

บทที่ 4

คอนกรูเอนซ์บนเนียร์-ริง

ในบทนี้จะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างไอดีลของเนียร์-ริง N กับ คอนกรูเอนซ์บนเนียร์-ริง N ซึ่งคอนกรูเอนซ์เป็นความสัมพันธ์สมมูลชนิดหนึ่งที่มี คุณสมบัติบางประการเพิ่มเติมดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1 ให้ N เป็นเนียร์-ริง จะเรียกความสัมพันธ์สมมูล ρ บน N ว่าเป็น คอนกรูเอนซ์บน N (congruence on N) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $x, y, z \in N$

- (1) ถ้า $(x, y) \in \rho$ แล้ว $(xz, yz) \in \rho$ และ $(zx, zy) \in \rho$
และ (2) ถ้า $(x, y) \in \rho$ แล้ว $(x + z, y + z) \in \rho$ และ $(z + x, z + y) \in \rho$

□

จากตัวอย่าง 3.3 เราเห็นได้ว่า ρ เป็นคอนกรูเอนซ์บน S_3 ซึ่งยังได้อีกว่า ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $S_3 \times S_3$ ด้วย เงื่อนไขที่ ρ เป็นคอนกรูเอนซ์ทำให้เราได้ว่า ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ N เป็นเนียร์-ริง และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน N จะได้ว่า ρ เป็นคอนกรูเอนซ์ก็ต่อเมื่อ ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$: สมมติว่า ρ เป็นคอนกรูเอนซ์บน N

ให้ $(a, b), (c, d) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นคอนกรูเอนซ์จะได้ว่า $(a + c, b + c) \in \rho$ และ $(b + c, b + d) \in \rho$ โดยสมบัติการถ่ายทอดใน ρ จะได้ว่า $(a + c, b + d) \in \rho$ ดังนั้น ρ ปิดภายใต้การบวกใน $N \times N$ ให้ $(a, b), (c, d) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นคอนกรูเอนซ์จะได้ว่า $(ac, bc) \in \rho$ และ $(bc, bd) \in \rho$ โดยคุณสมบัติการถ่ายทอด

ใน p จะได้ว่า $(ac, bd) \in p$ ดังนั้น p ปิดภายใต้การบวกและการคูณใน $N \times N$

โดยทฤษฎีบท 3.10 จะได้ว่า p เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$

($\Leftarrow$) : สมมติว่า p เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$

ให้ $(a, b) \in p$ และ $c \in N$ จะได้ว่า $(c, c) \in p$ ทั้งนี้เพราะ p เป็น

ความสัมพันธ์สมมูล เนื่องจาก p เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$

$$\text{จะได้ว่า } (a, b)(c, c) = (ac, bc) \in p$$

$$(c, c)(a, b) = (ca, cb) \in p$$

$$(a, b) + (c, c) = (a + c, b + c) \in p$$

$$(c, c) + (a, b) = (c + a, c + b) \in p$$

ดังนั้น p เป็นคอนกรูเอนซ์บน N

□

บทแทรก 4.3 ถ้า p เป็นคอนกรูเอนซ์บนเนียร์-ริง N นิยาม

$[0]_p = \{x \in N \mid (x, 0) \in p\}$ แล้ว $[0]_p$ เป็นไอดีลของ N

พิสูจน์ เป็นไปตามเลมมา 3.7 และทฤษฎีบท 4.2

□

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ N เป็นเนียร์-ริง และ p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน N

จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(ก) p ปิดภายใต้การบวกและการคูณ

(ข) p เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$

(ค) $p \in \mathcal{P}_N$

(ง) p เป็นคอนกรูเอนซ์บน N

พิสูจน์ เป็นไปตามทฤษฎีบท 3.10 และทฤษฎีบท 4.2

□

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ N เป็นเนียร์-ริง และ I เป็นไอดีลของ N ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ ρ_I บน N โดยสำหรับทุก ๆ $x, y \in N$, $(x, y) \in \rho_I$ ก็ต่อเมื่อ $x + I = y + I$ แล้ว ρ_I เป็นคอนกรูเอนซ์บน N

