

บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 การคำนวณแรงโก่งเคาะใช้วิธีโมดูลัสสัมผัส (Tangent Modulus)

Furlong (1967) ได้อธิบายพฤติกรรมเสาสั้นบรรจุคอนกรีตรับน้ำหนักตามแกน ไว้ ดังนี้ เมื่อแรงกระทำน้อยๆคอนกรีตมีค่าอัตราส่วนปัวซอง (Poisson Ratio) น้อยกว่าเหล็ก จะมีแนวโน้มที่จะเลื่อนตัวระหว่างเหล็กกับคอนกรีตเมื่อแรงกระทำสูงขึ้นจะเกิดรอยร้าว (Microcracking) ในคอนกรีต คอนกรีตจะขยายตัวทางด้านข้างมากขึ้น จนถูกค้ำด้วยเหล็ก ทำให้เสามีกำลังสูงขึ้น ส่วนในเสาจะลุดเหล็กบรรจุคอนกรีตนั้น Knowles and Park (1969) ได้อธิบายว่าเสาจะวิบัติโดยการโก่งเคาะ (Buckling)

Gardner and Jacobson (1968) ได้เสนอสมการสำหรับประมาณแรงโก่งเคาะเสาจะลุดเหล็กบรรจุคอนกรีตซึ่งเป็นหน้าตัดเชิงประกอบ (Composite Member) โดยใช้วิธี โมดูลัสสัมผัส (Tangent Modulus)

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{(I_s E_{st} + I_c E_{ct})}{L^2} \quad (1)$$

L = ความยาวของเสา

P_{cr} = แรงโก่งเคาะ

I_s = โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่เหล็ก

I_c = โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่คอนกรีต

E_{st} = โมดูลัสสัมผัสของเหล็ก (Tangent Modulus of Steel)

E_{ct} = โมดูลัสสัมผัสของคอนกรีต (Tangent Modulus of Concrete)

สมมติฐานที่ใช้ในการประมาณแรง โก่งเคาะ ใช้วิธี โมดูลัสสัมผัส (Tangent Modulus)

ดังนี้

ก. ถือว่าเป็นเสาตรงในอุดมคติ

ข. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตใช้ความสัมพันธ์ในแนวแกนเดียวของ Hognestad (1955)

$$f_c = f'_c \left(\left(2 \frac{\epsilon_c}{\epsilon'_c} \right) - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon'_c} \right)^2 \right) \quad (2)$$

f'_c = ค่ากำลังอัดประลัยของคอนกรีต

f_c = ค่ากำลังอัดของคอนกรีต

$\mathcal{E}_c$ = ค่าความเครียดคอนกรีต

$\mathcal{E}'_c$ = ค่าความเครียดคอนกรีตที่กำลังอัดประลัยมีค่าเท่ากับ 0.002

ค. ค่าโมดูลัสสัมผัสของเหล็กใช้ความสัมพันธ์ของ Ylinen (1956)

$$E_{st} = E \left(\frac{f_y - f}{f_y - cf} \right) \quad (3)$$

f'_y = หน่วยแรงคลากของเหล็ก

f = หน่วยแรงของเหล็ก

c = ค่าคงที่สำหรับเหล็กเท่ากับ 0.96-0.99

E = ค่าโมดูลัสของเหล็ก

ง. ไม่คิดผลของการถูกจำกัดการขยายตัวทางด้านข้างของคอนกรีต

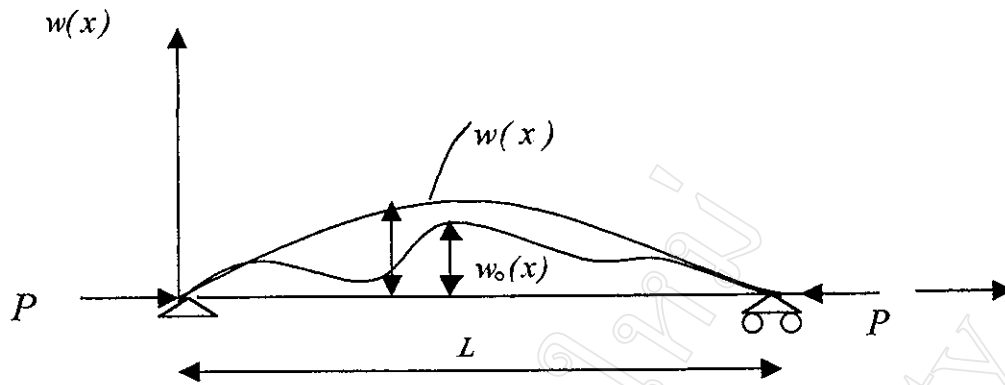
จ. ไม่คิดผลของการคืบ (Creep) และการหดตัว (Shrinkage) ของคอนกรีต

