

บทที่ 3

ความสัมพันธ์สมมูลบนเนียร์-ริง

บทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์สมมูลบนโครงสร้างทางพีชคณิตที่เกือบจะเป็นริงที่เรียกว่า เนียร์-ริง ซึ่งเนียร์-ริงมีเงื่อนไขที่อ่อนกว่าริงโดยจะศึกษาความสัมพันธ์สมมูลดังกล่าวนี้ว่ามีคุณสมบัติเหมือนกับความสัมพันธ์สมมูลบนริงหรือไม่

บทนิยาม 3.1 ให้ N เป็นเซตไม่ว่างจะเรียกระบบ $(N, +, \cdot)$ ว่าเป็นเนียร์-ริง (near-ring) ก็ต่อเมื่อ

- (1) $(N, +)$ เป็นกรุป
- (2) $(N, \cdot)$ เป็นเซมิกรุป
- (3) สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in N$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

จะเรียก N ว่าเป็น ซีโร-ซิมเมตริกซ์เนียร์-ริง (zero-symmetric near-ring) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $x \in N$, $x \cdot 0 = 0$

จะเรียก N ว่าเป็น คอมมิวเตทีฟเนียร์-ริง (commutative near-ring) ก็ต่อเมื่อ $(N, +)$ เป็นอะบีเลียนกรุป

ข้อตกลง ให้ $(N, +, \cdot)$ เป็นเนียร์-ริง เพื่อความสะดวกจะเขียน $a \cdot b$ แทนด้วย ab สำหรับทุก ๆ $a, b \in N$

ตัวอย่าง 3.1

- (1) ริงทุกริงเป็นซีโร-ซิมเมตริกซ์ และคอมมิวเตทีฟเนียร์-ริง
- (2) ให้ S_3 เป็นซิมเมตริกซ์กรุปนิยามการบวก (+) ใน S_3 คือการคอมโพสิท และการคูณ ($\cdot$) นิยามโดยสำหรับทุก ๆ $a, b \in S_3$ $a \cdot b = 0$ เราได้ว่า $(S_3, +, \cdot)$ เป็นเนียร์-ริงที่ไม่คอมมิวเตทีฟ

(3) ให้ $(G, *)$ เป็นกรุปที่ไม่อะบีเลียน

ให้ $N = \{f \mid f: G \rightarrow G\}$ นิยามการบวก $(+)$ และการคูณ $(\cdot)$ ใน N ดังนี้

สำหรับทุก ๆ $f, g \in N, x \in G$

$$(f + g)(x) = f(x) * g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = fog(x) = f(g(x))$$

นิยามศูนย์ใน N ดังนี้ สำหรับทุก ๆ $x \in G$

$$\theta(x) = 0 \quad \text{เมื่อ } 0 \text{ เป็นเอกลักษณ์ใน } G$$

สำหรับทุก ๆ $f \in N$ นิยาม $-f$ ดังนี้

$$(-f)(x) = f(x)^{-1} \quad \text{เมื่อ } f(x)^{-1} \text{ เป็นอินเวอร์สของ } f(x) \text{ ใน } G$$

จากนี้เราได้ว่า $(N, +, \cdot)$ เป็นเนียร์-ริง ที่ไม่คอมมิวเตทีฟ ไม่เป็น
ซีโร-ซิมเมตริกซ์ และไม่มีคุณสมบัติการกระจายทางซ้ายทั้งนี้เพราะ

(i) $(N, +)$ เป็นกรุปไม่อะบีเลียนดังจะแสดงได้ดังนี้

ให้ $f, g, h \in N$ เนื่องจาก $D_f \cap D_g = G$ ดังนั้น $f + g \in N$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) * h(x) \\ &= (f(x) * g(x)) * h(x) \\ &= f(x) * (g(x) * h(x)) \\ &= f(x) * (g + h)(x) \\ &= (f + (g + h))(x) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (f + g) + h = f + (g + h)$$

มี θ เป็นเอกลักษณ์การบวก ทั้งนี้เพราะ

$$(f + \theta)(x) = f(x) * \theta(x) = f(x) * 0 = f(x)$$

$$\text{และ } (\theta + f)(x) = \theta(x) * f(x) = 0 * f(x) = f(x)$$

$$\text{นั่นคือ } f + \theta = \theta + f = f$$

สำหรับทุก ๆ $f \in N$ จะมี $-f \in N$ ซึ่งเป็นอินเวอร์สการบวกของ f ใน N

$$\begin{aligned} \text{ทั้งนี้เพราะ } (f + (-f))(x) &= f(x) * (-f)(x) \\ &= f(x) * f(x)^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } (-f + f)(x) &= (-f)(x) * f(x) \\
 &= f(x)^{-1} * f(x) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } -f + f = f + (-f) = 0$$

