

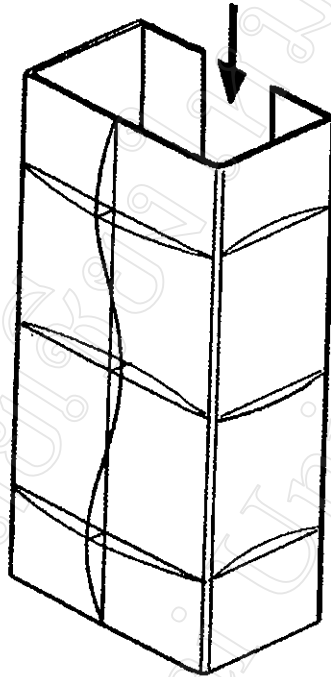
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในงานวิจัย

2.1 การวิบัติของเสาเหล็กรูปพรรณขึ้นรูปเย็น

การวิบัติของเสาเหล็กขึ้นรูปเย็นจะขึ้นกับอัตราส่วนความขรุขระ หรืออัตราส่วนความสูง ต่อขนาดของหน้าตัด และรูปร่างของหน้าตัด หากเสามีอัตราส่วนความขรุขระน้อย การวิบัติจะเริ่มจากการโก่งเดาะเฉพาะจุด หรือการโก่งเดาะบิดเบี้ยวของหน้าตัด ในขณะที่เสามีอัตราส่วนความขรุขระมาก การวิบัติจะเริ่มจากการโก่งเดาะทั้งหมด ซึ่งการโก่งเดาะทั้งหมดนี้มีอยู่ 3 รูปแบบ คือ การโก่งเดาะเนื่องจากการดัด (Flexural buckling) หรือการโก่งเดาะไปทางแกนใดแกนหนึ่งขึ้น กับความแข็งแรงของหน้าตัด การโก่งเดาะเนื่องจากการบิด (Torsional buckling) หรือเสาเกิดการบิด และการโก่งเดาะเนื่องจากการบิดและดัด (Torsional Flexural buckling) หรือเสาเกิดการบิด พร้อมกับโก่งเดาะไปทางด้านข้าง โดยทั่วไปแล้วเสามีหน้าตัดปิดจะไม่เกิดการโก่งเดาะเนื่อง จากการบิดเนื่องจากหน้าตัดของเสามีความแข็งแรงต่อการบิดสูง สำหรับเสามีหน้าตัดเปิดแบบ ผ่องบาง (Open Thin-walled Section) จะมีโอกาสเกิดการวิบัติในลักษณะการบิดและดัดมาก

2.2 การโก่งเดาะเฉพาะจุด

การโก่งเดาะเฉพาะจุดเป็นรูปแบบหนึ่งในการวิบัติซึ่งมักจะเกิดในกรณีที่มีอัตราส่วนความขรุขระน้อยและมีอัตราส่วนความกว้างต่อความหนาแน่นมาก ซึ่งในกรณีของเหล็กขึ้นรูปเย็น ที่มีหน้าตัดสมมาตรรอบแกนเดียวเช่น เหล็กกล่องน้ำเสริมขอบนั้น การโก่งเดาะเฉพาะจุดมักจะเกิดขึ้นในส่วนที่เป็นแผ่นเอวของหน้าตัดก่อนเนื่องจากมีอัตราส่วนความกว้างต่อความหนาแน่นเมื่อ เทียบกับส่วนอื่นดังแสดงในรูปที่ 2.1 ในการวิเคราะห์หาแรงโก่งเดาะเฉพาะจุดในทางทฤษฎีนั้น สามารถหาได้โดยอาศัยวิธี Finite strip method ซึ่งจะไม่ขอกล่าวถึงในที่นี้ หรืออาจอาศัยวิธีการ หาการโก่งเดาะเฉพาะจุดของแผ่นบางมาใช้ในการหาค่าการโก่งเดาะเฉพาะจุดของหน้าตัด โดย พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ของการโก่งเดาะ (Buckling coefficient) ที่เหมาะสมกับหน้าตัดมาใช้ในการ วิเคราะห์