ฉ. ถือว่าไม่เกิดการลื่นไถลระหว่างเหล็กกับคอนกรีตดังนั้นความเครียดตามแกนของเหล็กเท่ากับคอนกรีต

2.2 การคำนวณแรงโก่งเดาะโดยวิธี (Southwell plot)

เสาที่ใช้งานในสภาพจริงอาจไม่สมบูรณ์ทางด้านเรขาคณิต(Imperfect Column) วิธีการของ Southwell plot เป็นวิธีที่นำผลของความไม่สมบูรณ์ของเสาทางด้านเรขาคณิตมาใช้เป็นแนวทางการวิเคราะห์โดยนำข้อมูลจากการทดลองซึ่งประกอบด้วยระยะ โคงที่กึ่งกลางเสาและแรงที่กระทำมาหาความสัมพันธ์และใช้คำนวณหาแรงโก่งเดาะของ Euler

พิจารณาเสาที่มีความโค้งเริ่มต้น(Initial Geometric Imperfect) = $w_0(x)$



รูปที่ 2.1 รูปร่างการโก่งของเสาที่มีความโค้งเริ่มต้น (Initial Geometric Imperfect)

จากสมการควบคุม (Governing Equation) ของเสา จะพิจารณารูปที่ 2.1 ประกอบ
นำมาเขียนสมการ จะได้ดังสมการ (4)

$$EI \left(\frac{d^2 w(x)}{d^2 x} \right) - EI \left(\frac{d^2 w_o(x)}{d^2 x} \right) + Pw(x) = 0 \quad (4)$$

เงื่อนไขที่จุดรองรับ

$$w_o(0) = w_o(L) = 0$$

$$w(0) = w(L) = 0$$

(5)

เนื่องจากรูปร่างของความโค้งมีค่าสูงสุดและต่ำสุดอยู่ในช่วง $0 \leq x \leq L$ ดังนั้น
สามารถแทน $w(x)$ และ $w_o(x)$ ด้วยอนุกรมฟูรีเย่ได้

$$w_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6)$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

แทนสมการ(6) ลงใน(4)จะได้

$$EI \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) + Pw(x) = EI \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (8)$$

แทนสมการ (7) ลงในสมการ (8) และใช้คุณสมบัติของ Orthogonal จะได้สมการ(9)

$$\left(\left(EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) - P \right) A_n = EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a_n \quad (9)$$

ดังนั้น

$$A_n = \frac{P_n}{P_n - P} a_n \quad (10)$$

เมื่อ

$$P_n = \left(\frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \right) \quad (11)$$

แทนสมการ (10) ลงในสมการ (7) จะได้

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{P_n - P} \right) a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (12)$$

และ

$$w(x) - w_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P}{P_n - P} \right) a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (13)$$

ในการทดลองเสาเราสามารถวัดการโก่งที่จุดกึ่งกลางของเสาได้และวัดแรงได้เช่นกัน พิจารณาสมการที่ (13) ถ้า P เข้าใกล้ P_1 เทอมที่ 1 ของสมการ(13) จะมีค่าเป็นสำคัญ (Predominant) ดังนั้นถ้าให้ $a_1 \neq 0$ และ $a_n = 0$ สำหรับ $n=2,3,4,\dots$

