

1 บทนำ

ให้ $Z[i] = \{ a+bi \mid a,b \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } i = \sqrt{-1} \}$ ซึ่งจะเรียกว่า เซตของจำนวนเต็มเกาส์
อันดับสามชั้น (α, β, γ) ใน $Z[i]$ จะเป็นคำตอบปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i]$ โดยที่ μ
เป็นจำนวนเฉพาะเกาส์ ถ้าแต่ละคู่ของ α, β, γ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ให้ (α, β, γ) และ $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ เป็นคำตอบปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i]$
โดยที่ μ เป็นจำนวนเฉพาะเกาส์แล้ว

$(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกหนึ่งหน่วย $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ที่ $\alpha = \varepsilon_1 \alpha_1, \beta = \varepsilon_2 \beta_1, \gamma = \varepsilon_3 \gamma_1$
จะได้ว่า $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล

ดังนั้นคำตอบของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i]$ จะถูกแบ่งออกเป็นกลุ่มสมมูล และเขียน $[(\alpha, \beta, \gamma)]$
แทนกลุ่มสมมูลที่มี (α, β, γ) เป็นสมาชิก และจะถือว่า คำตอบของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i]$
ที่อยู่ในกลุ่มสมมูลเดียวกันไม่แตกต่างกัน

งานวิจัยนี้ได้แสดงว่า คำตอบปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i]$ โดยที่ μ เป็น
จำนวนเฉพาะเกาส์จะอยู่ในรูปแบบ $\left[\left(\frac{\sigma(\mu p^2 - \lambda^2)}{2}, \sigma p \lambda, \frac{\sigma(\mu p^2 + \lambda^2)}{2} \right) \right]$

เมื่อ σ, p, λ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ $N(\sigma) \leq 2$ และ p, λ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

และเมื่อกำหนด σ, p, λ, μ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ ที่ $\frac{\sigma(\mu p^2 - \lambda^2)}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ แล้ว

$$\left(\frac{\sigma(\mu p^2 - \lambda^2)}{2}, \sigma p \lambda, \frac{\sigma(\mu p^2 + \lambda^2)}{2} \right)$$

จะเป็นคำตอบของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i]$ เสมอ