รูปที่ 2.1 รูปแบบของการโก่งเดาะเฉพาะจุด

ค่าหน่วยแรงอัดวิกฤติ (Critical stress, f_{CR}) ของแผ่นบางสามารถคำนวณได้จาก

$$f_{CR} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\mu^2)(b/t)^2} \quad (1)$$

โดยที่

t = ความหนาของแผ่นบาง (Thickness of plate)

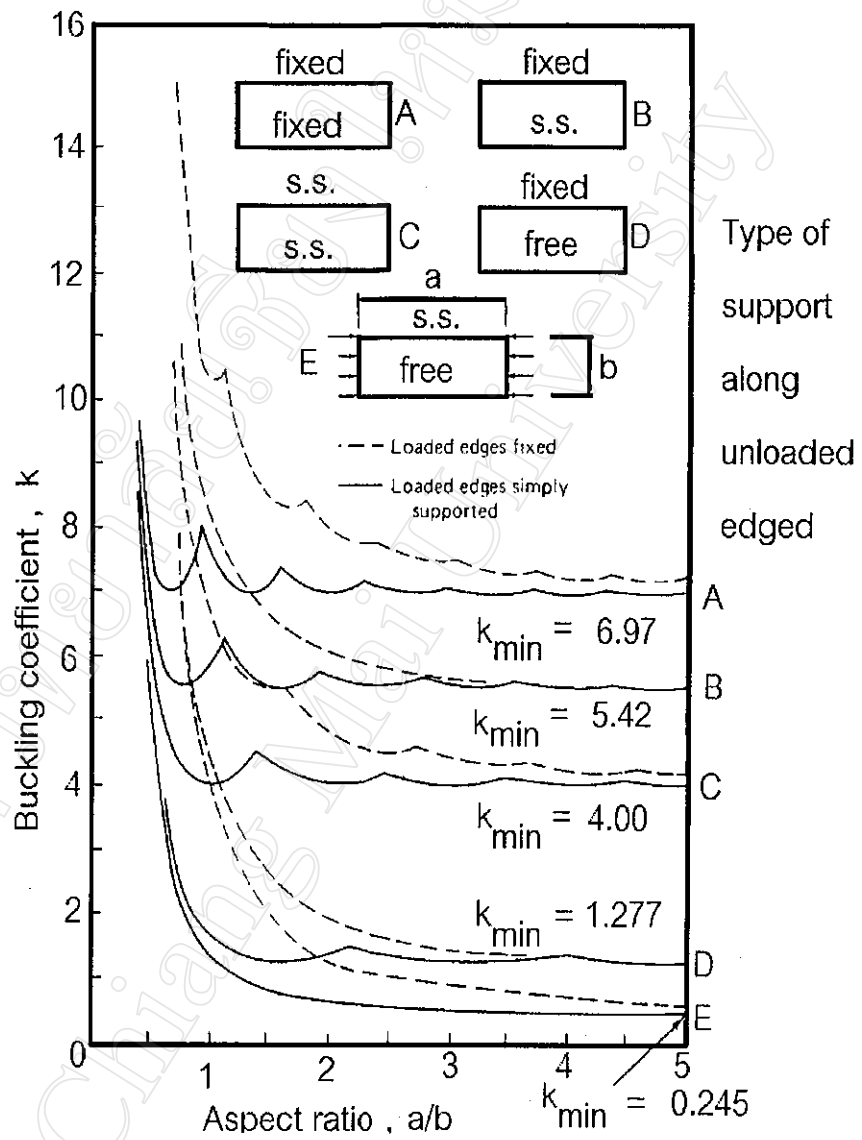
μ = อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio) สำหรับเหล็ก = 0.3

b = ความกว้างของแผ่นบาง (Width of the plate)

E = โมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of elasticity)

k = สัมประสิทธิ์การโก่งเดาะ

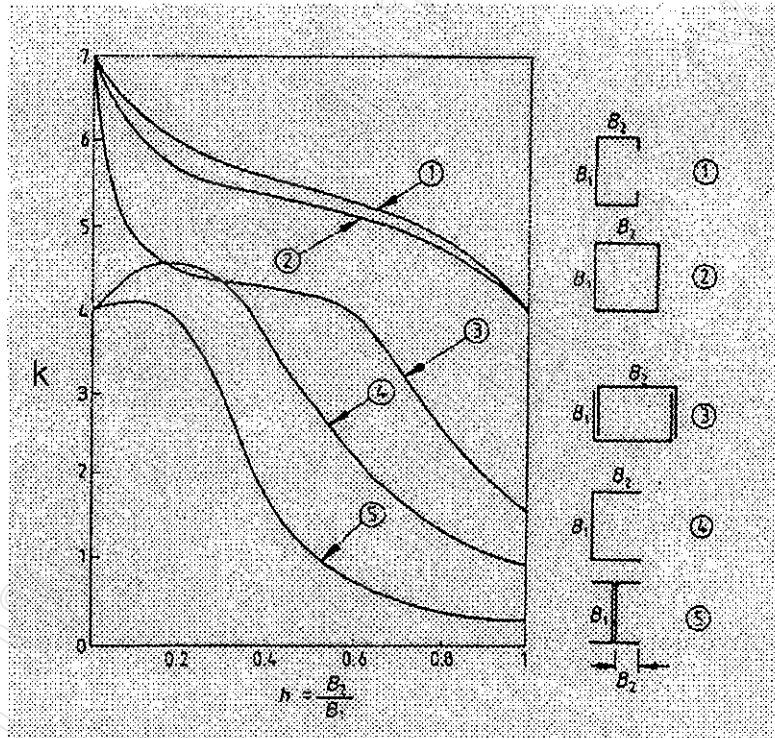
ค่าสัมประสิทธิ์การโก่งเดาะของแผ่นบางที่มีการรองรับที่ปลายแบบต่างๆสามารถแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ค่า k ในกรณีที่จุดรองรับที่ปลายเป็นแบบต่างๆ

ที่มา : Salmom G. and Johnson E., 1980

สำหรับคำนวณแรงอัดวิกฤติของหน้าตัดสามารถหาได้จากสมการที่ (1) โดยอาศัยสมการค่าสัมประสิทธิ์การโก่งเดาะของแผ่นเอวของหน้าตัดดังแสดงในรูปที่ 2.3 (Rhode J, 1991) ซึ่งจากรูปที่ 2.3 จะได้ว่าสำหรับหน้าตัดรูปรางน้ำเสริมขอบค่าสัมประสิทธิ์การโก่งเดาะสำหรับแผ่นเอวมีค่าเท่ากับ



รูปที่ 2.3 ค่า k ของหน้าตัดในรูปแบบต่างๆ

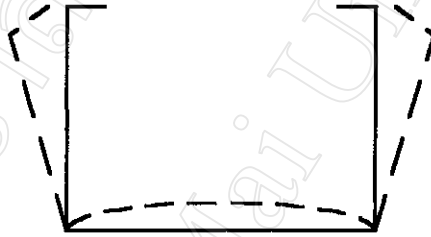
ที่มา : Rhodes J., 1991

$$k = 7 - \frac{1.8h}{0.15 + h} - 1.43h^3 \quad (2)$$

เมื่อเปรียบเทียบค่า k ในสมการที่ (2) และ k จากรูปที่ 2.2 จะเห็นว่าค่า k จะอยู่ระหว่างค่าของแผ่นบางในกรณีที่จุดรองรับเป็นแบบง่าย (Simply support) และเป็นแบบยึดแน่น (Fixed support)

