

บทที่ 2

ความสัมพันธ์สมมูลบนริง

ให้ $(S, +, \cdot)$ เป็นริงจะนิยามการบวกและคูณ บน $S \times S$ ดังนี้

สำหรับทุก ๆ $(a,b), (c,d) \in S \times S$

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

เห็นได้โดยง่ายว่า $(S \times S, +, \cdot)$ เป็นริง ทั้งนี้เพราะ

$(S \times S, +)$ เป็นอะบีเลียนกรุป

$(S \times S, \cdot)$ เป็นเซมิกรุป

และสำหรับทุก ๆ $(a,b), (c,d), (e,f) \in S \times S$

$$(a,b) \cdot ((c,d) + (e,f)) = (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f)$$

$$((c,d) + (e,f)) \cdot (a,b) = (c,d) \cdot (a,b) + (e,f) \cdot (a,b)$$

ข้อตกลง ให้ $(S, +, \cdot)$ เป็นริง สำหรับทุก ๆ $a,b,c,d \in S$ จะเขียน $a \cdot b$ แทนด้วย ab และ $(a,b) \cdot (c,d)$ แทนด้วย $(a,b)(c,d)$

□

จากที่ $(S \times S, +, \cdot)$ เป็นริง เราได้ว่า

$(0,0)$ เป็นเอกลักษณ์การบวกใน $S \times S$ เมื่อ 0 เป็นเอกลักษณ์การบวกใน S

$$-(a,b) = (-a, -b)$$

$$(a,b) - (c,d) = (a-c, b-d)$$

ให้ S เป็นริง p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S จะเรียกเซตของสมาชิกใน S ที่สัมพันธ์กับ s ใน S ว่า ชั้นสมมูลของ s (equivalence class of s) ซึ่งเขียนแทนด้วย $[s]_p$

$$\text{นั่นคือ } [s]_p = \{s' \in S \mid (s', s) \in p\}$$

ในบทนี้จะเป็นการศึกษาว่า ถ้า ρ ซึ่งเป็นสับเซตของ $S \times S$ มีโครงสร้างทางพีชคณิตบางอย่างเช่น เป็นสับริงของ $S \times S$ แล้วจะมีอะไรเกิดขึ้นใน S อันเนื่องมาจากที่ ρ มีโครงสร้างทางพีชคณิตนั้น ๆ ให้สังเกตว่า เมื่อ $\rho = S \times S$ ซึ่งในกรณีนี้ ρ เป็นสับริงของ $S \times S$ แล้วชั้นสมมูลของ ρ ใน S มีกลุ่มเดียวคือ S เราต้องการจะศึกษาในกรณีที่ ρ เป็นสับเซตแท้ของ $S \times S$, ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงการมีจริง (existence) ของกรณีที่ ρ เป็นสับเซตแท้ของ $S \times S$ และ ρ มีโครงสร้างทางพีชคณิตด้วย

ตัวอย่าง 2.1 ให้ $Z_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ นิยามการบวก (+) และการคูณ ($\cdot$) ใน Z_3 โดยสำหรับทุก ๆ $\overline{a}, \overline{b} \in Z_3$, $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ และ $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$ เราเห็นได้ว่า $(Z_3, +, \cdot)$ เป็นริง ให้ $\rho = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{2})\}$ ซึ่งเป็นความสัมพันธ์สมมูลบน Z_3 และเห็นได้ว่า ρ เป็นสับริงของ $Z_3 \times Z_3$ แต่ $\rho \neq Z_3 \times Z_3$

□

ความจริงสองประการต่อจากนี้จะใช้ในการอ้างอิงในโอกาสต่อไป

เลมมา 2.1 ให้ S เป็นริง และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S จะได้ว่า ρ เป็นสับริงของ $S \times S$ ก็ต่อเมื่อ ρ ปิดภายใต้การบวกและการคูณ ใน $S \times S$
 พิสูจน์ ($\Rightarrow$) : ให้ ρ เป็นสับริง ของ $S \times S$ ดังนั้น ρ ปิดภายใต้การบวกและการคูณ ใน $S \times S$

