz_0 \quad (2.11)$$

$$s_0' = \sqrt{(1 + (r_0\theta_0')^2 + (r_0')^2)} \quad (2.12)$$

$$ds_0 = (s_0') dz_0 \quad (2.13)$$

จากนิยามความเครียด (Strain definition) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\varepsilon_0 = \frac{ds_0 - ds}{ds} = \frac{ds_0}{ds} - 1 \quad (2.14)$$

$$ds_0 = (1 + \varepsilon_0) ds \quad (2.15)$$

จากสมการที่ (2.13) และสมการที่ (2.15) สามารถจัดรูปสมการใหม่ในเทอมของ ds ได้ดังนี้

$$ds = \left(\frac{s_0'}{1 + \varepsilon_0} \right) dz_0 \quad (2.16)$$

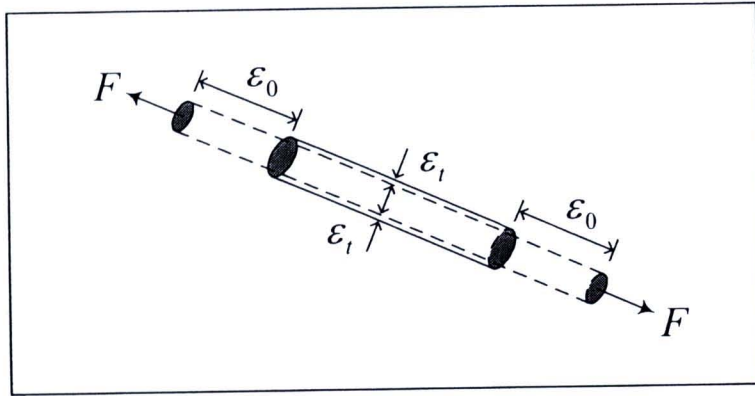
โดยที่ ε_0 คือ ความเครียดในแนวแกน ณ ตำแหน่งสมดุล

ds คือ ความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็กๆ ขณะยังไม่เกิดความเครียด (Unstrained arc-length)

ds_0 คือ ความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็กๆ ขณะเกิดความเครียด (Strained arc-length)

สมมติให้เคเบิลมีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลม พิจารณาหาความสัมพันธ์ของพื้นที่หน้าตัดของเคเบิลในขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด และขณะที่เกิดความเครียด จากรูปที่ 2.3 พิจารณาพื้นที่หน้าตัดของเคเบิลขณะที่ถูกแรงกระทำจะได้

$$A_0 = \frac{\pi}{4} D_0^2, \quad D_0 = \sqrt{\frac{4A_0}{\pi}} \quad (2.17)$$



รูปที่ 2.3 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่หน้าตัดเคเบิลภายใต้แรงกระทำ

จากนิยามของอัตราส่วนปัวซอง (ν) สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\nu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_t = \nu \varepsilon_0 \quad (2.18)$$

เมื่อ ε_t คือ ความเครียดทางขวาง
 ε_0 คือ ความเครียดทางยาว

จากนิยามความเครียดจะได้ว่า

$$\varepsilon_t = \frac{D - D_0}{D}, \quad D_0 = D(1 - \varepsilon_t) \quad (2.19)$$

แทนค่าสมการที่ (2.18) ลงในสมการที่ (2.19) จะได้ความสัมพันธ์ของเส้นผ่านศูนย์กลางของเคเบิล ขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด และขณะที่เกิดความเครียดดังนี้

$$D_0 = D(1 - \nu \varepsilon_0) \quad (2.20)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ความสัมพันธ์ของพื้นที่หน้าตัดของเคเบิล ขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด และขณะที่เกิดความเครียดดังนี้

$$A_0 = A(1 - \nu \varepsilon_0)^2 \quad (2.21)$$

- โดยที่ D_0 คือ เส้นผ่านศูนย์กลางกลางของเคเบิลขณะที่เกิดความเครียด
- D คือ เส้นผ่านศูนย์กลางกลางของเคเบิลขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด
- A_0 คือ พื้นที่หน้าตัดของเคเบิลขณะที่เกิดความเครียด
- A คือ พื้นที่หน้าตัดของเคเบิลขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด

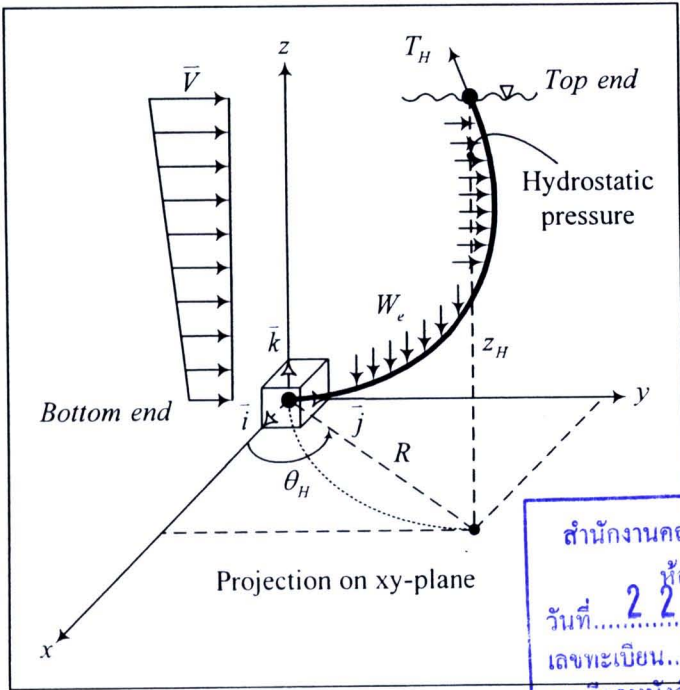


2.3 การวิเคราะห์เคเบิลได้ทะเล

การวิเคราะห์เคเบิลได้ทะเลนั้นสามารถทำการวิเคราะห์ลักษณะของแรงที่มากระทำกับเคเบิลได้หลายลักษณะ ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะการนำไปใช้งานของเคเบิล ในงานวิจัยนี้จะทำการแบ่งลักษณะของการวิเคราะห์สมดุลทางสถิตยศาสตร์ของเคเบิลได้ทะเลออกเป็นสองลักษณะคือ การวิเคราะห์เคเบิลได้ทะเลแบบทั่วไป และการวิเคราะห์เคเบิลได้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว

2.3.1 การวิเคราะห์เคเบิลได้ทะเลแบบทั่วไป

การหาสถานะสมดุลในทะเลของเคเบิลได้ทะเลแบบทั่วไป จะทำการพิจารณาแรงที่มากระทำในรูปแบบต่างๆ คือ แรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ แรงลอยตัว น้ำหนักของเคเบิลเอง และแรงดันน้ำที่ระดับความลึกที่พิจารณา โดยที่แรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำที่กระทำจะมีทิศทางตั้งฉากและสัมพันธ์กับความยาวของเคเบิลตลอดความลึก แสดงดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แรงที่มากระทำกับเคเบิลได้ทะเลแบบทั่วไป

1. พิจารณาแรงที่มากระทำกับเคเบิล

ในกรณีปัญหาของเคเบิลได้ทะเลแบบทั่วไป จะทำการพิจารณาแรงที่มากระทำดังนี้

- แรงดึงประสิทธิผล (Effective tension) เป็นแรงดึงที่เกิดขึ้นจริงในเคเบิล รวมกับผลที่เกิดจากแรงดันของน้ำที่กระทำกับเคเบิลซึ่ง Spark [21] ได้เสนอสมการแรงดึงประสิทธิผลดังนี้

$$T = EA\varepsilon_0 + 2\nu\rho_w gA(1 - \nu\varepsilon_0)^2(z_H - z_0) \quad (2.22)$$

โดยที่	T	คือ แรงดึงประสิทธิผล
	E	คือ โมดูลัสความยืดหยุ่น
	ρ_w	คือ ความหนาแน่นของน้ำทะเล
	g	คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
	z_0	คือ ความลึกของเคเบิล ณ ตำแหน่งที่พิจารณา
	z_H	คือ ความลึกของเคเบิล

- น้ำหนักประสิทธิผล (Effective weight) เป็นผลต่างระหว่างน้ำหนักของเคเบิลในอากาศ กับแรงลอยตัวที่เกิดจากเคเบิลไปแทนที่น้ำทะเล สมการของน้ำหนักประสิทธิผลสามารถเขียนได้ดังนี้

$$W_e = W_c - \rho_w gAf \quad (2.23)$$

เมื่อ

$$f = (1 - \nu\varepsilon_0)^2(1 + \varepsilon_0) \quad (2.24)$$

โดยที่	W_e	คือ น้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิล ต่อหน่วยความยาวของเคเบิลขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด ($\varepsilon_0 = 0$)
	W_c	คือ น้ำหนักของเคเบิลในอากาศ ต่อหน่วยความยาวของเคเบิลขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด ($\varepsilon_0 = 0$)
	f	คือ แฟกเตอร์ในการปรับค่า เนื่องจากผลของอัตราส่วนปัวซอง

ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิล กับความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็กๆ ในขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด (ds) และขณะที่เกิดความเครียด (ds_0) เป็นดังนี้

$$W_{e0}ds_0 = W_e ds \quad (2.25)$$

แทนค่าสมการที่ (2.15) ลงในสมการที่ (2.25) จะได้

$$W_{e0}(1+\varepsilon_0)ds = W_e ds, \quad W_{e0} = \frac{W_e}{1+\varepsilon_0} \quad (2.26)$$

โดยที่ W_{e0} คือ น้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิล ต่อหน่วยความยาวของเคเบิลขณะที่เกิด
ความเครียด ($\varepsilon_0 \neq 0$)

- แรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ (Fluid drag force) ในการวิเคราะห์แรงลาก
เนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ จะพิจารณาความเร็วของกระแสน้ำทิศทางในแนวราบ (x, y)
ความเร็วของกระแสน้ำ $\bar{V}$ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก และระบบ
พิกัดทรงกระบอกตามลำดับได้ดังนี้

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} \quad (2.27)$$

$$\bar{V} = V_r \bar{e}_r + V_\theta \bar{e}_\theta + V_z \bar{e}_z \quad (2.28)$$

จากสมการที่ (2.2 ก,ข,ค) ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z$ กับเวกเตอร์ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ นำไปแทนค่า
ลงในสมการที่ (2.27) จะได้

$$\bar{V} = V_x (\cos \phi \bar{e}_r - \sin \phi \bar{e}_\theta) + V_y (\sin \phi \bar{e}_r + \cos \phi \bar{e}_\theta) + V_z (\bar{e}_z) \quad (2.29)$$

$$\bar{V} = (V_x \cos \phi + V_y \sin \phi) \bar{e}_r + (-V_x \sin \phi + V_y \cos \phi) \bar{e}_\theta + (V_z) \bar{e}_z \quad (2.30)$$

