Research Article

Received: October 23, 2018; Accepted: January 2, 2019

ขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส

Upper Bounds for the Spread of the Circulant and r-Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas Sequences

อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์*, กษิตินาถ แสงเงิน,

ปาณิสรา ไทยวงษ์ และสุกฤตา ลมูลภักตร์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ศูนย์รังสิต ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

Archara Pacheenburawana, Kasitinart Sangngern,

Panisara Thaiwong and Sukrita Lamoonpak

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University,

Rangsit Centre, Khlong Nueng, Khlong Luang, Pathum Thani 12120

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส

คำสำคัญ : กระจายตัวของเมทริกซ์; ขอบเขตบน; เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์; เมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์

Abstract

This research objective is to find upper bounds for the spread of the circulant and r-circulant matrices which entries are the Fibonacci and Lucas sequences.

Keywords: spread of a matrix; upper bound; circulant matrix; r-circulant matrix

***ผู้รับผิดชอบบทความ :** archara@mathstat.sci.tu.ac.th

1. บทนำ

เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เป็นเมทริกซ์โทพลิทซ์ชนิดหนึ่ง ซึ่งนำมาใช้อย่างแพร่หลายในงานวิจัยทางคณิตศาสตร์ มีนักวิจัยหลายท่านให้ความสนใจศึกษาสมบัติของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และลักษณะทั่วไปของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ สำหรับเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกมาจากลำดับที่รู้จักกันเป็นอย่างดีนั้น พบมากในการศึกษาหลากหลาย อาทิ การประมวลผลสัญญาณ การประมวลผลภาพดิจิทัล ทฤษฎีรหัส และการพยากรณ์เชิงเส้น

การกระจายตัวของเมทริกซ์ คือ ระยะทางที่มากที่สุดระหว่างค่าเฉพาะคู่ใด ๆ ของเมทริกซ์ ซึ่งการกระจายตัวของเมทริกซ์นั้นกล่าวถึงครั้งแรกในปี ค.ศ. 1956 โดย Mirsky [1] หลังจากนั้นมีนักวิจัยหลายท่านได้ศึกษาเกี่ยวกับขอบเขตของการกระจายตัวของเมทริกซ์ เช่น ในปี ค.ศ. 1985 Johnson และคณะ ได้ให้ขอบเขตล่างสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ปกติใด ๆ [2] ต่อมาในปี ค.ศ. 1997 Jiang และ Zhan ได้แสดงขอบเขตล่างสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เฮอร์มิเทียน [3] จากนั้นในปี ค.ศ. 2012 Wu และคณะได้ให้ขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ใด ๆ [4] และในปี ค.ศ. 2013 Sharma และ Kumar ได้ให้ข้อสังเกตของขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ใด ๆ [5]

การทบทวนวรรณกรรมที่ผ่านมา พบว่าในปัจจุบันไม่มีการศึกษาเกี่ยวกับขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาหาค่าขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส

2. ความรู้พื้นฐาน

หัวข้อนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงบทนิยามและผลลัพธ์ของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ตลอดงานวิจัยนี้ผู้วิจัยให้ $\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก $\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน และ $\mathbb{C}^{n\times n}$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 2.1 [1] กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าเฉพาะ λ_p เมื่อ $p \in \{1,2,3,\dots,n\}$ การกระจายตัวของเมทริกซ์ A นิยามโดย $s(A) = \max_{1\le k,l\le n} |\lambda_k - \lambda_l|$

บทนิยาม 2.2 [6] นอร์มโฟรเบนิอุ หรือนอร์มแบบยุคลิด คือ นอร์มของเมทริกซ์ $A = (a_{pq})_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ที่นิยามโดย $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}|^2}$ หรือ $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)}$ เมื่อ $\mathrm{tr}(AA^*)$ คือ รอยของเมทริกซ์ AA^* หรือผลบวกของสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ AA^* และ A^* คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุคของ A

บทนิยาม 2.3 [7] เมทริกซ์ $C_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ เรียกว่าเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ ถ้า

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเห็นได้ว่าเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์กำหนดโดยสมาชิกในแถวที่หนึ่ง ได้แก่ $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ ผู้วิจัยเขียนแทนเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ C_n ด้วย $C_n = \mathrm{Circ}(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ มีสมบัติต่อไปนี้ [7-9]

1. เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ทุกเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ปกติ

2. $\|C_n\|_F^2 = n\sum_{p=0}^{n-1}|c_p|^2$

3. $|\mathrm{tr}(C_n)| = n|c_0|$

4. ค่าเฉพาะของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์สามารถหาได้โดย $\lambda_q = \sum_{p=0}^{n-1} c_p \left(w^q\right)^p$ โดยที่ $w = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ และ $q \in \{1,2,3,\ldots,n\}$

บทนิยาม 2.4 [7] เมทริกซ์ $C_{n,r} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ เรียกว่าเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ ถ้า

$$C_{n,r} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ rc_2 & rc_3 & \cdots & c_0 & c_1 \\ rc_1 & rc_2 & \cdots & rc_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $r \in \mathbb{C}$ ซึ่งเห็นได้ว่าเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์กำหนดโดยสมาชิกในแถวที่หนึ่ง ได้แก่ $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ และพารามิเตอร์ r ผู้วิจัยจะเขียนแทนเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ $C_{n,r}$ ด้วย $C_{n,r} = r\mathrm{Circ}(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์มีสมบัติต่อไปนี้ [7-9]

1. $\left\|C_{n,r}\right\|_F^2 = \sum_{p=0}^{n-1}(n-p)\left|c_p\right|^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p\left|r\right|^2\left|c_p\right|^2$
2. $\left|\mathrm{tr}\left(C_{n,r}\right)\right| = n\left|c_0\right|$

บทนิยาม 2.5 [8] ลำดับฟีโบนักชี $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ และลำดับลูคัส $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ คือ ลำดับที่นิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_0 = 0,\quad F_1 = 1,\quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ สำหรับ $n = 2,3,4,\ldots$ และ $L_0 = 2,\quad L_1 = 1,$ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ สำหรับ $n = 2,3,4,\ldots$

จากบทนิยาม 2.5 จะได้ลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส ดังนี้

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	…
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	…

สมบัติต่อไปนี้เป็นสมบัติที่รู้จักกันดีของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส [8]

$$\sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 = F_n F_{n-1} \text{ สำหรับ } n \geq 1 \qquad (0.1)$$

$$\sum_{p=0}^{n-1} L_p^2 = L_n L_{n-1} + 2 \text{ สำหรับ } n \geq 1 \qquad (0.2)$$

ในปี ค.ศ. 2013 Sharma และ Kumar [5] ได้แสดงขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ A ที่มีขนาด $n \times n$ ใด ๆ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

$$s(A) \leq \left[\left(2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left|\mathrm{tr}(A)\right|^2\right)^2 - 2\left\|AA^* - A^*A\right\|_F^2\right]^{\frac{1}{4}} \qquad (0.3)$$

ถ้า A ถูกแบ่งกั้นให้อยู่ในรูป $A = \begin{bmatrix} P & B \\ C & Q \end{bmatrix}$ เมื่อ P เป็นเมทริกซ์ย่อยของ A ที่มีขนาด $k \times k$ แล้วจะได้ว่า

$$s(A) \leq \sqrt{2\left\|A\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left|\mathrm{tr}(A)\right|^2 - 2\left(\left\|B\right\|_F - \left\|C\right\|_F\right)^2} \qquad (0.4)$$

3. ผลการวิจัย

หัวข้อนี้ผู้วิจัยได้แสดงขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส

สำหรับบทแทรก 3.1 เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 2.1

บทแทรก 3.1 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $C_n = \mathrm{Circ}(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี แล้วจะได้ว่า

$$s(C_n) \leq \sqrt{2nF_nF_{n-1}} \qquad (1.1)$$

พิสูจน์ เนื่องด้วย $\left\|C_n\right\|_F^2 = n\sum_{p=0}^{n-1} F_p^2$ และจากสมบัติของลำดับฟีโบนักชี (2.1) จะได้ว่า $\left\|C_n\right\|_F^2 = n\sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 = n F_n F_{n-1}$ และ $\left|\mathrm{tr}\left(C_n\right)\right| = nF_0 = 0$

