

บทที่ 1

ความรู้พื้นฐาน

เพื่อความสะดวกในการศึกษางานวิจัยฉบับนี้ ในบทที่ 1 จึงเป็นความรู้พื้นฐาน ที่จำเป็นซึ่งส่วนหนึ่งเป็นงานวิจัยของ Pierre J. Malrison ซึ่งเป็นแนวคิดในการวิจัยครั้งนี้ ทฤษฎีบทบางทฤษฎีบท ของ Pierre J. Malrison ในบทนี้ จะไม่พิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นเซต สับเซตใด ๆ ของผลคูณคาร์ทีเซียน $X \times Y$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X (Equivalence Relation on X) ก็ต่อเมื่อ

- (i) R มีสมบัติการสะท้อน (Reflexive)
นั่นคือ สำหรับทุก ๆ $x \in X$, $(x, x) \in R$.
- (ii) R มีสมบัติการสมมาตร (Symmetric)
นั่นคือ ถ้า $(x, y) \in R$ แล้ว $(y, x) \in R$, สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$
- (iii) R มีสมบัติการถ่ายทอด (Transitive)
นั่นคือ ถ้า $(x, y) \in R$ และ $(y, z) \in R$ แล้ว $(x, z) \in R$,
สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$

บทนิยาม 1.1 ให้ $(G, \cdot)$ เป็นกรุป, H เป็นสับกรุปของ G และสำหรับทุก ๆ $a \in G$ จะเรียก $aH = \{ah \mid h \in H\}$ ว่าเป็น โคเซตทางซ้ายของ H ใน G (left coset of H in G) และเรียก $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ ว่าเป็น โคเซตทางขวาของ H ใน G (right coset of H in G) □

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ G เป็นกรุป, H เป็นสับกรุปของ G และสำหรับทุก ๆ $a, b \in G$ จะได้ว่า $aH = bH$ ก็ต่อเมื่อ $a^{-1}b \in H$ □

บทนิยาม 1.3 ให้ H เป็นสับกรุปของกรุป G จะเรียก H ว่าเป็น นอร์มัลสับกรุป (normal subgroup) ก็ต่อเมื่อ $aH = Ha$ สำหรับทุก ๆ $a \in G$. □

ทฤษฎีบท 1.4 ถ้า H เป็นสับกรุปของ G แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (i) H เป็นนอร์มัลสับกรุป
 - (ii) $aHa^{-1} \subseteq H$ สำหรับทุก ๆ $a \in G$
 - (iii) $a^{-1}Ha \subseteq H$ สำหรับทุก ๆ $a \in G$
 - (iv) $aha^{-1} \in H$ สำหรับทุก ๆ $a \in G, h \in H$
 - (v) $a^{-1}ha \in H$ สำหรับทุก ๆ $a \in G, h \in H$
-

ทฤษฎีบท 1.5 ให้ H เป็นนอร์มัลสับกรุปของ G กำหนด $G/H = \{aH \mid a \in G\}$ ถ้านิยามไบนารีโอเปอเรชันบน G/H โดย $aH \cdot bH = abH$ แล้ว $(G/H, \cdot)$ เป็นกรุป □

บทนิยาม 1.6 จะเรียก $(G/H, \cdot)$ ตามทฤษฎีบทข้างบนว่า กรุปปัดส่วน (quotient group) โดย H หรือ กรุปตัวประกอบ (factor group) ของ G โดย H □

บทนิยาม 1.7 ให้ $(G, \cdot)$ และ $(G', *)$ เป็นกรุปจะเรียก $\varphi: G \rightarrow G'$ ว่าเป็น โฮโมมอร์ฟิซึม (homomorphism) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $a, b \in G$, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\varphi: G \xrightarrow{\text{homo}} G'$ □

ทฤษฎีบท 1.8 ให้ G, G' เป็นกรุป $f: G \xrightarrow{\text{homo}} G'$, ถ้า N' เป็นนอร์มัลสับกรุปของ G' แล้ว $f^{-1}(N')$ เป็นนอร์มัลสับกรุปของ G □