เนื่องจาก G ไม่อะบีเลียนจึงได้ว่า $(N, +)$ ไม่อะบีเลียน

(ii) $(N, \cdot)$ เป็นเซมิกรุป ดังจะแสดงได้ดังนี้

ให้ $f, g \in N$ เนื่องจาก $D_g = G$ ดังนั้น $D_{fog} = G$ ดังนั้น $fog \in N$

นั่นคือ $f \cdot g \in N$ ให้ $f, g, h \in N$ เนื่องจาก $(fog)oh = fo(goh)$ จะได้ว่า

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$$

(iii) ให้ $f, g, h \in N$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } ((f + g) \cdot h)(x) &= ((f + g)oh)(x) \\
 &= (f + g)(h(x)) \\
 &= f(h(x)) * g(h(x)) \\
 &= foh(x) * goh(x) \\
 &= f \cdot h(x) * g \cdot h(x) \\
 &= (f \cdot h + g \cdot h)(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } (f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$$

เห็นได้โดยง่ายว่าถ้า h ไม่โฮโมมอร์ฟิซึมไม่จำเป็นที่

$h \cdot (f + g) = h \cdot f + h \cdot g$ ดังนั้น N ไม่มีคุณสมบัติการกระจายทางซ้าย

(iv) ให้ $f \in N$ ซึ่ง $f(0) \neq 0$

พิจารณา $(f \cdot \theta)(x) = f(\theta(x)) = f(0) \neq 0$ ดังนั้น N ไม่เป็นซีโร-ซิมเมตริกซ์เนียร์-ริง

□

เลมมา 3.2 ให้ N เป็นเนียร์-ริง และสำหรับทุก ๆ $a, b \in N$

$$(1) \quad 0a = 0$$

$$(2) \quad (-a)b = -ab$$

พิสูจน์ (1) ให้ $a \in N$

$$\text{พิจารณา } 0 + 0a = 0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

โดยคุณสมบัติการตัดออกบน $(N, +)$ จะได้ว่า $0a = 0$

(2) ให้ $a, b \in N$

$$\text{พิจารณา } (-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$$

$$\text{และ } ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0$$

เนื่องจาก ab มีอินเวอร์สการบวกเพียงตัวเดียวจะได้ว่า

$$(-a)b = -ab$$

□

บทนิยาม 3.3 ให้ N เป็นเนียร์-ริง จะเรียกสับเซตไม่ว่าง M ของ N ว่าเป็น สับเนียร์-ริง (subnear-ring) ของ N ก็ต่อเมื่อ M เป็นเนียร์-ริง ภายใต้โอเปอเรชันเดียวกันกับ N

□

บทนิยาม 3.4 ให้ I เป็นสับเซตไม่ว่างของเนียร์-ริง N จะเรียก I ว่าเป็น ไอดีล (ideal) ของ N ก็ต่อเมื่อ

(i) $(I, +)$ เป็นนอร์มัลสับกรุป

(ii) $IN \subseteq I$

และ (iii) สำหรับทุก ๆ $n, n' \in N, i \in I$

$$n(n' + i) - nn' \in I$$

□

ตัวอย่าง 3.2 ให้ S_3 เป็นซิมเมตริกซ์กรุป นั่นคือ

$$S_3 = \{ e, (12), (13), (23), (123), (132) \} \text{ เมื่อ } e \text{ เป็นเอกลักษณ์บน } S_3$$

นิยามการบวก (+) ใน S_3 คือการคอมโพสิท การคูณ (·) นิยามโดยสำหรับทุก ๆ

$a, b \in S_3, a \cdot b = a$ จะได้ว่า $(S_3, +, \cdot)$ เป็นเนียร์-ริง และ $I = \{ e, (123), (132) \}$

เป็นไอดีลของ S_3

□

เลมมา 3.5 ให้ N เป็นเนียร์-ริง ถ้า I เป็นไอดีลของ N และสำหรับทุก ๆ $n, n' \in N, i \in I$ แล้ว $n(i + n') - nn' \in I$