เนื่องด้วยเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เป็นเมทริกซ์ปกติ นั่นคือ $C_nC_n^* = C_n^*C_n$ ดังนั้นจะได้ว่า $\left\|C_nC_n^* - C_n^*C_n\right\|_F^2 = 0$ จากสมการ (2.3) จะได้

$$s\left(C_n\right) \le \left[\left(2\left\|C_n\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left|\operatorname{tr}\left(C_n\right)\right|^2\right)^2 - 2\left\|C_nC_n^* - C_n^*C_n\right\|_F^2\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left[\left(2nF_nF_{n-1} - \frac{2}{n}(0)\right)^2 - 2(0)\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{2nF_nF_{n-1}} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ C_4 เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี

นั่นคือ $C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

จากบทนิยาม 2.1 จะได้

$$s(C_4) = \max_{1\le k,l\le 4}|\lambda_k - \lambda_l| = 6$$

จากบทแทรก 3.1 จะได้

$$s(C_4) \le 6.9282 \qquad \square$$

$$s(C_4) = \max_{1\le k,l\le 4}|\lambda_k - \lambda_l| = 6$$

สำหรับบทแทรก 3.2 เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับ ลูคัส โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 2.1

บทแทรก 3.2 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $C_n = \operatorname{Circ}(L_0, L_1, L_2, \ldots, L_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส แล้วจะได้ว่า

$$s\left(C_n\right) \le \sqrt{2n\left(L_nL_{n-1} - 2\right)} \qquad (1.2)$$

พิสูจน์ เนื่องด้วย $\left\|C_n\right\|_F^2 = n\sum_{p=0}^{n-1} L_p^2$ และจากสมบัติของลำดับลูคัส (2.2) จะได้ว่า $\left\|C_n\right\|_F^2 = n\sum_{p=0}^{n-1} L_p^2 = n\,L_nL_{n-1} + 2n$ และ $\left|\operatorname{tr}\left(C_n\right)\right| = nL_0 = 2n$ เนื่องด้วยเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เป็นเมทริกซ์ปกติ นั่นคือ $C_nC_n^* = C_n^*C_n$ ดังนั้นจะได้ว่า $\left\|C_nC_n^* - C_n^*C_n\right\|_F^2 = 0$ จากอสมการ (2.3) จะได้

$$s\left(C_n\right) \le \left[\left(2\left\|C_n\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left|\operatorname{tr}\left(C_n\right)\right|^2\right)^2 - 2\left\|C_nC_n^* - C_n^*C_n\right\|_F^2\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left[\left(2nL_nL_{n-1} + 4n - \frac{2}{n}\left|2n\right|^2\right)^2 - 2(0)\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{2nL_nL_{n-1} + 4n - 8n}$$

$$= \sqrt{2n\left(L_nL_{n-1} - 2\right)} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ C_4 เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส นั่นคือ

$$C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยาม 2.1 จะได้

$$s(C_4) = \max_{1\le k,l\le 4}|\lambda_k - \lambda_l| = 11.4018$$

จากบทแทรก 3.2 จะได้

$$s\left(C_4\right) \le 14.4222 \qquad \square$$

สำหรับทฤษฎีบท 3.3 เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{C}$ และ $C_{n,r} = r\operatorname{Circ}(F_0, F_1, F_2 \ldots, F_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี แล้วจะได้ว่า $s\left(C_{n,r}\right) \le$

$$\left[2nF_nF_{n-1} + 2\left(\left|r\right|^2 - 1\right)\sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2 - 2\left(1 - \left|r\right|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{\alpha}\sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} F_p^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(2nL_nL_{n-1} + 4n - \frac{2}{n}\left|2n\right|^2\right)^2 - 2(0)\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{2nL_nL_{n-1} + 4n - 8n}$$

$$= \sqrt{2n\left(L_n L_{n-1} - 2\right)} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ C_4 เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส นั่นคือ

$$C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยาม 2.1 จะได้

$$s(C_4) = \max_{1 \le k, l \le 4} |\lambda_k - \lambda_l| = 11.4018$$

จากบทแทรก 3.2 จะได้

$$s\left(C_4\right) \le 14.4222 \qquad \square$$

สำหรับทฤษฎีบท 3.3 เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{C}$ และ $C_{n,r} = r\mathrm{Circ}(F_0, F_1, F_2 \dots, F_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี แล้วจะได้ว่า $s\left(C_{n,r}\right) \le$

$$\left[2nF_nF_{n-1} + 2\left(|r|^2 - 1\right)\sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2 - 2\left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{\alpha}\sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} F_p^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