สามารถหาค่า V_r, V_θ , และ V_z ได้จากสมการที่ (2.28) และสมการที่ (2.30) ดังนี้

$$\begin{aligned} V_r &= V_x \cos \phi + V_y \sin \phi \\ V_\theta &= -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi \\ V_z &= V_z \end{aligned} \quad (2.31 \text{ ก,ข,ค})$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
 V_x &= V_{cx} + V_{Lx}z_0 \\
 V_y &= V_{cy} + V_{Ly}z_0 \\
 V_z &= V_{cz}
 \end{aligned}
 \tag{2.32 ก,ข,ค}$$

โดยที่ $\bar{V}$	คือ เวกเตอร์ความเร็วของกระแสน้ำ
V_x	คือ องค์ประกอบความเร็วของกระแสน้ำในทิศทาง $\bar{i}$
V_y	คือ องค์ประกอบความเร็วของกระแสน้ำในทิศทาง $\bar{j}$
V_z	คือ องค์ประกอบความเร็วของกระแสน้ำในทิศทาง $\bar{k}$
V_r	คือ องค์ประกอบความเร็วของกระแสน้ำในทิศทาง $\bar{e}_r$
V_θ	คือ องค์ประกอบความเร็วของกระแสน้ำในทิศทาง $\bar{e}_\theta$
V_{cx}	คือ องค์ประกอบของความเร็วของกระแสน้ำคงที่ในทิศทาง $\bar{i}$
V_{cy}	คือ องค์ประกอบของความเร็วของกระแสน้ำคงที่ในทิศทาง $\bar{j}$
V_{cz}	คือ องค์ประกอบของความเร็วของกระแสน้ำคงที่ในทิศทาง $\bar{k}$
V_{Lx}	คือ องค์ประกอบของความเร็วของกระแสน้ำแปรเปลี่ยนตามความลึกในทิศทาง $\bar{i}$
V_{Ly}	คือ องค์ประกอบของความเร็วของกระแสน้ำแปรเปลี่ยนตามความลึกในทิศทาง $\bar{j}$

ขนาดของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทาง $\hat{i}, \hat{n}$, และ $\hat{b}$ หาได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ $\hat{i}, \hat{n}, \hat{b}$ กับเวกเตอร์ $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z$ ตามสมการที่ (2.3 ก,ข,ค) จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 u_s &= \bar{V} \cdot \hat{i} = V_r \cos \psi + V_z \sin \psi = V_x \cos \psi \cos \phi + V_y \cos \psi \sin \phi + V_z \sin \psi \\
 v_s &= \bar{V} \cdot \hat{n} = V_\theta = -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi \\
 w_s &= \bar{V} \cdot \hat{b} = -V_r \sin \psi + V_z \cos \psi = -V_x \sin \psi \cos \phi - V_y \sin \psi \sin \phi + V_z \cos \psi
 \end{aligned}
 \tag{2.33 ก,ข,ค}$$

โดยที่ u_s	คือ ขนาดความเร็วของกระแสน้ำในทิศทาง $\hat{i}$
v_s	คือ ขนาดความเร็วของกระแสน้ำในทิศทาง $\hat{n}$
w_s	คือ ขนาดความเร็วของกระแสน้ำในทิศทาง $\hat{b}$
ψ	คือ มุมระหว่างระนาบ $x-y$ กับเวกเตอร์ $\hat{i}$
ϕ	คือ มุมระหว่างแกน x กับโปรเจกชันของเวกเตอร์ $\hat{i}$ ในระนาบ $x-y$

แรงลาก (Drag force) อันเนื่องมาจากความเร็วของกระแสน้ำจะกระทำต่อเคเบิลในทิศทางตั้งฉาก และ สัมผัสกับเคเบิล โดยพิจารณาแรงออกเป็นสองส่วน คือ ในส่วนแรกแรงลากที่กระทำต่อเคเบิลใน ทิศทางตั้งฉาก เกิดขึ้นเนื่องจากการย้ายเวกเตอร์ความเร็วของกระแสน้ำให้อยู่ในทิศทางตั้งฉาก (V_N) กับเคเบิล และในทำนองเดียวกันแรงลากที่กระทำในทิศทางสัมผัสกับเคเบิล ก็มีผลมาจากการย้าย เวกเตอร์ความเร็วของกระแสน้ำให้อยู่ในทิศทางสัมผัส (V_T) กับเคเบิล ซึ่งถูกนำเสนอโดยงานวิจัย ของ Friswell [15]

$$D_F = C_T V_T |V_T| + C_N V_N |V_N| \quad (2.34)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} V_T &= u_s \cdot \hat{t} \\ V_N &= v_s \cdot \hat{n} + w_s \cdot \hat{b} \end{aligned} \quad (2.35 \text{ ก,ข})$$

และ

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{1}{2} \rho_w D \pi C_{DT} (1 - \nu \varepsilon_0) \\ C_N &= \frac{1}{2} \rho_w D C_{DN} (1 - \nu \varepsilon_0) \end{aligned} \quad (2.36 \text{ ก,ข})$$