พิสูจน์ ให้ $n, n' \in N, i \in I$

เพราะว่า $n(i + n') - nn' = n(n' + (-n' + i + n')) - nn'$

เนื่องจาก I เป็นนอร์มัลสับกรุปจะได้ว่า $-n' + i + n' \in I$

ดังนั้น $n(n' + (-n' + i + n')) - nn' \in I$

นั่นคือ $n(i + n') - nn' \in I$

□

เลมมา 3.6 ให้ N เป็นเนียร์-ริง ถ้า $I \subseteq N$ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติ

1) $(I, +)$ เป็นนอร์มัลสับกรุป

2) $IN \subseteq I$

และ 3) สำหรับทุก ๆ $n, n' \in N, i \in I$

$$n(i + n') - nn' \in I$$

แล้ว I เป็นไอดีลของ N

พิสูจน์ ให้ $n, n' \in N, i \in I$

เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $n(n' + i) - nn' \in I$

เพราะว่า $n(n' + i) - nn' = n((n' + i - n') + n') - nn'$

เนื่องจาก I เป็นนอร์มัลสับกรุปจะได้ว่า $n' + i - n' \in I$

ดังนั้น $n((n' + i - n') + n') - nn' \in I$ นั่นคือ $n(n' + i) - nn' \in I$

□

ในบทที่ 2 เมื่อ S เป็นริงจะได้ว่า $S \times S$ เป็นริง และในทำนองเดียวกัน
เมื่อให้ $(N, +, \cdot)$ เป็นเนียร์-ริง จะได้ว่า $N \times N$ เป็นเนียร์-ริง ภายใต้โอเปอเรชัน
ดังต่อไปนี้ สำหรับทุก ๆ $(a, b), (c, d) \in N \times N$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

ทั้งนี้เพราะ

- (1) $(N \times N, +)$ เป็นกรุป
- (2) $(N \times N, \cdot)$ เป็นเซมิกรุป
- (3) สำหรับทุก ๆ $(a,b), (c,d), (e,f) \in N \times N$
 $((a,b) + (c,d)) \cdot (e,f) = (a,b) \cdot (e,f) + (c,d) \cdot (e,f)$

ต่อไปจะเขียน $(a,b) \cdot (c,d)$ แทนด้วย $(a,b)(c,d)$ สำหรับทุก ๆ

$(a,b), (c,d) \in N \times N$

ในบทที่ 2 เมื่อ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูล บนริง S เราได้ เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการที่ ρ เป็นสับริง และไอเดิลซึ่งในทำนองเดียวกัน ρ ที่ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเนียร์-ริง N จะมีเงื่อนไขใดบ้างที่จำเป็นและเพียงพอในการที่ ρ เป็นสับเนียร์-ริง ของ $N \times N$ หรือ ρ เป็นไอเดิลของ $N \times N$ ซึ่งทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการศึกษาคุณสมบัติของความสัมพันธ์สมมูลบนเนียร์-ริง N ดังกล่าว

เลมมา 3.7 ให้ N เป็นเนียร์-ริง และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน N ถ้า ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ แล้ว $[0]_\rho$ เป็นไอเดิลของ N

พิสูจน์ (1) ให้ $a, b \in [0]_\rho$ จะได้ว่า $(a,0), (b,0) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ จะได้ $(a,0) - (b,0) = (a-b,0) \in \rho$ ดังนั้น $a-b \in [0]_\rho$ นั่นคือ $[0]_\rho$ เป็นสับกรุปของ $(N, +)$ ให้ $n \in N, a \in [0]_\rho$ จะได้ว่า $(a,0), (n,n) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n,n) + (a,0) - (n,n) &= (n+a-n, n+0-n) \in \rho \\ &= (n+a-n, 0) \in \rho\end{aligned}$$

นั่นคือ $[0]_\rho$ เป็นนอร์มัลสับกรุปของ $(N, +)$

(2) ให้ $a \in [0]_\rho, n \in N$ จะได้ $(a,0), (n,n) \in \rho$

$$(a,0)(n,n) = (an, 0n) \text{ โดยเลมมา 3.2 จะได้ว่า}$$

$$(an, 0n) = (an, 0) \in \rho \text{ ทั้งนี้เพราะ } \rho \text{ เป็นสับเนียร์-ริงของ } N \times N$$