เมื่อ $\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n\pm 1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

พิสูจน์ เนื่องด้วย

$$\left\|C_{n,r}\right\|_F^2 = \sum_{p=0}^{n-1}\left(n-p\right)F_p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p|r|^2 F_p^2$$

$$= n\sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p|r|^2 F_p^2$$

$$= n\sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 + \left(|r|^2 - 1\right)\sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2$$

และจากสมบัติของลำดับฟีโบนักชี (2.1) $\sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 = F_nF_{n-1}$ จะได้ว่า $\left\|C_{n,r}\right\|_F^2 = nF_nF_{n-1} + \left(|r|^2 - 1\right)\sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2$ นอกจากนี้ $\left|\mathrm{tr}\left(C_{n,r}\right)\right| = nF_0 = 0$

จากการแบ่งกั้นเมทริกซ์ให้อยู่ในรูป $C_{n,r} = \begin{bmatrix} P & X \\ Y & Q \end{bmatrix}$ โดยที่ P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $k \times k$ และ $1 \le k < n$ จะได้ $\left\|X\right\|_F = \sqrt{\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2}$, $\left\|Y\right\|_F = |r|\sqrt{\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2}$

ดังนั้น $\left(\left\|X\right\|_F - \left\|Y\right\|_F\right)^2 = \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2\right)$

นอกจากนี้ สังเกตได้ว่า ถ้า P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $\left(n-k\right)\times\left(n-k\right)$ และ $1 \le k < n$ จะได้ว่า

$$\left(\left\|X\right\|_F - \left\|Y\right\|_F\right)^2 = \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{n-k}\sum_{p=q}^{k+q-1} F_p^2\right)$$

$$= \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{p=1}^{k} F_p^2 + \sum_{p=2}^{k+1} F_p^2 + \cdots + \sum_{p=n-k}^{n-1} F_p^2\right)$$

$$= \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{p=1}^{k} F_p^2 + \sum_{p=2}^{k+1} F_p^2 + \cdots + \sum_{p=n-k}^{n-1} F_p^2\right)$$

$$= \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2\right)$$

นั่นคือ ถ้าเมทริกซ์ถูกแบ่งกั้นให้อยู่ในรูป $C_{n,r} = \begin{bmatrix} P & X \\ Y & Q \end{bmatrix}$ โดยที่ P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $k \times k$ หรือ $\left(n-k\right)\times\left(n-k\right)$ แล้ว $\left(\left\|X\right\|_F - \left\|Y\right\|_F\right)^2 = \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2\right)$ ถ้าให้ $\beta_k = \left(\left\|X\right\|_F - \left\|Y\right\|_F\right)^2$ และเนื่องด้วย สำหรับ $1 \le k < n$; $\beta_k = \beta_{n-k}$ จะได้ว่า $\beta_1 = \beta_{n-1} < \beta_2 = \beta_{n-2} < \cdots < \beta_\alpha$ เมื่อ

$$\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n\pm 1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ดังนั้น ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว $\left(\left\|X\right\|_F - \left\|Y\right\|_F\right)^2$ จะมีค่ามากสุดเมื่อ $k = \dfrac{n}{2}$ และถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\left(\left\|X\right\|_F - \left\|Y\right\|_F\right)^2$ จะมีค่ามากสุดเมื่อ $k = \dfrac{n+1}{2}$ หรือ $k = \dfrac{n-1}{2}$ นั่นคือ $\left(\left\|X\right\|_F - \left\|Y\right\|_F\right)^2 = \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{\alpha}\sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} F_p^2\right)$

เมื่อ $\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n\pm 1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

จากอสมการ (2.4) จะได้ $s\left(C_{n,r}\right) \leq$

$$\sqrt{2\left\|C_{n,r}\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left|\operatorname{tr}\left(C_{n,r}\right)\right|^2 - 2\left(\|X\|_F - \|Y\|_F\right)^2}$$

$$= \left[2\left(nF_nF_{n-1} + \left(|r|^2 - 1\right)\sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2\right) - 2\left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{\alpha}\sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} F_p^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

เมื่อ $\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n\pm1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$ □