2.3 การโก่งเดาะบิดเบี้ยวของหน้าตัด

การโก่งเดาะบิดเบี้ยวของหน้าตัดเป็นรูปแบบหนึ่งของการวิบัติที่มักจะเกิดขึ้นกับเหล็กขึ้นรูปเย็นที่เป็นหน้าตัดเปิดและบาง ซึ่งรูปแบบการวิบัติดังกล่าวไม่ได้เป็นการโก่งเดาะทั้งหมดของโครงสร้าง แต่เกิดขึ้นเฉพาะหน้าตัดทำให้หน้าตัดมีการเสียรูป ซึ่งในกรณีที่หน้าตัดเปิดที่มีแกนสมมาตรรอบแกนเดี่ยวดังเช่นหน้าตัดรูปรางน้ำเสริมขอบ การวิบัติดังกล่าวจะเกิดในลักษณะที่บริเวณส่วนปีกและขอบเสริมกำลังของหน้าตัดเกิดการเคลื่อนที่ด้านข้างและหมุนรอบจุดต่อระหว่างแผ่นเอวและปีกของหน้าตัดดังแสดงในรูปที่ 2.4 ซึ่งในการวิเคราะห์หาแรงโก่งเดาะหรือแรงอัดวิกฤตนี้ (Critical buckling load, P_{CR}) นี้สามารถหาได้โดยวิธี Finite strip method หรือคำนวณจากสูตรดังต่อไปนี้ (Lau and Hancock, 1987)



รูปที่ 2.4 การโก่งเดาะบิดเบี้ยวของหน้าตัด

$$P_{CR} = \frac{E}{2} \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2) \pm \sqrt{[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_3]} \right\} \quad (3)$$

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{\beta_1} (I_x b_f^2 + 0.039 J \lambda^2) + \frac{k \phi}{\beta_1 \eta E} \quad (4)$$

$$\alpha_2 = \eta \left(I_y + \frac{2}{\beta_1} \bar{y} b_f I_{xy} \right) \quad (5)$$

$$\alpha_3 = \eta \left(\alpha_1 I_y - \frac{\eta}{\beta_1} I_{xy}^2 b_f^2 \right) \quad (6)$$

$$\beta_1 = \bar{x}^2 + \frac{(I_x + I_y)}{A} \quad (7)$$

$$\lambda = 4.80 \left(\frac{I_x b_f^2 b_w}{t^3} \right)^{0.25} \quad (8)$$

$$\eta = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \quad (9)$$

$$k_\phi = \frac{Et^3}{5.46(b_w + 0.06\lambda)} \left[1 - \frac{1.11P'}{EA t^2} \left(\frac{b_w^2 \lambda}{b_w^2 + \lambda^2} \right)^2 \right] \quad (10)$$

โดย P' หาได้จากสมการที่ 3 เช่นเดียวกันกับค่า P_{CR} แต่ค่า α_1 ในสมการที่ 4 ที่ใช้ให้ตัดค่า

$\frac{k_\phi}{\beta_1 \eta E}$ ออก

b_w = ความกว้างของปีกของหน้าตัด

b_f = ความกว้างของแผ่นเอว

I_x = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดปีกและขอบเสริมกำลังรอบแกน x

I_y = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดปีกและขอบเสริมกำลังรอบแกน y

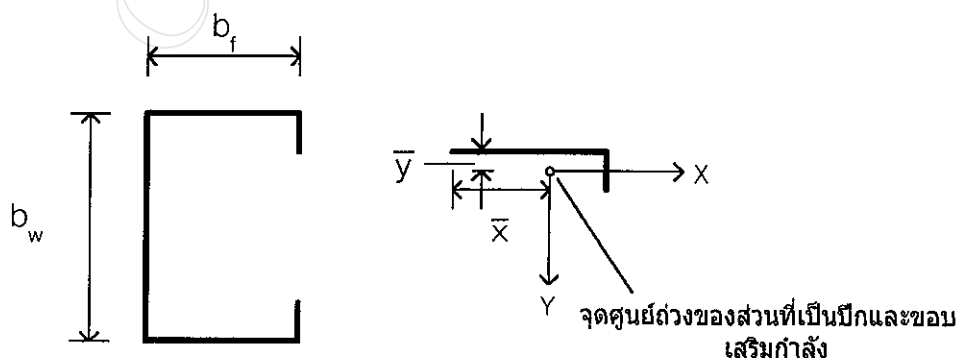
I_{xy} = ผลคูณของโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดปีกและขอบเสริมกำลังรอบแกน x และ y