ดังนั้น $an \in [0]_\rho$ นั่นคือ $[0]_\rho N \subseteq [0]_\rho$

$$(3) \text{ ให้ } n, n' \in N, a \in [0]_p$$

เนื่องจาก $(a, 0), (n, n), (n', n') \in \rho$ พิจารณา

$$\begin{aligned} (n, n)((n', n') + (a, 0)) - (n, n)(n', n') &= (n, n)(n' + a, n') - (nn', nn') \\ &= (n(n' + a), nn') - (nn', nn') \\ &= (n(n' + a) - nn', 0) \end{aligned}$$

เนื่องจาก ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ จะได้ว่า

$$(n(n' + a) - nn', 0) \in \rho \quad \text{ดังนั้น } n(n' + a) - nn' \in [0]_p \quad \text{จาก (1), (2) และ (3)}$$

ได้ว่า $[0]_p$ เป็นไอดีลของ N

□

ต่อไปจะศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ความสัมพันธ์สมมูลบนเนียร์-ริง N จะเป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ ซึ่งคาดว่าเงื่อนไขเหล่านั้นน่าจะเป็นเหมือนการเป็นสับริงในบทที่ 2

บทนิยาม 3.8 ให้ N เป็นเนียร์-ริง และ I เป็นไอดีลของ N กำหนด

$$\rho_I^* = \{(a, b) \in N \times N \mid a + I = b + I\} \quad \text{และกำหนดเซต}$$

$$\mathcal{P}_N = \{\rho_I^* \mid I \text{ เป็นไอดีลของ } N\}$$

เลมมา 3.9 ให้ N เป็นเนียร์-ริง จะได้ว่า ρ_I^* เป็นความสัมพันธ์สมมูล

$$\text{และ } [0]_{\rho_I^*} = I$$

พิสูจน์ ให้ I เป็นไอดีลของเนียร์-ริง N

$$(1) \text{ ให้ } a \in N \text{ เรามี } a + I = a + I \text{ ดังนั้น } (a, a) \in \rho_I^* \text{ ให้ } (a, b) \in \rho_I^*$$

$$\text{ดังนั้น } a + I = b + I \text{ นั่นคือ } b + I = a + I \text{ นั่นคือ } (b, a) \in \rho_I^*$$

$$\text{ให้ } (a, b), (b, c) \in \rho_I^* \text{ จะได้ว่า } a + I = b + I \text{ และ } b + I = c + I \text{ ดังนั้น } a + I = c + I$$



และ $-b+c \in I$ เนื่องจาก I เป็นไอดีลของ N จะได้ว่า

$$(-a+b) + (-b+c) = -a+c \in I \text{ นั่นคือ } (a,c) \in \rho_I^*$$

ดังนั้น ρ_I^* เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน N

$$(2) \quad a \in [0]_{\rho_I^*} \text{ ก็ต่อเมื่อ } (a,0) \in \rho_I^* \text{ ก็ต่อเมื่อ } a+I=0+I \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$$a \in I \text{ ดังนั้น } [0]_{\rho_I^*} = I$$

□

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ N เป็นเนียร์-ริง และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน N ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(ก) ρ ปิดภายใต้การบวกและการคูณใน $N \times N$

(ข) ρ เป็นสับเนียร์-ริง ของ $N \times N$

(ค) $\rho \in \mathcal{P}_N$

พิสูจน์ (ก) $\Rightarrow$ (ข) : ให้ ρ ปิดภายใต้การบวกและการคูณ โดยทฤษฎีบท 1.9 จะได้ว่า ρ เป็นสับกรุปของ $N \times N$ ดังนั้น ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$

(ข) $\Rightarrow$ (ค) : ให้ ρ เป็นสับเนียร์-ริง ของ $N \times N$ จะแสดงว่า $\rho \in \mathcal{P}_N$

จากเลมมา 3.7 $[0]_\rho$ เป็นไอดีลของ N นั่นคือถ้าแสดงว่า สำหรับทุก ๆ $(a,b) \in \rho$ ก็ต่อเมื่อ $a + [0]_\rho = b + [0]_\rho$ จะได้ว่า $\rho \in \mathcal{P}_N$ ให้ $(a,b) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ เราได้ว่า $(-a,-a) + (a,b) = (0,-a+b) \in \rho$ โดยคุณสมบัติการสมมาตรใน ρ จะได้ว่า $(-a+b,0) \in \rho$ นั่นคือ $a + [0]_\rho = b + [0]_\rho$