พิสูจน์ เป็นผลมาจากเลมมา 3.9 และทฤษฎีบท 4.2

□

จากทฤษฎีบท 4.5 ถ้า I เป็นไอดีลของเนียร์-ริง N เราสามารถสร้างคอนกรูเอนซ์ ρ_I ได้ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนไอดีลทั้งหมดของ N กับจำนวนคอนกรูเอนซ์ทั้งหมดบน N

บทนิยาม 4.6 ให้ N เป็นเนียร์-ริง นิยาม

$$\mathcal{I}(N) = \{ I \subseteq N \mid I \text{ เป็นไอดีลของ } N \}$$

$$\mathcal{C}(N) = \{ \rho \mid \rho \text{ เป็นคอนกรูเอนซ์บน } N \}$$

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ N เป็นเนียร์-ริง ถ้าให้

$$\Phi_N : \mathcal{I}(N) \rightarrow \mathcal{C}(N) \text{ นิยามโดย } \Phi_N(I) = \rho_I$$

$$\Psi_N : \mathcal{C}(N) \rightarrow \mathcal{I}(N) \text{ นิยามโดย } \Psi_N(\rho) = [0]_\rho$$

แล้ว Φ_N, Ψ_N ต่างก็เป็นไบเจกทิฟที่เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน

พิสูจน์ ให้ $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(N)$ และ $I_1 = I_2$

$$(x, y) \in \rho_{I_1} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x + I_1 = y + I_1$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x - y \in I_1$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x - y \in I_2$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x + I_2 = y + I_2$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad (x, y) \in \rho_{I_2}$$

ดังนั้น $\rho_{I_1} = \rho_{I_2}$ นั่นคือ $\Phi_N(I_1) = \Phi_N(I_2)$

จึงได้ว่า Φ_N ถูกนิยามไว้ดีแล้ว

ให้ $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{C}(N)$ และ $\rho_1 = \rho_2$

$x \in [0]_{\rho_1}$ ก็ต่อเมื่อ $(x, 0) \in \rho_1$

ก็ต่อเมื่อ $(x, 0) \in \rho_2$

ก็ต่อเมื่อ $x \in [0]_{\rho_2}$

นั่นคือ $[0]_{\rho_1} = [0]_{\rho_2}$ ดังนั้น $\Psi_N(\rho_1) = \Psi_N(\rho_2)$

จึงได้ว่า Ψ_N ถูกนิยามไว้ดีแล้ว

ต่อไปจะแสดงว่า $\Phi_N \circ \Psi_N = i_{\mathcal{C}(N)}$ และ $\Psi_N \circ \Phi_N = i_{\mathcal{A}(N)}$

ให้ $\rho \in \mathcal{C}(N)$ พิจารณา $\Phi_N \circ \Psi_N(\rho) = \Phi_N(\Psi_N(\rho))$
 $= \Phi_N([0]_{\rho})$
 $= \rho_{[0]_{\rho}}$

$(x, y) \in \rho_{[0]_{\rho}}$ ก็ต่อเมื่อ $x + [0]_{\rho} = y + [0]_{\rho}$

ก็ต่อเมื่อ $(x, y) \in \rho$

ดังนั้น $\rho_{[0]_{\rho}} = \rho$

นั่นคือ $\Phi_N \circ \Psi_N = i_{\mathcal{C}(N)}$

ให้ $I \in \mathcal{A}(N)$ พิจารณา

$\Psi_N \circ \Phi_N(I) = \Psi_N(\Phi_N(I)) = \Psi(\rho_I) = [0]_{\rho_I}$

$x \in [0]_{\rho_I}$ ก็ต่อเมื่อ $(x, 0) \in \rho_I$

ก็ต่อเมื่อ $x + I = 0 + I = I$

ก็ต่อเมื่อ $x \in I$

นั่นคือ $\Psi_N \circ \Phi_N = i_{\mathcal{A}(N)}$

ดังนั้น Φ_N และ Ψ_N ต่างก็เป็นไบเจกทีฟที่เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน

□

จากทฤษฎีบท 4.7 ทำให้เราได้ว่าจำนวนไอเดิลทั้งหมดของเนียร์-ริง N กับจำนวนคอนกรูเอนซ์บน N ทั้งหมดมีจำนวนเท่ากัน ยิ่งกว่านั้นเรายังได้ว่าจำนวนความสัมพันธ์สมมูลบน N ที่เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ ทั้งหมดมีจำนวนเท่ากับจำนวนไอเดิลทั้งหมดของ N ทั้งนี้เพราะคอนกรูเอนซ์เป็นความสัมพันธ์สมมูลที่เป็นสับเนียร์-ริง ดังทฤษฎีบท 4.2