A = พื้นที่หน้าตัดของปีกและขอบเสริมกำลังดังรูปที่ 2.5

$\bar{x}$ = ระยะห่างของจุดศูนย์กลางของพื้นที่ปีกและขอบเสริมกำลังจากจุดต่อระหว่างแผ่นเอวและปีกตามแนวแกน x

$\bar{y}$ = ระยะห่างของจุดศูนย์กลางของพื้นที่ปีกและขอบเสริมกำลังจากจุดต่อระหว่างแผ่นเอวและปีกตามแนวแกน y

J = ค่าคงที่การบิดของหน้าตัดเฉพาะส่วนปีกและขอบเสริมกำลัง

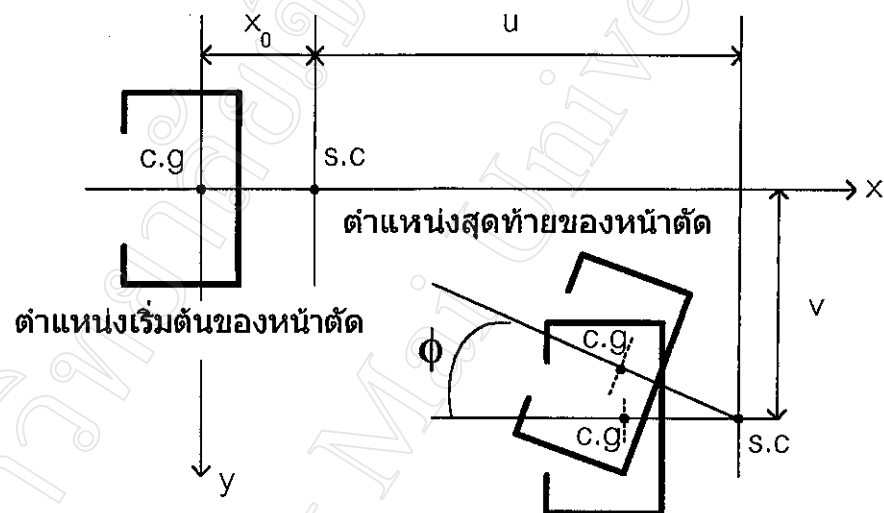


รูปที่ 2.5 หน้าตัดของรูปร่างน้ำเสริมขอบที่ใช้ในการคำนวณหาแรงอัดวิกฤติแบบบิดเบี้ยว

2.4 การโก่งเดาะทั้งหมดของโครงสร้าง

2.4.1 การโก่งเดาะทั้งหมดของเสาเหล็กรูปพรรณขึ้นรูปเย็นรูปร่างน้ำเสริมขอบที่มีฐานรองรับแบบหมุดได้อิสระ (Overall Buckling of Light Lip Channel Section with Pin Ends)

พิจารณาเสาเหล็กขึ้นรูปเย็นรูปร่างน้ำเสริมขอบที่มีฐานรองรับเป็นแบบหมุดได้อย่างอิสระรับแรง P ตามแนวแกนของเสา (แกน z) เมื่อเสาเกิดการโก่งเดาะเนื่องจากการบิดและดัด เสาจะเคลื่อนที่เปลี่ยนตำแหน่งไป ดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 การเคลื่อนที่ของหน้าตัดเมื่อเกิดการโก่งเดาะเนื่องจากการบิดและดัด

สมการการเคลื่อนที่ซึ่งอยู่ในรูปอนุพันธ์คือ

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -Pu \quad (11)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -P(v - x_0 \phi) \quad (12)$$