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $C_{4,r}$ เป็นเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี นั่นคือ

$$C_{4,r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ r\cdot2 & 0 & 1 & 1 \\ r\cdot1 & r\cdot2 & 0 & 1 \\ r\cdot1 & r\cdot1 & r\cdot2 & 0 \end{bmatrix}$$

ถ้า $r = 2$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,2}) \approx 9.1056$ และจากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $s(C_{4,2}) \leq 11.1355$

ถ้า $r = \frac{1}{2}$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s\left(C_{4,\frac{1}{2}}\right) \approx 4.0602$ และจากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $s\left(C_{4,\frac{1}{2}}\right) \leq 4.6904$

ถ้า $r = 1 + i$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,1+i}) \approx 7.2497$ และจากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $s(C_{4,1+i}) \leq 8.6947$ □

สำหรับทฤษฎีบทสุดท้ายของงานวิจัย เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{C}$ และ $C_{n,r} = r\text{Circ}(L_0, L_1, L_2, \ldots, L_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส แล้วจะได้ว่า $s\left(C_{n,r}\right) \leq$

$$\left[2n\left(L_nL_{n-1} - 2\right) + 2\left(|r|^2 - 1\right)\sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2 - 2\left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{\alpha}\sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} L_p^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

เมื่อ $\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n\pm1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

พิสูจน์ เนื่องด้วย $\left\|C_{n,r}\right\|_F^2 = \sum_{p=0}^{n-1}(n-p)L_p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p|r|^2 L_p^2$

$$= n\sum_{p=0}^{n-1} L_p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p|r|^2 L_p^2$$

$$= n\sum_{p=0}^{n-1} L_p^2 + \left(|r|^2 - 1\right)\sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2$$

และจากสมบัติของลำดับลูคัส (2.2) $\sum_{p=0}^{n-1} L_p^2 = L_nL_{n-1} + 2$

จะได้ว่า $\left\|C_{n,r}\right\|_F^2 = n\left(L_nL_{n-1} + 2\right) + \left(|r|^2 - 1\right)\sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2$

นอกจากนี้ $\left|\operatorname{tr}\left(C_{n,r}\right)\right| = nL_0 = 2n$ จากการแบ่งกั้นเมทริกซ์ให้อยู่ในรูป $C_{n,r} = \begin{bmatrix} P & X \\ Y & Q \end{bmatrix}$ โดยที่ P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $k \times k$ และ $1 \leq k < n$ จะได้ว่า

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2}, \quad \|Y\|_F = |r|\sqrt{\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2}$$

ดังนั้น $\left(\|X\|_F - \|Y\|_F\right)^2 = \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2\right)$

นอกจากนี้ สังเกตได้ว่า ถ้า P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $(n-k)\times(n-k)$ และ $1 \leq k < n$ จะได้ว่า

$$\left(\|X\|_F - \|Y\|_F\right)^2 = \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{n-k}\sum_{p=q}^{k+q-1} L_p^2\right)$$

$$= \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{p=1}^{k} L_p^2 + \sum_{p=2}^{k+1} L_p^2 + \cdots + \sum_{p=n-k}^{n-1} L_p^2\right)$$

$$= \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{p=1}^{n-k} L_p^2 + \sum_{p=2}^{n-k+1} L_p^2 + \cdots + \sum_{p=k}^{n-1} L_p^2\right)$$

$$= \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2\right)$$

นั่นคือ ถ้าเมทริกซ์ถูกแบ่งกั้นให้อยู่ในรูป $C_{n,r} = \begin{bmatrix} P & X \\ Y & Q \end{bmatrix}$ โดยที่ P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $k \times k$ หรือ $(n-k)\times(n-k)$ แล้ว $\left(\|X\|_F - \|Y\|_F\right)^2 = \left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{k}\sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2\right)$

ถ้าให้ $\beta_k = \left(\|X\|_F - \|Y\|_F\right)^2$ และเนื่องด้วย สำหรับ $1 \leq k < n$; $\beta_k = \beta_{n-k}$ จะได้ว่า $\beta_1 = \beta_{n-1} < \beta_2 = \beta_{n-2} < \cdots < \beta_\alpha$