บทนิยาม 4.8 ให้ N และ N' เป็นเนียร์-ริง จะเรียกฟังก์ชัน $f: N \rightarrow N'$ ว่าเป็น โฮโมมอร์ฟิซึม (homomorphism) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $x, y \in N$

$$(1) \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$\text{และ } (2) \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $f: N \xrightarrow{\text{homo}} N'$

□

ทฤษฎีบท 4.9 ให้ N, N' เป็นเนียร์-ริง และ $f: N \xrightarrow{\text{homo}} N'$

ถ้า I' เป็นไอเดิลของ N' แล้ว $f^{-1}(I')$ เป็นไอเดิลของ N

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1.8 จะได้ว่า $f^{-1}(I')$ เป็นนอร์มัลสับกรุป

ให้ $x \in f^{-1}(I'), n \in N$ ดังนั้น $f(x) \in I'$ และ $f(n) \in N'$ เนื่องจาก

$$f(x)f(n) = f(xn) \in I' \quad \text{จะได้ว่า } xn \in f^{-1}(I') \quad \text{ดังนั้น } f^{-1}(I')N \subseteq f^{-1}(I')$$

ให้ $n, n' \in N, i \in f^{-1}(I')$ ดังนั้น $f(i) \in I'$ และ $f(n), f(n') \in N'$ เนื่องจาก

$$f: N \xrightarrow{\text{homo}} N'$$

$$\text{พิจารณา } f(n)(f(n') + f(i)) - f(n)f(n') = f(n)f(n' + i) - f(nn') \in I'$$

$$= f(n(n' + i)) - f(nn') \in I'$$

$$= f(n(n' + i) - nn') \in I'$$

ดังนั้น $n(n' + i) - nn' \in f^{-1}(I')$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(I')$ เป็นไอเดิลของ N

□

บทนิยาม 4.10 ให้ N, N' เป็นเนียร์-ริง และ $f: N \xrightarrow{\text{homo}} N'$

นิยาม $f \times f: N \times N \rightarrow N' \times N'$ โดยสำหรับทุก ๆ $(a, b) \in N \times N$

$$f \times f((a, b)) = (f(a), f(b))$$

□

ทฤษฎีบท 4.11 ให้ N, N' เป็นเนียร์-ริง และ $f: N \xrightarrow{\text{homo}} N'$

ถ้า p' เป็นคอนกรูเอนซ์บน N' แล้ว $(f \times f)^{-1}(p')$ เป็นคอนกรูเอนซ์บน N

พิสูจน์ ให้ $x \in N$ จะได้ $f(x) \in N'$ ดังนั้น $(f(x), f(x)) \in p'$ นั่นคือ

$$f \times f((x, x)) \in p' \quad \text{ดังนั้น } (x, x) \in (f \times f)^{-1}(p')$$

ให้ $(x, y) \in (f \times f)^{-1}(p')$ จะได้ $f \times f((x, y)) \in p'$ นั่นคือ $(f(x), f(y)) \in p'$

โดยคุณสมบัติการสมมาตรใน p'

เราได้ว่า $(f(y), f(x)) \in p'$ นั่นคือ $f \times f((y, x)) \in p'$ ดังนั้น $(y, x) \in (f \times f)^{-1}(p')$

ให้ $(x, y), (y, z) \in (f \times f)^{-1}(p')$ จะได้ $f \times f((x, y)) = (f(x), f(y)) \in p'$

และ $f \times f((y, z)) = (f(y), f(z)) \in p'$ โดยคุณสมบัติการถ่ายทอดใน p' จึงได้ว่า

$(f(x), f(z)) \in p'$ นั่นคือ $f \times f((x, z)) \in p'$ ดังนั้น $(x, z) \in (f \times f)^{-1}(p')$

เพราะฉะนั้น $(f \times f)^{-1}(p')$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน N

ให้ $(a, b) \in (f \times f)^{-1}(p'), c \in N$ จะได้ว่า $f \times f((a, b)) = (f(a), f(b)) \in p'$