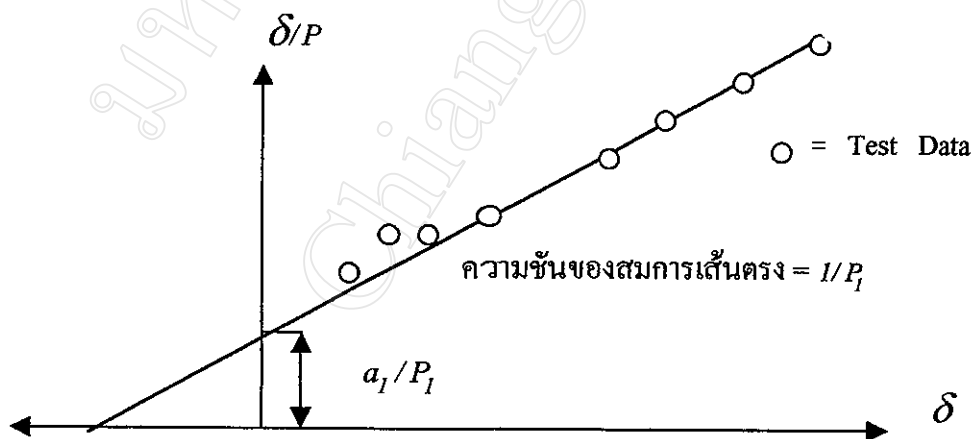
ดังนั้นจากสมการที่ (13) ระยะโก่งที่กึ่งกลางของเสาจะมีค่า

$$\delta = w\left(\frac{L}{2}\right) - w_o\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Pa_1}{P_1 - P} \quad (14)$$

ดังนั้น

$$\left(\frac{\delta}{P}\right) = \left(\frac{\delta}{P_1}\right) + \frac{a_1}{P_1} \quad (15)$$

ซึ่งจะคำนวณหา Euler Load จากรูปที่ 2.2 ได้



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์สมการเส้นตรงของ Southwell

2.3 การออกแบบเสาเหล็กบรจุคอนกรีตโดยข้อกำหนดของ (AISC-LRFD)

การออกแบบเสาเหล็กบรจุคอนกรีตรับแรงอัดตามข้อกำหนดของ (AISC-LRFD) ปี ค.ศ.1986 ได้กล่าวไว้ในส่วนขององค์การเชิงประกอบ โดยใช้หลักการแปลงคุณสมบัติของวัสดุ และเป็นที่ทราบกันว่ากำลังอัดของเสาเหล็กบรจุคอนกรีตขึ้นกับ กำลังของคอนกรีต กำลังของเหล็กและรูปร่างของหน้าตัดของเสา การคำนวณการรับแรงอัดของเสาเหล็กบรจุคอนกรีตโดยข้อกำหนดของ (AISC-LRFD) เป็นไปตามสมการที่ (16)

มีขั้นตอนดังนี้

$$\phi P = 0.85 A_s F_{cr} \quad (16)$$

$$F_{cr} = (0.658)^A F_{my} \quad \text{สำหรับ} \dots A \leq 2.25 \quad (17)$$

$$F_{cr} = \frac{0.877}{A} F_{my} \quad \text{สำหรับ} \dots A > 2.25 \quad (18)$$

$$F_{my} = f_y + 0.85 f_c \frac{A_c}{A_s} \quad (19)$$

$$E_m = E_s + 0.4 \frac{A_c}{A_s} E_c \quad (20)$$

โดยที่

ϕ = ตัวคูณลดกำลัง

P = กำลังอัดสูงสุด

A_c = พื้นที่หน้าตัดคอนกรีต

A_s = พื้นที่หน้าตัดเหล็ก

r_m = รัศมีไจเรชันดัดแปลงมีค่าเท่ากับ 0.3 เท่าของหน้าเสา

หรือรัศมีไจเรชันของเหล็กโดยเลือกใช้ค่ามาก

F_{cr} = หน่วยแรงอัดวิกฤต

$$A = \frac{(KL)^2}{(\pi r_m)^2} \frac{(F_{my})}{(E_m)} \quad (21)$$

AISC ได้กำหนดความหนาของเหล็ก รูปเหลี่ยมที่นำมาใช้บรรจุคอนกรีตเพื่อป้องกันการเกิด การ โกงเฉพาะที่(Local Buckling)และคุณสมบัติของวัสดุไว้ดังนี้

$$t \geq b \sqrt{\frac{f_y}{3E_s}} \quad (22)$$

$$f_y \leq 4141 \text{ ksc} \quad (23)$$

$$170 \text{ ksc} \leq f'_c \leq 690 \text{ ksc} \quad (24)$$

b = ความกว้างหน้าเสา

t = ความหนาของเหล็ก