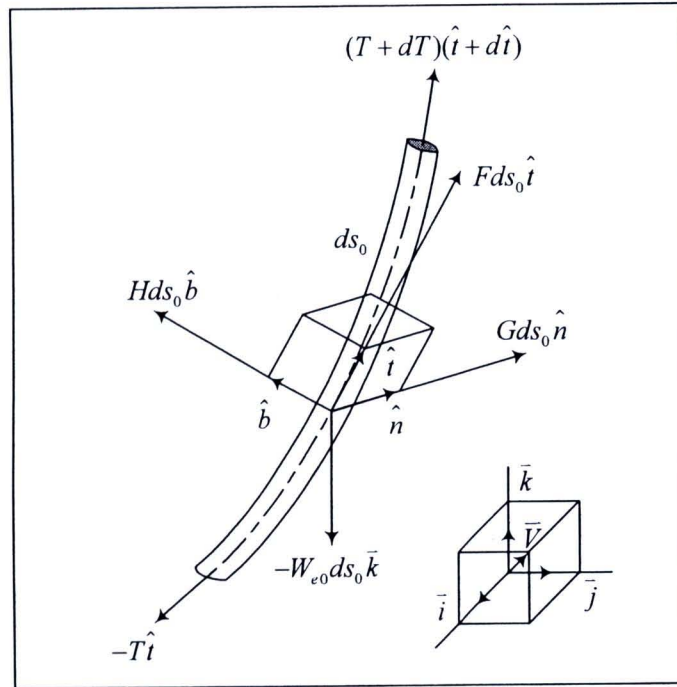


โดยที่	D_F	คือ เวกเตอร์แรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ
	V_T	คือ เวกเตอร์ความเร็วกระแสน้ำในแนวสัมผัสกับเคเบิล
	V_N	คือ เวกเตอร์ความเร็วกระแสน้ำในแนวตั้งฉากกับเคเบิล
	C_T	คือ สัมประสิทธิ์รวมของแรงลากในแนวสัมผัสกับเคเบิล
	C_N	คือ สัมประสิทธิ์รวมของแรงลากในแนวตั้งฉากกับเคเบิล
	C_{DT}	คือ สัมประสิทธิ์ของแรงลากในแนวสัมผัสกับเคเบิล
	C_{DN}	คือ สัมประสิทธิ์ของแรงลากในแนวตั้งฉากกับเคเบิล

สามารถหาสมการแรงลากได้จากการแทนค่าสมการที่ (2.35 ก, ข) ลงในสมการที่ (2.34) ดังนี้

$$D_F = C_T u_s |u_s| \hat{t} + C_N (v_s \cdot \hat{n} + w_s \cdot \hat{b}) \sqrt{(v_s^2 + w_s^2)} \quad (2.37)$$

แรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำทำให้เกิดแรงในทิศทางตั้งฉาก และทิศทางสัมผัสกับเคเบิล อันได้แก่ F, G , และ H โดยมีทิศทางตามแนวเวกเตอร์ $\hat{t}, \hat{n}$, และ $\hat{b}$ ตามลำดับ ซึ่งถ้านำมาพิจารณากับชิ้นส่วนย่อย ds_0 ของเคเบิลที่สภาวะสมดุล จะมีแรงกระทำกับชิ้นส่วนย่อย ds_0 ตามรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แรงกระทำที่เกิดขึ้นกับชิ้นส่วนย่อย ds_0 ในสภาวะสมดุล กรณีเคเบิลได้ทะเลแบบทั่วไป

จากสมการที่ (2.37) สามารถแยกองค์ประกอบของแรงที่กระทำต่อเคเบิลในทิศทางสัมผัส และตั้งฉากกับเคเบิลตามทิศทางของเวกเตอร์ $\hat{t}, \hat{n}$, และ $\hat{b}$ โดยเขียนให้อยู่ในรูปของ F, G , และ H ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} F &= C_T u_s |u_s| \\ G &= C_N v_s \sqrt{(v_s^2 + w_s^2)} \\ H &= C_N w_s \sqrt{(v_s^2 + w_s^2)} \end{aligned} \quad (2.38 \text{ ก, ข, ค})$$

แรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางสัมผัส และตั้งฉากกับเคเบิล F, G , และ H สามารถเขียนให้อยู่ในรูปขององค์ประกอบของแรง ในระบบพิกัดทรงกระบอกได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
F_r &= F\hat{t} \cdot \bar{e}_r = F \cos \psi \\
F_\theta &= F\hat{t} \cdot \bar{e}_\theta = 0 \\
F_z &= F\hat{t} \cdot \bar{e}_z = F \sin \psi
\end{aligned}
\tag{2.39 ก,ข,ค}$$

$$\begin{aligned}
G_r &= G\hat{n} \cdot \bar{e}_r = 0 \\
G_\theta &= G\hat{n} \cdot \bar{e}_\theta = G \\
G_z &= G\hat{n} \cdot \bar{e}_z = 0
\end{aligned}
\tag{2.40 ก,ข,ค}$$

$$\begin{aligned}
H_r &= H\hat{b} \cdot \bar{e}_r = -H \sin \psi \\
H_\theta &= H\hat{b} \cdot \bar{e}_\theta = 0 \\
H_z &= H\hat{b} \cdot \bar{e}_z = H \cos \psi
\end{aligned}
\tag{2.41 ก,ข,ค}$$

โดยที่ F คือ แรงลากในแนวสัมผัสกับเคเบิล มีทิศทางตาม $\hat{t}$
 G คือ แรงลากในแนวตั้งฉากกับเคเบิล มีทิศทางตาม $\hat{n}$
 H คือ แรงลากในแนวตั้งฉากกับเคเบิล มีทิศทางตาม $\hat{b}$