Pierre J. Malrison กล่าวถึงความสัมพันธ์สมมูลบนกรุป G ซึ่งเป็นดังต่อไปนี้

ให้ $(G, \cdot)$ เป็นกรุปแล้ว $G \times G$ เป็นกรุปภายใต้โอเปอเรชัน

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd) \text{ สำหรับทุก ๆ } (a, b), (c, d) \in G \times G$$

จากนี้ทำให้เราได้ว่า

(e, e) เป็นเอกลักษณ์ของ $G \times G$ เมื่อ e เป็นเอกลักษณ์ของ G

ให้ R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนกรุป G จะเรียกเซตของสมาชิกใน G ที่สัมพันธ์กับ g ใน G ว่า ชั้นสมมูลของ g (equivalence class of g) ซึ่งเขียนแทนด้วย $[g]_R$

$$\text{นั่นคือ } [g]_R = \{ g' \in G \mid (g', g) \in R \}$$

Pierre J. Malrison ได้กล่าวถึงทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์สมมูลบนกรุป G ซึ่งทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่จำเป็นต่อการวิจัยนี้

ทฤษฎีบท 1.9 [2] ให้ G เป็นกรุป และ R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน G ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (i) R ปิดภายใต้การคูณ ใน $G \times G$
- (ii) R เป็นสับกรุปของ $G \times G$
- (iii) R เป็นความสัมพันธ์ของการอยู่ในโคเซตเดียวกันของบางนอร์มัลสับกรุป N ของ G

พิสูจน์ (i) $\Rightarrow$ (ii) : สมมติว่า R ปิดภายใต้การคูณใน $G \times G$ ให้ $(a,b) \in R$ เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $(a,b)^{-1} \in R$ เนื่องจาก R ปิดภายใต้การคูณและ $(a^{-1}, a^{-1}), (b^{-1}, b^{-1}) \in R$ ดังนั้น

$$(a^{-1}, a^{-1})(a,b) = (e, a^{-1}b) \in R \quad \text{และ}$$

$$(e, a^{-1}b)(b^{-1}, b^{-1}) = (b^{-1}, a^{-1}) \in R$$

โดยคุณสมบัติการสมมาตรใน R เราได้ว่า $(a^{-1}, b^{-1}) \in R$ นั่นคือ $(a,b)^{-1} \in R$

ดังนั้น R เป็นสับกรุปของ $G \times G$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : สมมติว่า R เป็นสับกรุปของ $G \times G$ ให้ $a, b \in [e]_R$

จะได้ว่า $(a,e), (b,e) \in R$ จากสมมุติฐานได้ว่า $(a,e)(b,e) = (ab, e^2) = (ab, e) \in R$

ดังนั้น $ab \in [e]_R$

ให้ $x \in [e]_R$ จะได้ว่า $(x,e) \in R$ เนื่องจาก R เป็นกรุป จะได้ว่า

$$(x^{-1}, e^{-1}) \in R \quad \text{แต่ } (x^{-1}, e^{-1}) = (x^{-1}, e) \quad \text{นั่นคือ } x^{-1} \in [e]_R$$

ต่อไปจะแสดงว่า $[e]_R$ เป็นนอร์มัล ให้ $a \in [e]_R$ และ $g \in G$ จะได้ว่า

$$(a,e), (g,g) \in R$$

เนื่องจาก R เป็นสับกรุปของ $G \times G$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} (g,g)(a,e)(g,g)^{-1} &= (g,g)(a,e)(g^{-1},g^{-1}) \\ &= (gag^{-1}, geg^{-1}) \\ &= (gag^{-1}, e) \in R \end{aligned}$$