เมื่อ $\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n\pm1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ดังนั้นถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว $\left(\|X\|_F-\|Y\|_F\right)^2$ จะมีค่ามากสุดเมื่อ $k=\frac{n}{2}$ และถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว $\left(\|X\|_F-\|Y\|_F\right)^2$ จะมีค่ามากสุดเมื่อ $k=\frac{n+1}{2}$ หรือ $k=\frac{n-1}{2}$ นั่นคือ $\left(\|X\|_F-\|Y\|_F\right)^2=(1-|r|)^2\left(\sum_{q=1}^{\alpha}\sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1}L_p^2\right)$

เมื่อ $\alpha=\begin{cases}\frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่}\\ \frac{n\pm1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่}\end{cases}$

จากอสมการ (2.4) จะได้ว่า $s\left(C_{n,r}\right)\le\sqrt{2\left\|C_{n,r}\right\|_F^2-\frac{2}{n}\left|\operatorname{tr}\left(C_{n,r}\right)\right|^2-2\left(\|X\|_F-\|Y\|_F\right)^2}$

$$=\left[2\left(n\left(L_nL_{n-1}+2\right)+\left(|r|^2-1\right)\sum_{p=0}^{n-1}pL_p^2\right)-\frac{2}{n}\left(4n^2\right)-2\left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{\alpha}\sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1}L_p^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[2n\left(L_nL_{n-1}-2\right)+2\left(|r|^2-1\right)\sum_{p=0}^{n-1}pL_p^2-2\left(1-|r|\right)^2\left(\sum_{q=1}^{\alpha}\sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1}L_p^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

ตัวอย่าง 3.4 กำหนดให้ $C_{4,r}$ เป็นเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส นั่นคือ

$$C_{4,r}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ r\cdot4 & 2 & 1 & 3\\ r\cdot3 & r\cdot4 & 2 & 1\\ r\cdot1 & r\cdot3 & r\cdot4 & 2\end{bmatrix}$$

ถ้า $r=2$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,2})\approx 17.3114$ และจากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ $s(C_{4,2})\le 23.2379$

ถ้า $r=\frac{1}{2}$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s\left(C_{4,\frac{1}{2}}\right)\approx 7.6187$ และจากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ $s\left(C_{4,\frac{1}{2}}\right)\le 9.4868$

ถ้า $r=1+i$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,1+i})\approx 14.8698$ และจากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ $s(C_{4,1+i})\le 18.1656$ □

4. สรุป

แรงจูงใจของงานวิจัยนี้เกิดจากงานวิจัยของนักวิจัยหลายท่าน โดยเฉพาะงานวิจัยของ Sharma และ Kumar [5] ซึ่งให้ข้อสังเกตของขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ใด ๆ การศึกษางานวิจัยดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยต้องการศึกษาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ โดยผู้วิจัยได้ให้สมาชิกของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์เป็นลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส ผลของการวิจัยทำให้ได้ขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี ดังบทแทรก 3.1 และทฤษฎีบท 3.3 ตามลำดับ และผู้วิจัยได้ขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส ดังบทแทรก 3.2 และทฤษฎีบท 3.4 ตามลำดับ

5. References

[1] Mirsky, L., 1956, The spread of a matrix, Mathematika 3: 127-130.

[2] Johnson, C.R., Kumar, R. and Wolkowicz, H., 1985, Lower bounds for the spread of a matrix, Linear Algebra Appl. 29: 161-173.

[3] Jiang, E. and Zhan, X., 1997, Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix, Linear Algebra Appl. 256: 153-163.

[4] Wu, J., Zhang, P. and Liao, W., 2012, Upper bounds for the spread of a matrix, Linear Algebra Appl. 437: 2813-2822.

[5] Sharma, R. and Kumar, R., 2013, Remark on upper bounds for the spread of a matrix, Linear Algebra Appl. 438: 4359-4362.

[6] Meyer, C.D., 2000, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 718 p.

[7] Shen, S. and Cen, J., 2010, On the bounds for the norms of r-circulant Matrices with the Fibonacci
and Lucas numbers, Appl. Math. Comput. 216: 2891-2897.

[8] Zhou, J. and Jiang, Z., 2014, The spectral norms of g-circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries, Appl. Math. Comput. 233: 582-587.

[9] Zhou, J. and Jiang, Z., 2015, A note on spectral norms of even-order r-circulant matrices, Appl. Math. Comput. 250: 368-371.