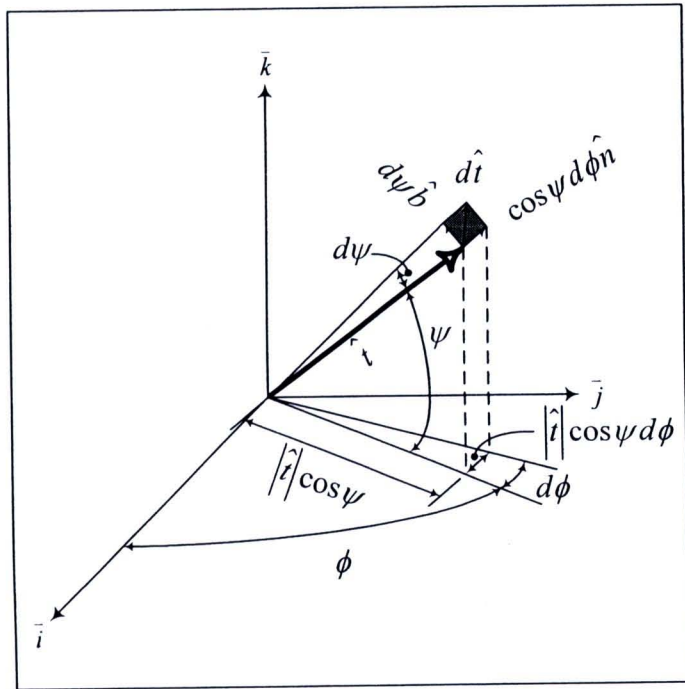
2. การวิเคราะห์สมการสมดุลทางสถิตยศาสตร์

สมการสมดุลของเคเบิลได้ทะเลแบบทั่วไปในระบบพิกัดสามมิติ ซึ่งคำนึงถึงผลของการยืดตัวตามแนวแกนนั้น จะสามารถหาได้จากการพิจารณาลักษณะรูปร่างของชิ้นส่วนย่อยของเคเบิล ds_0 โดยพิจารณาสมการสมดุลตามทิศทางของเวกเตอร์ $\hat{t}, \hat{n}$, และ $\hat{b}$ ส่วนแรงที่มากระทำกับเคเบิลนั้นจะประกอบไปด้วย แรงดึงประสิทธิผล แรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ และน้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิล

จากรูปที่ 2.5 แสดงแรงกระทำที่เกิดขึ้นกับชิ้นส่วนย่อย ds_0 ในสภาวะสมดุล กรณีเคเบิลได้ทะเลแบบทั่วไป ปลายล่างของชิ้นส่วนย่อยของเคเบิล ถูกกระทำด้วยแรงดึง T ซึ่งมีทิศทางตามเวกเตอร์ $\hat{t}$ ส่วนปลายบนถูกกระทำด้วยแรงดึง $T + dT$ มีทิศทางตามเวกเตอร์ $\hat{t} + d\hat{t}$ โดยที่ dT เป็นแรงดึงในเคเบิลที่เปลี่ยนแปลง, $d\hat{t}$ เป็นการเปลี่ยนแปลงทิศทางของเคเบิลที่เกิดขึ้นตามแนวแกน ส่วนแรงกระทำที่มีต่อเคเบิลตลอดความยาวชิ้นส่วนย่อย มีดังนี้ แรงลากซึ่งประกอบไปด้วย แรงลาก F ซึ่งกระทำในทิศทางสัมผัสกับเคเบิล หรือกระทำในทิศทางตามเวกเตอร์ $\hat{t}$ และแรงลาก G กับ H กระทำในทิศทางตั้งฉากกับเคเบิล หรือกระทำในทิศทางตามเวกเตอร์ $\hat{n}$ และ $\hat{b}$ ตามลำดับ และน้ำหนักประสิทธิผล W_{c0} กระทำในทิศทางตามเวกเตอร์ $\hat{k}$

จากรูปที่ 2.6 ความสัมพันธ์การเปลี่ยนแปลงทิศทางของเคเบิล $d\hat{t}$ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$d\hat{t} = (\cos\psi d\phi)\hat{n} + (d\psi)\hat{b} \quad (2.42)$$



รูปที่ 2.6 การเปลี่ยนแปลงทิศทางของเคเบิล

จากรูปที่ 2.5 เมื่อเคเบิลอยู่ในสภาวะสมดุล ผลรวมทางเวกเตอร์ของแรงทั้งหมดเท่ากับศูนย์ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$-T\hat{i} + (T + dT)(\hat{t} + d\hat{t}) + Fds_0\hat{i} + Gds_0\hat{n} + Hds_0\hat{b} - (W_{c0}ds_0)\bar{k} = 0 \quad (2.43)$$

จากสมการที่ (2.43) ตัดเทอมค่าน้อยๆ ที่มีกำลังสูงออก และแทนค่า $d\hat{t}$ จากสมการที่ (2.42) จะได้