และ $f(c) \in N'$

เนื่องจาก p' เป็นคอนกรูเอนซ์บน N' จะได้ว่า $(f(a)f(c), f(b)f(c)) \in p'$

เนื่องจาก $f: N \xrightarrow{\text{homo}} N'$ เราได้ว่า $(f(a)f(c), f(b)f(c)) = (f(ac), f(bc)) \in p'$

นั่นคือ $f \times f((ac, bc)) \in p'$ ดังนั้น $(ac, bc) \in (f \times f)^{-1}(p')$

ในทำนองเดียวกัน $(ca, cb) \in (f \times f)^{-1}(p')$

ให้ $(x,y) \in (f \times f)^{-1}(\rho')$ และ $z \in N$ จะได้ว่า $f \times f((x,y)) = (f(x), f(y)) \in \rho'$
 และ $f(z) \in N'$
 เนื่องจาก ρ' เป็นคอนกรูเอนซ์บน N' จะได้ว่า $(f(x) + f(z), f(y) + f(z)) \in \rho'$
 และจากที่ $f: N \xrightarrow{\text{homo}} N'$ จึงได้ว่า $(f(x+z), f(y+z)) \in \rho'$
 นั่นคือ $f \times f((x+z, y+z)) \in \rho'$ ดังนั้น $(x+z, y+z) \in (f \times f)^{-1}(\rho')$
 ในทำนองเดียวกัน $(z+x, z+y) \in (f \times f)^{-1}(\rho')$
 เพราะฉะนั้น $(f \times f)^{-1}(\rho')$ เป็นคอนกรูเอนซ์บน N □

ทฤษฎีบท 4.12 ให้ N, N' เป็นเนียร์-ริง และ $f: N \xrightarrow{\text{homo}} N'$
 กำหนด $\mathcal{I}(f): \mathcal{I}(N') \rightarrow \mathcal{I}(N)$ โดยสำหรับทุก ๆ ไอเดียล K' ของ N' ,
 $\mathcal{I}(f)(K') = f^{-1}(K')$ และนิยาม $\mathcal{C}(f): \mathcal{C}(N') \rightarrow \mathcal{C}(N)$
 โดยสำหรับทุก ๆ คอนกรูเอนซ์ ρ' บน N' , $\mathcal{C}(f)(\rho') = (f \times f)^{-1}(\rho')$
 แล้วโคอะแกรม

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{I}(N) & \xrightarrow{\Phi_N} & \mathcal{C}(N) \\
 \mathcal{I}(f) \uparrow & & \uparrow \mathcal{C}(f) \\
 \mathcal{I}(N') & \xrightarrow{\Phi_{N'}} & \mathcal{C}(N')
 \end{array}$$

คอมมิวต์ เมื่อ Φ_N และ $\Phi_{N'}$ นิยามเป็นไปตามทฤษฎีบท 4.7

พิสูจน์ จะแสดงว่า $\Phi_N \circ \mathcal{I}(f) = \mathcal{C}(f) \circ \Phi_{N'}$

ให้ $K' \in \mathcal{I}(N')$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 \Phi_N \circ \mathcal{I}(f)(K') &= \Phi_N(\mathcal{I}(f)(K')) \\
 &= \Phi_N(f^{-1}(K')) \\
 &= \rho_{f^{-1}(K')}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}(f) \circ \Phi_{N'}(K') = \mathcal{C}(f)(\Phi_{N'}(K'))$$

$$= \mathcal{C}(f)(p'_{K'})$$

$$= (f \times f)^{-1}(p'_{K'})$$

$$(x, y) \in p_{f^{-1}(K')} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x + f^{-1}(K') = y + f^{-1}(K')$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x - y \in f^{-1}(K')$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad f(x - y) \in K'$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad f(x) - f(y) \in K'$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad f(x) + K' = f(y) + K'$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad (f(x), f(y)) \in p'_{K'}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad (x, y) \in (f \times f)^{-1}(p'_{K'})$$

$$\text{ดังนั้น} \quad p_{f^{-1}(K')} = (f \times f)^{-1}(p'_{K'})$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \Phi_N \circ \mathcal{A}(f) = \mathcal{C}(f) \circ \Phi_{N'}$$

ดังนั้นโคอะแกรมคอมมิวส

□