ให้ $x,y \in N$ ซึ่ง $x + [0]_\rho = y + [0]_\rho$ ดังนั้น $-x+y \in [0]_\rho$ จะได้ว่า

$(-x+y,0) \in \rho$ เนื่องจาก $(x,x) \in \rho$ และ ρ เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ เราได้ว่า

$(x,x) + (-x+y,0) = (y,x) \in \rho$ โดยสมบัติการสมมาตรใน ρ จะได้ว่า $(x,y) \in \rho$

ดังนั้น $\rho \in \mathcal{P}_N$

(ก) $\Rightarrow$ (ก) : สมมุติว่า $p \in \mathcal{P}_N$ นั่นคือจะมีไอดีล I ของ N

ซึ่ง $p = p_I^*$ จะแสดงว่า p_I^* ปิดภายใต้การบวกและการคูณใน $N \times N$

ให้ $(a,b), (c,d) \in p_I^*$ โดยเลมมา 3.9 $I = [0]_{p_I^*}$ จะได้ว่า $a + [0]_{p_I^*} = b + [0]_{p_I^*}$

และ $c + [0]_{p_I^*} = d + [0]_{p_I^*}$ ดังนั้น

$$a = b + x_1 \quad \text{สำหรับบาง } x_1 \in [0]_{p_I^*}$$

$$c = d + x_2 \quad \text{สำหรับบาง } x_2 \in [0]_{p_I^*}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } a + c &= (b + x_1) + (d + x_2) \\ &= b + d + x_1 + x_2 \quad \text{สำหรับบาง } x_3 \in [0]_{p_I^*} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a + c \in b + d + [0]_{p_I^*}$ นั่นคือ $a + c + [0]_{p_I^*} = b + d + [0]_{p_I^*}$

ดังนั้น $(a + c, b + d) \in p_I^*$ นั่นคือ p_I^* ปิดภายใต้การบวก ใน $N \times N$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } ac &= (b + x_1)(d + x_2) \\ &= b(d + x_2) + x_1(d + x_2) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $[0]_{p_I^*}$ เป็นไอดีลของ N จะได้ว่า $x_1(d + x_2) \in [0]_{p_I^*}$

$$\text{ดังนั้น } ac = b(d + x_2) + x_3 \quad \text{สำหรับบาง } x_3 = x_1(d + x_2) \in [0]_{p_I^*}$$

$$\text{พิจารณา } b(d + x_2) + x_3 - bd = b(d + x_2) - bd + x_4 \quad \text{สำหรับบาง } x_4 \in [0]_{p_I^*}$$

เนื่องจาก $[0]_{p_I^*}$ เป็นไอดีลของ N จะได้ว่า $b(d + x_2) - bd \in [0]_{p_I^*}$

$$\text{ดังนั้น } b(d + x_2) - bd + x_4 \in [0]_{p_I^*}$$

นั่นคือ $b(d + x_2) + x_3 - bd \in [0]_{\rho_I^*}$ จะได้ว่า $b(d + x_2) + x_3 + [0]_{\rho_I^*} = bd + [0]_{\rho_I^*}$

ดังนั้น $ac + [0]_{\rho_I^*} = bd + [0]_{\rho_I^*}$

เพราะฉะนั้น $(ac, bd) \in \rho_I^*$

นั่นคือ ρ ปิดภายใต้การคูณใน $N \times N$

□

จะพบว่าความสัมพันธ์สมมูล ρ บนเนียร์-ริง N ที่เป็นไอเดิลของ $N \times N$ ถ้า $1 \in N$ ($\forall x \in N, 1x = x1 = x$) และ ρ เป็นไอเดิลของ $N \times N$ ก็ต่อเมื่อ $\rho = N \times N$ จากบทที่ 2 เราได้ว่ามีความสัมพันธ์สมมูล ρ บนริง S ที่ ρ เป็นไอเดิลของ $S \times S$ ไม่จำเป็นที่ $\rho = S \times S$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท 2.12 เนื่องจากทุก ๆ ริง เป็นเนียร์-ริง จะต้องมีความสัมพันธ์สมมูล ρ บนเนียร์-ริง N ที่เป็นไอเดิลของ $N \times N$ และไม่จำเป็นที่ $\rho = N \times N$ ต่อไปจะศึกษาคุณสมบัติของ ρ ที่เป็นสับเนียร์-ริงแท้ที่เป็นไอเดิลของ $N \times N$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.11 ให้ N เป็นเนียร์-ริง และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน N ที่เป็นสับเนียร์-ริง ของ $N \times N$ จะได้ว่า