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - (GJ - P \frac{I_0}{A}) \frac{d^2 \phi}{dz^2} - Px_0 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad (13)$$

โดยที่

u = การเคลื่อนที่ในแนวแกน x (Lateral displacement in x direction)

v = การเคลื่อนที่ในแนวแกน y (Lateral displacement in y direction)

ϕ = มุมที่หมุนไปรอบจุดศูนย์กลางของแรงเฉือน (Angle of rotation about shear center)

x_0 = ระยะทางในแนวแกน x ของจุดศูนย์กลางแรงเฉือน (x Coordinate of shear center)

จากสมการที่ (11) จะเห็นว่าการเคลื่อนที่ของหน้าตัดในทางแกน x เป็นอิสระ ในขณะที่การเคลื่อนที่ของหน้าตัดในทางแกน y และการหมุนของหน้าตัดจะเกิดขึ้นพร้อมๆ กัน จากเงื่อนไขฐานรองรับแบบหมุนได้อิสระคือ $z=0$ และ $z=L$

$$u = v = \phi = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \quad (15)$$

คำตอบที่ทำให้สมการที่ (11) เป็นจริงและสอดคล้องกับสมการที่ (14) และ (15) คือ

$$u = A_1 \sin \frac{\pi z}{L} \quad (16)$$

ดังนั้นจะได้สมการแสดงลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) สำหรับสมการที่ (11) ซึ่งเป็นสมการที่แสดงค่าแรงที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะรอบแกน y คือ

$$P - P_y = 0 \quad (17)$$

โดยที่

$$P_y = \frac{\pi^2 E I_y}{L^2} \quad (18)$$

คำตอบที่ทำให้สมการที่ (12) (13) เป็นจริงและสอดคล้องกับสมการที่ (14) (15) คือ

$$v = A_2 \sin \frac{\pi z}{L} \quad (19)$$

และ

$$\phi = A_3 \sin \frac{\pi z}{L} \quad (20)$$

ดังนั้นจะได้สมการแสดงลักษณะเฉพาะสำหรับสมการที่ (12) (13) ซึ่งเป็นสมการที่แสดงค่าแรงที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะรอบแกน x และเกิดการบิดไปพร้อมกันคือ

$$\frac{I_0}{A} (P - P_x)(P - P_\phi) - P^2 x_0^2 = 0 \quad (21)$$

โดยที่

$$P_x = \frac{\pi^2 E I_x}{L^2} \quad (22)$$

$$P_\phi = \frac{A}{I_0} \left(GJ + EC_w \frac{\pi^2}{L^2} \right) \quad (23)$$

A = พื้นที่หน้าตัดทั้งหมดของหน้าตัด

I_0 = โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางแรงเฉือน (Polar moment of inertia about the shear center) $= I_x + I_y + Ax_0^2$

G = โมดูลัสเฉือน (Shear modulus)

C_w = ค่าคงที่การย่น (Warping constant)

J = ค่าคงที่การบิดของเซนต์เวนอันต (St. Venant torsion constant)

L = ความยาวเสา

2.4.2 การโก่งเดาะทั้งหมดของเสาเหล็กรูปพรรณขึ้นรูปเย็นรูปรางน้ำเสริมขอบที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น (Overall Buckling of Light Lip Channel Section with Fixed Ends)

สมการการเคลื่อนที่ซึ่งอยู่ในรูปอนุพันธ์คือ

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -Pu + EI_y \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=0} \quad (24)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -P(v - x_0 \phi) + EI_x \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=0} \quad (25)$$

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - (GJ - P \frac{I_0}{A}) \frac{d^2 \phi}{dz^2} - Px_0 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad (26)$$

พิจารณาเงื่อนไขฐานรองรับแบบยึดแน่นจะได้ว่าที่ $z=0$ และ $z=L$

$$u = v = \phi = 0 \quad (27)$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = \frac{d\phi}{dz} = 0 \quad (28)$$