($\Leftarrow$) : ให้ ρ ปิดภายใต้การบวกและการคูณใน $S \times S$ เนื่องจาก $(S, +)$ เป็นกรุป และโดยทฤษฎีบท 1.9 เราได้ว่า ρ เป็นสับกรุปของ $S \times S$ และจากสมมูลฐาน ดังนั้น ρ เป็นสับริงของ $S \times S$

□

เลมมา 2.2 ให้ S เป็นริง และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S ถ้า ρ เป็นสับริงของ $S \times S$ แล้ว $[0]_\rho$ เป็นไอเดิลของ S

พิสูจน์ ให้ $a, b \in [0]_p$ ดังนั้น $(a, 0), (b, 0) \in p$

เนื่องจาก p เป็นสับริงของ $S \times S$ จะได้ว่า $(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0) \in p$

ดังนั้น $a - b \in [0]_p$ นั่นคือ $[0]_p$ เป็นสับกรุปของ $(S, +)$

ต่อไปจะแสดงว่า $S[0]_p \subseteq [0]_p$ และ $[0]_p S \subseteq [0]_p$

ให้ $s \in S, a \in [0]_p$ ดังนั้น $(s, s), (a, 0) \in p$

เนื่องจาก p เป็นสับริงของ $S \times S$ จะได้ว่า $(s, s)(a, 0) = (sa, 0) \in p$

ดังนั้น $sa \in [0]_p$ นั่นคือ $S[0]_p \subseteq [0]_p$

ในทำนองเดียวกัน เราได้ว่า $[0]_p S \subseteq [0]_p$

ดังนั้น $[0]_p$ เป็นไอดีลของ $S \times S$

□

บทนิยาม 2.3 ให้ S เป็นริง และ I เป็นไอดีลของ S

กำหนด $p_I^* = \{(a, b) \in S \times S \mid a + I = b + I\}$

□

ตัวอย่าง 2.2 ให้ $Z_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ การบวก (+) และการคูณ (·) นิยามดังนี้

สำหรับ $\overline{a}, \overline{b} \in Z_4$, $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ และ $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$ จะได้ว่า $(Z_4, +, \cdot)$

เป็นริง และ $I = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ เป็นไอดีลของ Z_4 จะได้โคเซตทั้งหมดของ I

ภายใต้ Z_4 คือ $I = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ และ $\overline{1} + I = \{\overline{1}, \overline{3}\}$

ดังนั้น $p_I^* = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{2}), (\overline{3}, \overline{3}), (\overline{0}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{0}),$

$(\overline{1}, \overline{3}), (\overline{3}, \overline{1})\}$

□

เห็นได้โดยง่ายว่า p_I^* ในตัวอย่าง 2.2 ข้างบนเป็นความสัมพันธ์สมมูลบน Z_4

และได้ว่า $[0]_{p_I^*} = \{\overline{0}, \overline{2}\} = I$ ซึ่งทำให้ได้เริ่มมาต่อไปนี้

เลมมา 2.4 ให้ S เป็นริง และ I เป็นไอดีลของ S จะได้ว่า ρ_I^* เป็น

ความสัมพันธ์สมมูล และ $[0]_{\rho_I^*} = I$

พิสูจน์ ให้ I เป็นไอดีลของริง S

(1) จะแสดงว่า ρ_I^* เป็นความสัมพันธ์สมมูล

$$(1.1) \quad \text{ให้ } a \in S \text{ เนื่องจาก } a+I=a+I \text{ ดังนั้น } (a,a) \in \rho_I^*$$

$$(1.2) \quad \text{ให้ } (a,b) \in \rho_I^* \text{ จะได้ว่า } a+I=b+I \text{ นั่นคือ } b+I=a+I$$

$$\text{ดังนั้น } (b,a) \in \rho_I^*$$

$$(1.3) \quad \text{ให้ } (a,b), (b,c) \in \rho_I^* \text{ ดังนั้น } a+I=b+I \text{ และ } b+I=c+I$$

$$\text{จะได้ } -a+b \in I \text{ และ } -b+c \in I$$

$$\text{เนื่องจาก } I \text{ เป็นไอดีลจะได้ว่า } (-a+b) + (-b+c) = -a+c \in I$$

$$\text{นั่นคือ } (a,c) \in \rho_I^*$$

จาก (1.1) , (1.2) และ (1.3) เราได้ว่า ρ_I^* เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S