(ก) ถ้า $N^2 \subseteq [0]_{\rho}$ และ $N/[0]_{\rho}$ เป็นอะบีเลียนกรุปแล้ว ρ เป็นไอเดิลของ $N \times N$

(ข) ถ้า $N^2 \subseteq [0]_{\rho}$ และ $[N, N]$ เป็นสับกรุปของ $[0]_{\rho}$ แล้ว ρ เป็นไอเดิลของ $N \times N$

พิสูจน์ (ก) ให้ $N^2 \subseteq [0]_{\rho}$ และ $N/[0]_{\rho}$ เป็นอะบีเลียนกรุป

(1) โดยทฤษฎีบท 1.14 จะได้ว่า ρ เป็นนอร์มัลสับกรุป

(2) ให้ $(a,b) \in \rho$, $(m,n) \in N \times N$

พิจารณา $(a,b)(m,n) = (am,bn)$

เนื่องจาก $am, bn \in N^2 \subseteq [0]_\rho$ และ $\rho \in \mathcal{P}_N$ เราได้ว่า

$am + [0]_\rho = bn + [0]_\rho$ โดยทฤษฎีบท 3.10 ได้ว่า $(am,bn) \in \rho$

นั่นคือ $\rho(N \times N) \subseteq \rho$

(3) ให้ $(m,n), (m',n') \in N \times N$ และ $(a,b) \in \rho$ พิจารณา

$$\begin{aligned} (m,n)((m',n') + (a,b)) - (m,n)(m',n') &= (m,n)(m' + a, n' + b) - (mm', nn') \\ &= (m(m' + a), n(n' + b)) - (mm', nn') \\ &= (m(m' + a) - mm', n(n' + b) - nn') \end{aligned}$$

เนื่องจาก $m(m' + a), mm', n(n' + b), nn' \in N^2 \subseteq [0]_\rho$

และ $\rho \in \mathcal{P}_N$ จะได้ว่า $m(m' + a) - mm' + [0]_\rho = n(n' + b) - nn' + [0]_\rho$

จากทฤษฎีบท 3.10 เราได้ว่า $(m(m' + a) - mm', n(n' + b) - nn') \in \rho$

นั่นคือ $(m,n)((m',n') + (a,b)) - (m,n)(m',n') \in \rho$

จาก (1), (2) และ (3) ρ เป็นไอดีลของ $N \times N$

(ข) ให้ $N^2 \subseteq [0]_\rho$ และ $[N,N]$ เป็นสับกรุปของ $[0]_\rho$

โดยทฤษฎีบท 1.14 จะได้ว่า $N/[0]_\rho$ เป็นอะบีเลียนกรุป ดังนั้นจาก (ก)

เราได้ว่า ρ เป็นไอดีลของ $N \times N$

□

บทกลับของทฤษฎีบท 3.11 ไม่จริงกล่าวคือ ถ้า ρ เป็นไอดีลของเนียร์-ริง $N \times N$ แล้วไม่จำเป็นที่ $N^2 \subseteq [0]_\rho$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3 ให้ $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ เมื่อ e เป็นเอกลักษณ์บน S_3 เป็นซิมเมตริกซ์กรุป นิยามการบวก (+) ใน S_3 คือการคอมโพสิทและการคูณ (·) ใน S_3 นิยามดังนี้ สำหรับทุก ๆ $a, b \in S_3$, $a \cdot b = a$ เห็นได้โดยง่ายว่า

$(S_3, +, \cdot)$ เป็นเนียร์-ริง และยังได้ว่า $I = \{e, (123), (132)\}$ เป็นไอดีลของ S_3 ดังนั้นจะได้ว่า $\rho_I^* = \{(e,e), ((12),(12)), ((13),(13)), ((23),(23)), ((123),(123)), ((132),(132)), ((123),e), (e,(123)), ((132),e), (e,(132)), ((123),(132)), ((132),(123)), ((12),(13)), ((13),(12)), ((12),(23)), ((23),(12)), ((13),(23)), ((23),(13))\}$