คำตอบที่ทำให้สมการที่ (24) เป็นจริงและสอดคล้องกับสมการที่ (27) (28) คือ

$$u = A_4 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right) \quad (29)$$

ดังนั้นจะได้สมการแสดงลักษณะเฉพาะสำหรับสมการที่ (24) ซึ่งเป็นสมการที่แสดงค่าแรงที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะรอบแกน y คือ

$$P - P_y = 0 \quad (30)$$

โดยที่
$$P_y = \frac{4\pi^2 E I_y}{L^2} \quad (31)$$

คำตอบที่ทำให้สมการที่ (25) (26) เป็นจริงและสอดคล้องกับสมการที่ (27) (28) เมื่อ

$$v = A_5 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right) \quad (32)$$

และ

$$\phi = A_6 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right) \quad (33)$$

ดังนั้นจะได้สมการแสดงลักษณะเฉพาะสำหรับสมการที่ (25) และ (26) ซึ่งเป็นสมการที่แสดงค่าแรงที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะรอบแกน x และเกิดการบิดไปพร้อมกันคือ

$$\frac{I_0}{A} (P - P_x)(P - P_\phi) - P^2 x_0^2 = 0 \quad (34)$$

โดยที่
$$P_x = \frac{4\pi^2 E I_x}{L^2} \quad (35)$$

$$P_\phi = \frac{A}{I_0} \left(GJ + EC_w \frac{4\pi^2}{L^2} \right) \quad (36)$$

จากสมการที่ (17) (21) (30) และ (34) ซึ่งเป็นสมการแสดงลักษณะเฉพาะทั้งในกรณีที่มีฐานรองรับเป็นแบบหมุนได้โดยอิสระและเป็นแบบยึดแน่นจะเห็นว่าสมการดังกล่าวคล้ายกัน ดังนั้นสามารถเขียนสมการดังกล่าวในรูปของ

$$P - P_y = 0 \quad (37)$$

และ
$$\frac{I_0}{A} (P - P_x)(P - P_\phi) - P^2 x_0^2 = 0 \quad (38)$$

เป็นสมการแสดงลักษณะเฉพาะทั้งในกรณีที่มีฐานรองรับเป็นแบบหมุนได้โดยอิสระและเป็นแบบยึดแน่นโดย

$$(P_{cr})_1 = P_y \quad (39)$$

$$(P_{cr})_2 = (1/2\beta)((P_x + P_\phi) + \sqrt{(P_x + P_\phi)^2 - 4\beta P_x P_\phi}) \quad (40)$$

$$(P_{cr})_3 = (1/2\beta)((P_x + P_\phi) - \sqrt{(P_x + P_\phi)^2 - 4\beta P_x P_\phi}) \quad (41)$$

โดยที่

$$\beta = 1 - (x_0/r_0)^2 \quad (42)$$

$$r_0 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + x_0^2} \quad (43)$$

$$P_x = \frac{\pi^2 E I_x}{(KL)^2} \quad (44)$$

$$P_y = \frac{\pi^2 E I_y}{(KL)^2} \quad (45)$$

$$P_\phi = \frac{A}{I_0} \left(GJ + EC_w \frac{\pi^2}{(KL)^2} \right) \quad (46)$$

เมื่อ

KL = ความยาวประสิทธิผล

K = 1 สำหรับกรณีที่เป็นฐานรองรับแบบหมุนได้โดยอิสระ

K = 0.5 สำหรับกรณีที่เป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น

ซึ่งสมการที่ (39) (40) และ (41) เป็นสมการที่ใช้ในการคำนวณหาน้ำหนักวิกฤติที่ทำให้เสาเกิดการโก่งเดาะทั้งหมด คำนวณน้ำหนักวิกฤติของเสาจะสามารถหาได้จากค่าที่น้อยที่สุดที่คำนวณได้จากสมการ (39) (40) และ (41) ซึ่งค่าน้ำหนักวิกฤตินี้จะบ่งบอกรูปร่างของเสาเมื่อเกิดการวิบัติว่าเป็นรูปแบบใด