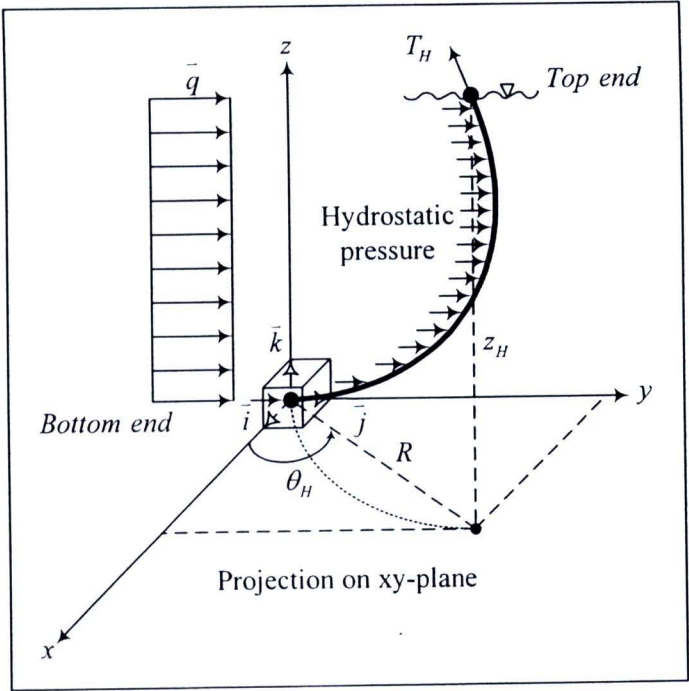
$$(dT + Fds_0)\hat{i} + (T \cos\psi d\phi + Gds_0)\hat{n} + (Td\psi + Hds_0)\hat{b} - (W_{c0}ds_0)\bar{k} = 0 \quad (2.44)$$

จากสมการที่ (2.44) เมื่อทำการพิจารณาตามทิศทางของเวกเตอร์ $\hat{i}, \hat{n}$, และ $\hat{b}$ จะได้สมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของเคเบิลในสภาวะสมดุลดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds_0} &= W_{e0} \sin \psi - F \\ \frac{d\phi}{ds_0} &= -\frac{G}{T \cos \psi} \\ \frac{d\psi}{ds_0} &= \frac{(W_{e0} \cos \psi - H)}{T}\end{aligned}\tag{2.45 ก,ข,ค}$$

2.3.2 การวิเคราะห์เคเบิลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว

เคเบิลใต้ทะเลจะถูกนำมาพิจารณาในกรณีของเคเบิลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว ก็ต่อเมื่อผลของแรงที่มากกระทำเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำมีค่ามากกว่าน้ำหนักของเคเบิลมาก โดยที่องค์ประกอบของแรงในแนวตั้งที่เกิดจากน้ำหนักของเคเบิลจะไม่ถูกนำมาพิจารณา จะทำการพิจารณาแต่แรงลากที่มากกระทำทางด้านข้างโดยมีทิศทางขนานกับผิวน้ำทะเล แสดงดังรูปที่ 2.7 ซึ่งจะสอดคล้องกับแบบจำลองของ Seck-Hong [6] กล่าวคือผลรวมของแรงในแนวตั้งมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยจะแตกต่างกับแบบจำลองของ Berteaux [1] ซึ่งแรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ จะมีทิศทางตั้งฉากและสัมผัสกับเคเบิลตลอดความลึกของน้ำทะเล ส่วนแรงดึงภายในเคเบิลจะมีค่าคงที่และแรงในแนวตั้งต้องนำมาพิจารณาด้วย



รูปที่ 2.7 แรงที่มากกระทำกับเคเบิลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว

1. พิจารณาแรงที่กระทำกับเคเบิล

ในกรณีปัญหาของเคเบิลได้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว จะทำการพิจารณาแรงที่กระทำดังนี้

- แรงดึงดูดประสิทธิผล ดังแสดงไว้ในสมการที่ (2.22)
- แรงลากคงที่ในแนวราบ (Horizontal uniformly drag force) อันเนื่องมาจากความเร็วของกระแสน้ำคงที่ตลอดความลึก แรงลากในแนวราบ $\bar{q}$ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก และระบบพิกัดทรงกระบอกตามลำดับได้ดังนี้

$$\bar{q} = q_x \bar{i} + q_y \bar{j} + q_z \bar{k} \quad (2.46)$$

$$\bar{q} = q_r \bar{e}_r + q_\theta \bar{e}_\theta + q_z \bar{e}_z \quad (2.47)$$

จากสมการที่ (2.2 ก,ข,ค) ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ กับเวกเตอร์ $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z$ นำไปแทนค่าลงในสมการที่ (2.46) จะได้

$$\bar{q} = q_x (\cos \phi \bar{e}_r - \sin \phi \bar{e}_\theta) + q_y (\sin \phi \bar{e}_r + \cos \phi \bar{e}_\theta) + q_z (\bar{e}_z) \quad (2.48)$$

$$\bar{q} = (q_x \cos \phi + q_y \sin \phi) \bar{e}_r + (-q_x \sin \phi + q_y \cos \phi) \bar{e}_\theta + (q_z) \bar{e}_z \quad (2.49)$$

สามารถหาค่า q_r, q_θ , และ q_z ได้จากสมการที่ (2.47) และสมการที่ (2.49) ดังนี้

$$\begin{aligned} q_r &= q_x \cos \phi + q_y \sin \phi \\ q_\theta &= -q_x \sin \phi + q_y \cos \phi \\ q_z &= q_z \end{aligned} \quad (2.50 \text{ ก,ข,ค})$$