(2) จะแสดงว่า $[0]_{\rho_I^*} = I$

$$a \in [0]_{\rho_I^*} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad (a,0) \in \rho_I^*$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a+I=0+I$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a \in I$$

$$\text{ดังนั้น } [0]_{\rho_I^*} = I$$

□

จากเลมมา 2.4 ทำให้เราได้ว่า $[0]_{\rho_I^*}$ เป็นไอดีลของ S เหมือนกับ $[0]_{\rho}$

ที่ ρ เป็นสับริงของ $S \times S$ ซึ่งความสัมพันธ์ ρ_I^* กับความสัมพันธ์สมมูล ρ ที่

เป็นสับริงของ $S \times S$ เป็นดังเลมมาต่อไปนี้

ข้อตกลง ให้ S เป็นริงกำหนดให้ $\mathcal{P}_S = \{p_I^* \mid I \text{ เป็นไอดีลของ } S\}$

□

เลมมา 2.5 ให้ S เป็นริงจะได้ว่า p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S และเป็นสับริงของ $S \times S$ ก็ต่อเมื่อ $p \in \mathcal{P}_S$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$: สมมติว่า p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S ที่เป็นสับริงของ $S \times S$ จะแสดงว่า $p \in \mathcal{P}_S$ จากเลมมา 2.2 ได้ว่า $[0]_p$ เป็นไอดีลของ S

(นั่นคือถ้าแสดงได้ว่า $(a,b) \in p$ ก็ต่อเมื่อ $a + [0]_p = b + [0]_p$ จะได้ว่า $p \in \mathcal{P}_S$)

ให้ $(a,b) \in p$ เนื่องจาก $(-a,-a) \in p$ และ p เป็นสับริงของ $S \times S$

เราได้ว่า $(-a,-a) + (a,b) = (0,-a+b) \in p$ โดยสมบัติการสมมาตรใน p ได้ว่า

$(-a+b,0) \in p$ นั่นคือ $a + [0]_p = b + [0]_p$

ให้ $x,y \in S$ ซึ่ง $x + [0]_p = y + [0]_p$ ดังนั้น $-x+y \in [0]_p$ นั่นคือ

$(-x+y,0) \in p$ เนื่องจาก $(x,x) \in p$ และ p เป็นสับริงของ $S \times S$ เราได้ว่า

$(x,x) + (-x+y,0) = (y,x) \in p$ โดยสมบัติการสมมาตรใน p ได้ว่า $(x,y) \in p$

ดังนั้น $p \in \mathcal{P}_S$

$(\Leftarrow)$: สมมติว่า $p \in \mathcal{P}_S$ นั่นคือจะมีไอดีล $I \subseteq S$ ซึ่ง $p = p_I^*$ โดยเลมมา 2.4

p_I^* เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S ต่อไปจะแสดงว่า p เป็นสับริงของ $S \times S$ นั่นคือ

จะแสดงว่า p_I^* เป็นสับริงของ $S \times S$ ให้ $(a,b), (c,d) \in p_I^*$ โดยเลมมา 2.4

จะได้ว่า $I = [0]_{p_I^*}$ ดังนั้น $a + [0]_{p_I^*} = b + [0]_{p_I^*}$ และ $c + [0]_{p_I^*} = d + [0]_{p_I^*}$

นั่นคือ $a = b + x_1$ สำหรับบาง $x_1 \in [0]_{p_I^*}$

$c = d + x_2$ สำหรับบาง $x_2 \in [0]_{p_I^*}$

พิจารณา $a + c = (b + x_1) + (d + x_2)$

$= b + d + x_1 + x_2$

$= b + d + (x_1 + x_2)$

เนื่องจาก $[0]_{\rho_I^*}$ เป็นไอเดี่ยลของ S เราได้ว่า $x_1 + x_2 \in [0]_{\rho_I^*}$ ดังนั้น

$$(a + c) + [0]_{\rho_I^*} = (b + d) + [0]_{\rho_I^*} \text{ นั่นคือ } (a + c, b + d) \in \rho_I^*$$

