2 ความรู้พื้นฐาน

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติบางประการที่จำเป็นต้องรู้จักของจำนวนเต็มเกาส์

เซตของจำนวนเต็มเกาส์ (Gaussian Integers) จะเป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเชิงซ้อน(Complex numbers) มีคุณสมบัติเป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม(Integral Domain) สมาชิกเขียนอยู่ในรูปของ a+bi เมื่อ a,b เป็นจำนวนเต็ม $i = \sqrt{-1}$ และเขียนแทนเซตของจำนวนเต็มเกาส์ด้วย Z[i] สำหรับ α,β ใน Z[i] จะกล่าวว่า α หาร β ลงตัวใน Z[i] ถ้ามี γ ใน Z[i] ที่ $\alpha\gamma = \beta$ และเขียนแทนด้วย $\alpha \mid \beta$ สำหรับ $\alpha = a+bi$ ใน Z[i] ค่าประจำ(norm)ของ α (เขียนแทนด้วย $N(\alpha)$) คือ $N(\alpha) = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ จะเห็นว่า ค่าประจำของจำนวนเต็มเกาส์ใด ๆ จะเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และทุก α,β ใน Z[i] $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, ถ้า $\alpha \neq 0$ และ $\alpha \mid \beta$ แล้ว $N(\alpha) \mid N(\beta)$ ในเซตของจำนวนเต็ม จำนวนเต็มเกาส์ ε ใดๆ จะเรียกว่า สมาชิกหนึ่งหน่วย(unit) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มเกาส์ ε'ที่ $\varepsilon\varepsilon' = 1$ ซึ่งจะสามารถแสดงต่อไปได้ว่า $N(\varepsilon) = 1$ และสมาชิกหนึ่งหน่วยของ Z[i] จะมีเพียง 4 ตัวคือ 1,-1,i,-i และ จำนวนเต็มเกาส์ α,β จะเรียกว่า เป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกัน(Associate) ถ้ามีสมาชิกหนึ่งหน่วย ε ใน Z[i] ที่ $\alpha\varepsilon = \beta$ และจะเรียก α ว่าเป็นจำนวนเฉพาะ(Prime) ใน Z[i] ก็ต่อเมื่อ α ไม่เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยและถ้า $\rho \mid \alpha$ ใน Z[i] แล้ว ρ จะเป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยหรือเป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกับ α

ถ้า $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ จะกล่าวว่า ρ เป็น ห.ร.ม. (Greatest Common Divisor) ของ α กับ β ถ้า $\rho|\alpha$, $\rho|\beta$ และถ้ามี γ ใน Z[i] ที่ $\gamma|\alpha$, $\gamma|\beta$ แล้ว $\gamma|\rho$ ถ้า ห.ร.ม.ของจำนวนเต็มเกาส์ α กับ β เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย เราจะเรียก α กับ β ว่าเป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน(Relatively Prime) ใน Z[i]

ในการกำหนดจำนวนเต็มเกาส์คู่และจำนวนเต็มเกาส์คี่นั้น จะใช้ 1+i ทำหน้าที่คล้าย 2 ในเซตของจำนวนเต็ม ใน [4] ได้แสดงว่า จำนวนเต็มเกาส์ a+bi หารด้วย 1+i ลงตัว ก็ต่อเมื่อ a+b หารด้วย 2 ลงตัวในเซตของจำนวนเต็ม และยังพบว่า สำหรับจำนวนเต็มเกาส์ α ใดๆ α หารด้วย 1+i ลงตัว หรือ α -1 หารด้วย 1+i ลงตัว เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น และจะเรียก α ใน Z[i] ที่หารด้วย 1+i ลงตัวว่า จำนวนเต็มเกาส์คู่ และเรียก α ใน Z[i] ที่ α-1 หารด้วย 1+i ลงตัวว่า จำนวนเต็มเกาส์คี่

จากการกำหนดจำนวนเต็มเกาส์คู่และจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะได้ว่า

1. ผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คู่หรือผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่
2. ผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คู่กับจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่
3. ผลคูณของจำนวนเต็มเกาส์คู่กับจำนวนเต็มเกาส์คู่หรือคี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่
4. ผลคูณของจำนวนเต็มเกาส์คี่กับจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่
5. ให้ α เป็นจำนวนเต็มเกาส์ใด ๆ
   - 5.1 ถ้า α^2 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ แล้ว α จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่
   - 5.2 ถ้า α^2 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ แล้ว α จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่
6. จำนวนเฉพาะคู่จะมีเพียง 4 ตัวเท่านั้นคือ 1+i, 1-i, -1+i, -1-i

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 ให้ α,β เป็นจำนวนเต็มเกาส์ ถ้า $(\frac{\alpha}{\beta})^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ แล้ว $\frac{\alpha}{\beta}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์

พิสูจน์ ให้ α,β เป็นจำนวนเต็มเกาส์ที่ $(\frac{\alpha}{\beta})^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ เราสามารถสมมุติให้ ห.ร.ม. ของ α กับ β เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย จาก $(\frac{\alpha}{\beta})^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ จะมีจำนวนเต็มเกาส์ γ ที่ $\alpha^2 = \gamma\beta^2$ นั่นคือ $\beta|\alpha^2$ จาก ห.ร.ม. ของ α กับ β เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย จะได้ $\beta|\alpha$

เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{\beta}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ ❑