จากนี้ เราได้ว่า ρ_I^* เป็นไอดีลของ $S_3 \times S_3$ ทั้งนี้เพราะ

(1) เนื่องจาก $S_{3/[e]\rho_I^*}$ มีสมาชิก 2 ตัว คือ $[e]\rho_I^*$ และ $[(12)]\rho_I^*$

ดังนั้น $S_{3/[e]\rho_I^*}$ เป็นอะบีเลียนกรุป โดยทฤษฎีบท 1.14 เราได้ว่า

ρ เป็นนอร์มัลสับกรุปของ $S_3 \times S_3$

(2) ให้ $(a,b) \in \rho_I^*, (x,y) \in S_3 \times S_3$

$$(a,b)(x,y) = (ax, by) = (a,b) \in \rho_I^*$$

$$\text{นั่นคือ } \rho_I^*(S_3 \times S_3) \subseteq \rho_I^*$$

(3) ให้ $(a,b) \in \rho_I^*, (m,n), (m',n') \in S_3 \times S_3$

$$\begin{aligned} (m,n)((m',n') + (a,b)) - (m,n)(m',n') &= (m,n) - (m,n) \\ &= (e,e) \in \rho_I^* \end{aligned}$$

จาก (1), (2) และ (3) เราได้ว่า ρ_I^* เป็นไอดีลของ $S_3 \times S_3$

แต่ $S^2 \not\subseteq [e]\rho_I^*$ เช่น $(12)(13) = (12) \notin [e]\rho_I^*$

ข้อสังเกต ให้ N เป็นเนียร์-ริง และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลที่เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ ถ้า ρ เป็นนอร์มัลสับกรุป และสำหรับทุก ๆ $a, b \in N$, $ab = a$ แล้ว ρ เป็นไอดีลของ $N \times N$

แต่จากการศึกษาเพิ่มเติมพบว่าในกรณีที่ N เป็นซีโร-ซิมเมตริกซ์เนียร์-ริง จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.12 ให้ N เป็นซีโร-ซิมเมตริกซ์เนียร์-ริง และ p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน N ที่เป็นสับเนียร์-ริงของ $N \times N$ ถ้า p เป็นไอเดียลของ $N \times N$ แล้ว $N^2 \subseteq [0]_p$, $N/[0]_p$ เป็นอะบีเลียนกรุป และ $[N, N]$ เป็นสับกรุปของ $[0]_p$

พิสูจน์ ให้ $a, b \in N$ จะได้ว่า $(a, a) \in p$ และ $(b, 0) \in N \times N$

เนื่องจาก p เป็นไอเดียลของ $N \times N$ จะได้ว่า $(a, a)(b, 0) = (ab, a0) \in p$ แต่ N เป็นซีโร-ซิมเมตริกซ์เนียร์-ริง จึงได้ว่า $(ab, a0) = (ab, 0) \in p$

นั่นคือ $ab \in [0]_p$ ดังนั้น $N^2 \subseteq [0]_p$

เนื่องจาก p เป็นนอร์มัลสับกรุป โดยทฤษฎีบท 1.14 จะได้ว่า $N/[0]_p$ เป็นอะบีเลียนกรุปและ $[N, N]$ เป็นสับกรุปของ $[0]_p$

□

ในการศึกษาความสัมพันธ์สมมูลบนริง และบนเนียร์-ริง เราพบว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์สมมูลบนริงเกือบทั้งหมดดังที่ศึกษาในบทที่ 2 จะเป็นจริงด้วยบนเนียร์-ริงในบทที่ 3 แต่มีความสัมพันธ์สมมูลบนริงที่มีคุณสมบัติบางอย่างจริงบนริง แต่ไม่จริงบนเนียร์-ริง กล่าวคือจากการศึกษาทฤษฎีบท 2.15 จะพบว่า ถ้า p เป็นคอมพลีทลีเซมิไพร์มไอเดียลบนริง S แล้ว $p = S \times S$ แต่ ถ้า p เป็นคอมพลีทลีเซมิไพร์มไอเดียลบนเนียร์-ริง N แล้ว p ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $N \times N$ ดังตัวอย่าง 3.3 แต่จากการศึกษาเพิ่มเติมพบว่า ถ้าเนียร์-ริง N มีคุณสมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ และ p เป็นความสัมพันธ์สมมูลที่เป็นคอมพลีทลีเซมิไพร์มไอเดียลของ $N \times N$ แล้ว $p = N \times N$