ดังนั้น ρ_I^* ปิดภายใต้การบวกใน $S \times S$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } ac &= (b + x_1)(d + x_2) \\ &= bd + bx_2 + x_1d + x_1x_2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $[0]_{\rho_I^*}$ เป็นไอเดี่ยลของ S จะได้ว่า $bx_2 + x_1d + x_1x_2 \in [0]_{\rho_I^*}$

$$\text{ดังนั้น } ac = bd + x_3 \text{ สำหรับบาง } x_3 = bx_2 + x_1d + x_1x_2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } ac + [0]_{\rho_I^*} = bd + [0]_{\rho_I^*}$$

นั่นคือ $(ac, bd) \in \rho_I^*$ ดังนั้น ρ_I^* ปิดภายใต้การคูณใน $S \times S$

โดยเลมมา 2.1 เราได้ว่า ρ_I^* เป็นสับริงของ $S \times S$ นั่นคือ ρ เป็นสับริง

ของ $S \times S$

□

บทนิยาม 2.6 ให้ S เป็นริงจะเรียกอะบีเลียนกรุป $(G, +)$ ว่าเป็น S - โมดูลทางซ้าย

(S - left module) ก็ต่อเมื่อมีโอเปอเรชัน $*$: $S \times G \rightarrow G$ กำหนดโดยสำหรับทุก ๆ

$$s \in S, g \in G$$

$$*(s, g) = s * g \text{ และสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้}$$

สำหรับทุก ๆ $r, s \in S, g, h \in G$

$$1. \quad s * (g + h) = s * g + s * h$$

$$2. \quad (r + s) * g = r * g + s * g$$

$$3. \quad (rs) * g = r * (s * g)$$

อะบีเลียนกรุป $(G, +)$ เป็น S - โมดูลทางขวา (S - right module) ก็ต่อเมื่อ
 มีโอเปอเรชัน $\circ : G \times S \rightarrow G$ กำหนดโดยสำหรับทุก ๆ $g \in G, s \in S$
 $\circ(g,s) = g \circ s$ และสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้
 สำหรับทุก $g, h \in G, r, s \in S$

$$1. (g + h) \circ s = g \circ s + h \circ s$$

$$2. g \circ (r + s) = g \circ r + g \circ s$$

$$3. g \circ (rs) = (g \circ r) \circ s$$

บทนิยาม 2.7 ให้ S เป็นริงและ $(G, +)$ เป็นอะบีเลียนกรุปจะเรียก $(G, +)$ ว่าเป็น
S - โมดูล (S - module) ก็ต่อเมื่อ G เป็นทั้งโมดูลทางซ้ายและโมดูลทางขวา

บทนิยาม 2.8 ให้ S เป็นริงและ G เป็น S - โมดูลจะเรียกสับกรุป M ของ G ว่าเป็น
สับโมดูล (submodule) ก็ต่อเมื่อ M เป็น S - โมดูลภายใต้โอเปอเรชันเดียวกัน
 กับ G

จากบทนิยาม 2.7 เห็นได้โดยง่ายว่า $S \times S$ เป็น S - โมดูลภายใต้การคูณ
 แบบสเกลาร์ นั่นคือ $s(a,b) = (sa, sb)$ สำหรับทุก ๆ $s \in S, (a,b) \in S \times S$

เลมมา 2.9 ให้ S เป็นริงและ p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $S \times S$ จะได้ว่า p เป็น
 สับโมดูลของ $S \times S$ ภายใต้การคูณแบบสเกลาร์ ก็ต่อเมื่อ p เป็นสับริงของ $S \times S$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$: สมมติว่า p เป็นสับโมดูลของ $S \times S$ ภายใต้การคูณแบบ
 สเกลาร์ ดังนั้น p เป็นสับกรุปของ $S \times S$ โดยทฤษฎีบท 1.9 เราได้ว่า p ปิดภายใต้
 การบวก ต่อไปจะแสดงว่า p ปิดภายใต้การคูณ ให้ $(a,b), (c,d) \in p$ เนื่องจาก p
 เป็นสับโมดูลของ $S \times S$ จะได้ว่า