โดยที่ $\bar{q}$ คือ เวกเตอร์ของแรงลากในแนวราบเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ

q_x คือ องค์ประกอบของแรงลากในแนวราบในทิศทาง $\bar{i}$

q_y คือ องค์ประกอบของแรงลากในแนวราบในทิศทาง $\bar{j}$

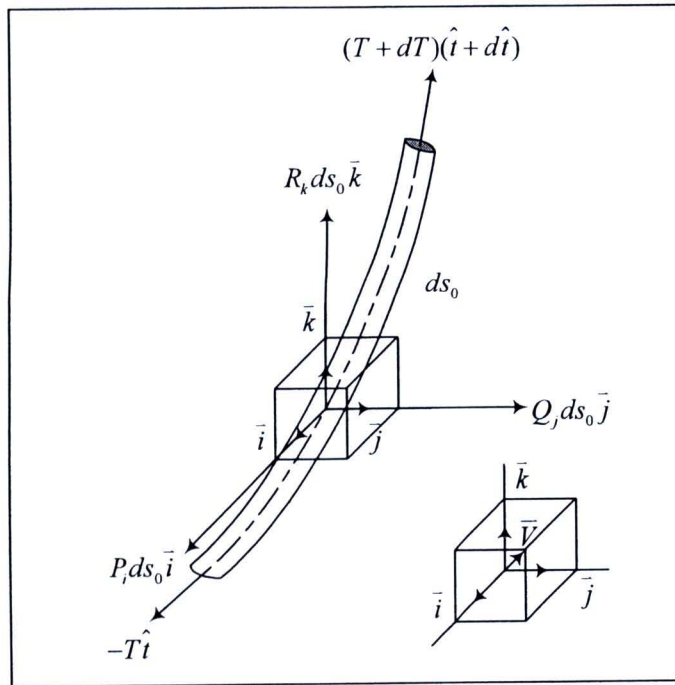
q_z คือ องค์ประกอบของแรงลากในแนวดิ่งในทิศทาง $\bar{k}$

q_r คือ องค์ประกอบของแรงลากในแนวราบในทิศทาง $\bar{e}_r$

q_θ คือ องค์ประกอบของแรงลากในแนวราบในทิศทาง $\bar{e}_\theta$



ความเร็วของกระแสน้ำทำให้เกิดแรงลากในแนวราบและแนวดิ่ง อันได้แก่ P_i, Q_j , และ R_k โดยมีทิศทางการเคลื่อนที่ $\bar{i}, \bar{j}$, และ $\bar{k}$ ตามลำดับ ซึ่งถ้านำมาพิจารณากับชิ้นส่วนย่อย ds_0 ของเคเบิลที่สถานะสมดุล จะมีแรงกระทำกับชิ้นส่วนย่อย ds_0 นั้น ตามรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แรงกระทำที่เกิดขึ้นกับชิ้นส่วนย่อย ds_0 ในสถานะสมดุล กรณีเคเบิลได้ทะเลแบบ สะเทินลอยตัว

สามารถเขียนองค์ประกอบของแรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำในแนวราบและแนวดิ่ง ในรูปของเวกเตอร์ $\bar{P}_i, \bar{Q}_j$, และ $\bar{R}_k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{P}_i &= P_i ds_0 \bar{i} = q_x ds_0 \bar{i} \\ \bar{Q}_j &= Q_j ds_0 \bar{j} = q_y ds_0 \bar{j} \\ \bar{R}_k &= R_k ds_0 \bar{k} = q_z ds_0 \bar{k}\end{aligned}\tag{2.51 ก,ข,ค}$$

จากสมการที่ 2.51 หาแรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางสัมผัส และตั้งฉากกับเคเบิล โดยทำการย้ายเวกเตอร์ $\bar{P}_i, \bar{Q}_j$, และ $\bar{R}_k$ ให้ไปอยู่ในทิศทางของเวกเตอร์ $\hat{i}, \hat{n}$, และ $\hat{b}$ ดังสมการต่อไปนี

$$\begin{aligned}
\bar{P}_i &= \bar{P}_i \cdot \hat{t} = q_x ds_0 \bar{i} \cdot \hat{t} = q_x \cos \psi \cos \phi ds_0 \\
\bar{P}_n &= \bar{P}_i \cdot \hat{n} = q_x ds_0 \bar{i} \cdot \hat{n} = -q_x \sin \phi ds_0 \\
\bar{P}_b &= \bar{P}_i \cdot \hat{b} = q_x ds_0 \bar{i} \cdot \hat{b} = -q_x \sin \psi \cos \phi ds_0
\end{aligned} \tag{2.52 ก,ข,ค}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_i &= \bar{Q}_j \cdot \hat{t} = q_y ds_0 \bar{j} \cdot \hat{t} = q_y \cos \psi \sin \phi ds_0 \\
\bar{Q}_n &= \bar{Q}_j \cdot \hat{n} = q_y ds_0 \bar{j} \cdot \hat{n} = q_y \cos \phi ds_0 \\
\bar{Q}_b &= \bar{Q}_j \cdot \hat{b} = q_y ds_0 \bar{j} \cdot \hat{b} = -q_y \sin \psi \sin \phi ds_0
\end{aligned} \tag{2.53 ก,ข,ค}$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_i &= \bar{R}_k \cdot \hat{t} = q_z ds_0 \bar{k} \cdot \hat{t} = q_z \sin \psi ds_0 \\
\bar{R}_n &= \bar{R}_k \cdot \hat{n} = q_z ds_0 \bar{k} \cdot \hat{n} = 0 \\
\bar{R}_b &= \bar{R}_k \cdot \hat{b} = q_z ds_0 \bar{k} \cdot \hat{b} = q_z \cos \psi ds_0
\end{aligned} \tag{2.54 ก,ข,ค}$$