นั่นคือ $gag^{-1} \in [e]_R$ ดังนั้น $[e]_R$ เป็นนอร์มัลสับกรุปของ G

ต่อไปจะแสดงว่าสำหรับทุก ๆ $(a,b) \in R$ ก็ต่อเมื่อ $a[e]_R = b[e]_R$ เนื่องจาก

R เป็นสับกรุปของ $G \times G$ และสำหรับทุก ๆ $a \in G, (a^{-1}, a^{-1}) \in R$

$$\text{พิจารณา } (a,b) \in R \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } (a^{-1}, a^{-1})(a,b) = (e, a^{-1}b) \in R$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } (a^{-1}b, e) \in R$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } a^{-1}b[e]_R$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } a[e]_R = b[e]_R$$

เพราะฉะนั้น R เป็นความสัมพันธ์ของการอยู่ในโคเซตเดียวกันของ $[e]_R$

(iii) $\Rightarrow$ (i) : สมมุติว่า H เป็นนอร์มัลสับกรุปของ G ซึ่งสำหรับทุก $(a,b) \in R$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } aH = bH$$

ให้ $(a,b), (c,d) \in R$ โดยสมมุติฐานเราได้ว่า $aH = bH$ และ $cH = dH$

$$\text{ดังนั้น } a = bh_1 \quad \text{สำหรับบาง } h_1 \in H$$

$$c = dh_2 \quad \text{สำหรับบาง } h_2 \in H$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } ac &= (bh_1)(dh_2) \\ &= b(h_1d)h_2 \\ &= b(dh_3)h_2 \quad \text{สำหรับบาง } h_3 \in H \\ &= bd(h_3h_2) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } ac \in bdH \quad \text{นั่นคือ } acH = bdH$$

ดังนั้น $(ac, bd) \in R$

เพราะฉะนั้น R ปิดภายใต้การคูณใน $G \times G$

□

จากทฤษฎีบท 1.9 ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.10 ให้ G เป็นกรุปและ R เป็นความสัมพันธ์สมมูลใน G ถ้า R เป็นความสัมพันธ์ของการอยู่ในโคเซตเดียวกันของบางนอร์มัลสับกรุป N ของ G

แล้ว $[e]_R = N$

พิสูจน์ ให้ $a \in [e]_R$ จะได้ว่า $(a, e) \in R$ ดังนั้น $aN = eN$ นั่นคือ $a^{-1}e = a^{-1} \in N$

ดังนั้น $a \in N$

ให้ $n \in N$ จะได้ว่า $nN = N$ นั่นคือ $(n, e) \in R$ ดังนั้น $n \in [e]_R$

เพราะฉะนั้น $[e]_R = N$

□

ทฤษฎีบท 1.11 [2] ถ้า R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนกรุป G ที่เป็นสับกรุปของ $G \times G$ แล้วจะมีสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างโคเซตของ R ใน $G \times G$ และโคเซตของ

$[e]_R$ ใน G

□

ฟังก์ชันในทฤษฎีบท 1.11 กำหนดโดย $F(a[e]_R) = (a, e)R$

บทนิยาม 1.12 ให้ $(G, \cdot)$ เป็นกรุป สมาชิกของ G ซึ่งเขียนอยู่ในรูป $gkg^{-1}k^{-1}$

สำหรับบาง $g, k \in G$ เรียกว่า คอมมิวเตเตอร์ (commutator)

□

บทนิยาม 1.13 ให้ G เป็นกรุปและ X เป็นเซตของคอมมิวเตเตอร์ทั้งหมดของ G กำหนด $[G, G] = \langle X \rangle$ คือสับกรุปของ G ที่ก่อกำเนิดโดย X (generated by X) เรียก $[G, G]$ ว่า คอมมิวเตเตอร์สับกรุปของ G (commutator subgroup of G)

□

ทฤษฎีบท 1.14 [2] ถ้าความสัมพันธ์สมมูล R บนกรุป G เป็นสับกรุปของ $G \times G$ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (i) R เป็นนอร์มัลสับกรุปของ $G \times G$
- (ii) $G/[e]_R$ เป็นอะบีเลียนกรุป
- (iii) $[G, G]$ เป็นสับกรุปของ $[e]_R$

□