$$(a,b)c = (ac, bc) \in p \text{ และ}$$

$$b(c,d) = (bc, bd) \in p$$

โดยสมบัติการถ่ายทอดใน p จะได้ว่า $(ac, bd) \in p$

นั่นคือ p ปิดภายใต้การคูณ โดยเลมมา 2.1 เราได้ว่า p เป็นสับริงของ $S \times S$

($\Leftarrow$) : สมมุติว่า ρ เป็นสับริงของ $S \times S$

ให้ $s \in S$, $(a,b) \in \rho$ จะได้ว่า $(s,s) \in \rho$ และเนื่องจาก ρ เป็นสับริง จะได้ว่า

$$s(a,b) = (sa, sb) = (s,s)(a,b) \in \rho$$

$$(a,b)s = (as, bs) = (a,b)(s,s) \in \rho$$

ดังนั้น ρ เป็นสับโมดูลของ $S \times S$ ภายใต้การคูณแบบสเกลาร์

□

ทฤษฎีบท 2.10 ให้ S เป็นริง และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S
ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(ก) ρ ปิดภายใต้การบวกและการคูณ ใน $S \times S$

(ข) ρ เป็นสับริงของ $S \times S$

(ค) ρ เป็นสับโมดูลของ $S \times S$ ภายใต้การคูณแบบสเกลาร์

(ง) $\rho \in \mathcal{P}_S$

พิสูจน์ เป็นไปตามเลมมา 2.1, 2.5 และ 2.9

□

มีความสัมพันธ์สมมูล ρ บนริง S ที่เป็นสับริงของ $S \times S$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขข้างบน เมื่อไรก็ตามที่ ρ เป็นสับริงที่ดีพอ สามารถเป็นไอเดี่ยลของ $S \times S$ ไม่จำเป็นที่ $\rho = S \times S$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.3 ให้ $Z_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ การบวก (+) นิยามภายใต้มอดุโล 4

การคูณ ($\cdot$) ใน Z_4 นิยามดังนี้ สำหรับ $\overline{a}, \overline{b} \in Z_4$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$ จะเห็นได้ว่า

$(Z_4, +, \cdot)$ เป็นริง ให้ $\rho = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{2}), (\overline{3}, \overline{3}), (\overline{0}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{3}), (\overline{3}, \overline{1})\}$ เห็นได้โดยง่ายว่า ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลที่เป็นไอเดี่ยลของ $Z_4 \times Z_4$ แต่ $\rho \neq Z_4 \times Z_4$

□

จากทฤษฎีบท 1.11 เราได้ว่า ถ้า p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนริง S แล้ว จะมีสมมูลหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างโคเซตของ p ใน $S \times S$ กับโคเซตของ $[0]_p$ ใน S ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวนี้กำหนดโดย

$$F(a + [0]_p) = (a, 0) + p \quad \text{ทั้งนี้เพราะ } (S, +) \text{ เป็นกรุป}$$

ทฤษฎีบท 2.11 ถ้า p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนริง S ที่เป็นไอเดิลของ $S \times S$ แล้ว $S/[0]_p$ ไอโซมอร์ฟิกกับ $S \times S / p$

พิสูจน์ กำหนด $F : S/[0]_p \rightarrow S \times S / p$ โดยสำหรับทุก ๆ $a \in S$

$$F(a + [0]_p) = (a, 0) + p \quad \text{เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า } F \text{ เป็นไอโซมอร์ฟิซึม}$$

$$\text{ให้ } a + [0]_p, b + [0]_p \in S/[0]_p$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } F(a + [0]_p + b + [0]_p) &= F(a + b + [0]_p) \\ &= (a + b, 0) + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(a + [0]_p) + F(b + [0]_p) &= (a, 0) + p + (b, 0) + p \\ &= (a + b, 0) + p \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } F(a + [0]_p + b + [0]_p) = F(a + [0]_p) + F(b + [0]_p)$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } F((a + [0]_p)(b + [0]_p)) &= F(ab + [0]_p) \\ &= (ab, 0) + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(a + [0]_p) F(b + [0]_p) &= ((a, 0) + p)((b, 0) + p) \\ &= (ab, 0) + p \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } F(a + [0]_p) F(b + [0]_p) = F((a + [0]_p)(b + [0]_p))$$