โดยที่	P_i	คือ แรงลากในแนวราบ มีทิศทางตาม $\bar{i}$
	Q_j	คือ แรงลากในแนวราบ มีทิศทางตาม $\bar{j}$
	R_k	คือ แรงลากในแนวตั้ง มีทิศทางตาม $\bar{k}$
	$\bar{P}_i$	คือ เวกเตอร์แรงลากในแนวราบ มีทิศทางตาม $\bar{i}$
	$\bar{Q}_j$	คือ เวกเตอร์แรงลากในแนวราบ มีทิศทางตาม $\bar{j}$
	$\bar{R}_k$	คือ เวกเตอร์แรงลากในแนวตั้ง มีทิศทางตาม $\bar{k}$
	$\bar{P}_i, \bar{Q}_i, \bar{R}_i$	คือ เวกเตอร์แรงลากของ P_i, Q_j , และ R_k ในแนวสัมผัสกับเคเบิล มีทิศทางตาม $\hat{t}$
	$\bar{P}_n, \bar{Q}_n, \bar{R}_n$	คือ เวกเตอร์แรงลากของ P_i, Q_j , และ R_k ในแนวตั้งฉากกับเคเบิล มีทิศทางตาม $\hat{n}$
	$\bar{P}_b, \bar{Q}_b, \bar{R}_b$	คือ เวกเตอร์แรงลากของ P_i, Q_j , และ R_k ในแนวตั้งฉากกับเคเบิล มีทิศทางตาม $\hat{b}$

2. การวิเคราะห์สมการสมดุลทางสถิตยศาสตร์

สมการสมดุลของเคเบิลได้ทะเลแบบสะเทินลอยตัวในระบบพิกัดทรงกระบอก ซึ่งคำนึงถึงผลของการยึดตัวตามแนวแกนนั้น จะสามารถหาได้จากการพิจารณาความยาวชิ้นส่วนย่อยของเคเบิล ds_0 โดยการพิจารณาสมการสมดุลตามทิศทางของเวกเตอร์ $\hat{t}, \hat{n}$, และ $\hat{b}$ ส่วนแรงที่มากระทำกับเคเบิลนั้น จะประกอบไปด้วย แรงดึงประสิทธิผล และแรงลากในแนวราบเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ ซึ่งจะไม่นิยมนำหนักของเคเบิล เพราะพิจารณาว่ามีค่าเท่ากับแรงลอยตัว ดังนั้นองค์ประกอบของแรงในแนวตั้งจึงเท่ากับศูนย์

จากรูปที่ 2.8 แรงกระทำที่มีต่อเคเบิลตลอดความยาวชิ้นส่วนย่อย ds_0 มีดังนี้ แรงลากซึ่งประกอบไปด้วยแรงลาก P_i กับ Q_j กระทำทิศทางในแนวราบ หรือกระทำในทิศทางตามเวกเตอร์ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ และแรงลาก R_k ซึ่งกระทำทิศทางในแนวดิ่ง หรือกระทำในทิศทางตามเวกเตอร์ $\bar{k}$ เมื่อเคเบิลอยู่ในสภาวะสมดุล ผลรวมทางเวกเตอร์ของแรงทั้งหมดเท่ากับศูนย์ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} -T\hat{i} + (T + dT)(\hat{i} + d\hat{i}) + P_id s_0\bar{i} + Q_j d s_0\bar{j} + R_k d s_0\bar{k} &= 0 \\ -T\hat{i} + T\hat{i} + Td\hat{i} + dT\hat{i} + dTd\hat{i} + P_id s_0\bar{i} + Q_j d s_0\bar{j} + R_k d s_0\bar{k} &= 0 \\ Td\hat{i} + dT\hat{i} + P_id s_0\bar{i} + Q_j d s_0\bar{j} + R_k d s_0\bar{k} &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

จากสมการที่ (2.55) ตัดเทอมค่าน้อยๆ ที่มีกำลังสูงออก และแทนค่า $d\hat{i}$ จากสมการที่ (2.42) จะได้

$$\begin{aligned} T \cos \psi d\phi \hat{n} + Td\psi \hat{b} + dT\hat{i} + P_id s_0\bar{i} + Q_j d s_0\bar{j} + R_k d s_0\bar{k} &= 0 \\ T \cos \psi d\phi \hat{n} + Td\psi \hat{b} + dT\hat{i} + (\bar{P}_i + \bar{P}_n + \bar{P}_b) + (\bar{Q}_i + \bar{Q}_n + \bar{Q}_b) \\ + (\bar{R}_i + \bar{R}_n + \bar{R}_b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

จากสมการที่ (2.56) เมื่อทำการพิจารณาตามทิศทางเวกเตอร์ $\hat{i}, \hat{n}$, และ $\hat{b}$ จะได้สมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของเคเบิลในสภาวะสมดุลดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds_0} &= -q_x \cos \psi \cos \phi - q_y \cos \psi \sin \phi - q_z \sin \psi \\ \frac{d\phi}{ds_0} &= \frac{q_x \sin \phi - q_y \cos \phi}{T \cos \psi} \\ \frac{d\psi}{ds_0} &= \frac{q_x \sin \psi \cos \phi + q_y \sin \psi \sin \phi - q_z \cos \psi}{T} \end{aligned} \quad (2.57 \text{ ก, ข, ค})$$