เพราะฉะนั้น F เป็นไอโซมอร์ฟิซึม

□

ทฤษฎีบท 2.12 ให้ S เป็นริง p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S

ถ้า p เป็นสับริงของ $S \times S$ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

$$(ก) \quad p \text{ เป็นไอเดิลของ } S \times S$$

$$(ข) \quad S^2 \subseteq [0]_p \text{ เมื่อ } S^2 = \{ab \mid a, b \in S\}$$

พิสูจน์ $(\eta) \Rightarrow (\chi)$: สมมติว่า ρ เป็นไอดีลของ $S \times S$

ให้ $a, b \in S$ จะได้ว่า $(b, b) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นไอดีลของ $S \times S$ จะได้ว่า $(a, 0)(b, b) \in \rho$ แต่ $(a, 0)(b, b) = (ab, 0)$ ดังนั้น $ab \in [0]_\rho$ นั่นคือ $S^2 \subseteq [0]_\rho$

$(\chi) \Rightarrow (\eta)$: สมมติว่า $S^2 \subseteq [0]_\rho$

ให้ $(a, b) \in S \times S, (x, y) \in \rho$

พิจารณา $(a, b)(x, y) = (ax, by)$

$$(x, y)(a, b) = (xa, yb)$$

จากสมมติฐานได้ว่า $ax, by, xa, yb \in [0]_\rho$ ดังนั้น $ax + [0]_\rho = by + [0]_\rho$

และ $xa + [0]_\rho = yb + [0]_\rho$ โดยทฤษฎีบท 2.10 จะได้ว่า $(ax, by) \in \rho$

และ $(xa, yb) \in \rho$ ดังนั้น ρ เป็นไอดีลของ $S \times S$

□

บทแทรก 2.13 ให้ S เป็นริง ซึ่ง $1 \in S$ ($\forall x \in S, 1x = x1 = x$) และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S จะได้ว่า ถ้า ρ เป็นไอดีลของ $S \times S$ แล้ว $\rho = S \times S$

พิสูจน์ เนื่องจาก $1 \in S$ จะได้ว่า $S^2 = S$

เนื่องจาก ρ เป็นไอดีลของ $S \times S$ และโดยทฤษฎีบท 2.12 เราได้ว่า $S = [0]_\rho$

ดังนั้น $\rho = S \times S$

□

บทนิยาม 2.14 ให้ $(S, \cdot)$ เป็นเซมิกรุปจะเรียกสับเซตไม่ว่าง I ของ S ว่าเป็น คอมพลีทลีเซมิไพร์มสับเซต (completely semiprime subser) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $a \in S$ และ $a^2 \in I$ แล้ว $a \in I$

ตัวอย่าง 2.4 ให้ Z เป็นเซตของจำนวนเต็มเรามี $(Z, \cdot)$ เป็นเซมิกรุปและ $pZ = \{0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p, \dots\}$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ เป็นคอมพลีทลีเซมิไพร์ม

□

ทฤษฎีบท 2.15 ให้ S เป็นริง, p เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S และ p เป็น
 ไอเดี่ยลของ $S \times S$ ถ้า $(p, \cdot)$ เป็นคอมพลีทลีเซมิไพร์ม แล้ว $p = S \times S$

พิสูจน์ ให้ $(a,b) \in S \times S$ จะได้ว่า $(a,a), (b,b) \in p$

เนื่องจาก p เป็นไอเดี่ยลของ $S \times S$ จะได้ว่า $(a,a)(a,b) = (a^2, ab) \in p$ และ

$(a,b)(b,b) = (ab, b^2) \in p$ โดยคุณสมบัติการถ่ายทอดใน p จึงได้ว่า $(a^2, b^2) \in p$

แต่ $(a^2, b^2) = (a,b)^2$ เนื่องจาก เป็นคอมพลีทลีเซมิไพร์ม เราได้ว่า $(a,b) \in p$

ดังนั้น $p = S \times S$

□