

บทที่ 2

ทฤษฎี

ทฤษฎีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ ประกอบด้วย 6 หัวข้อ คือ 2.1 เวลาทางดาราศาสตร์, 2.2 ทฤษฎีสเปกโตรสโคปี, 2.3 ทฤษฎีกลศาสตร์, 2.4 ชนิดของระบบดาวคู่, 2.5 วิวัฒนาการของระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด, และ 2.6 ระบบดาวคู่ที่มีสมาชิกเป็น Compact Objects โดยพยายามให้เนื้อหาครอบคลุมและอยู่ภายใต้วัตถุประสงค์ของการศึกษา ซึ่งจะถูกนำมาใช้อธิบาย คำนวณ และวิเคราะห์ ข้อมูลของผลสังเกตการณ์ที่อยู่ในรูปของภาพสเปกตรัมของระบบดาวคู่บีตา ไลรี ที่ผันแปรไปกับคาบเวลาหรือเฟสการโคจรของมัน

2.1 เวลาทางดาราศาสตร์

ประกอบด้วย 2.1.1 วันจูเลียนศูนย์สุริยะ, และ 2.1.2 เฟสการโคจรของดาวคู่

2.1.1 วันจูเลียนศูนย์สุริยะ

วันจูเลียนศูนย์สุริยะ (heliocentric Julian date) คือ เวลาทางดาราศาสตร์ที่นับเป็นจำนวนวัน มีค่าเวลาแบ่งในรูปทศนิยมของวัน เริ่มนับวันใดวันหนึ่งในอดีตเป็นวันเริ่มต้น มีดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลาง คำนวณได้จากสมการ

$$H.J.D. = J.D. + \Delta t \quad (2.1)$$

เมื่อ H.J.D. เป็นวันจูเลียนศูนย์สุริยะ, J.D. เป็นวันจูเลียน (Julian date) ที่มีความหมายเหมือนกันกับวันจูเลียนศูนย์สุริยะแต่ใช้การกำหนดวันโดยโลกเป็นจุดศูนย์กลาง (geocentric) ซึ่งหาวันจูเลียนจากสมการ

$$J.D.(0^h U.T.) = 2415020 + 365(\text{ปีค.ศ.} - 1900) + (\text{จำนวนวันนับจากวันเริ่มต้นปีใหม่}) + [\text{จำนวนปีค.ศ. ที่หารด้วยเลข 4 ลงตัว (Leap year) นับตั้งแต่ปี ค.ศ. 1900}] - 0.5 \quad (2.2)$$

โดยเริ่มนับวันจูเลียนตั้งแต่เวลาเที่ยงวันสากล (universal time) คือ 12^h U.T. ของวันที่ 1 มกราคม 4713 ปีก่อนคริสตกาล (ค.ศ.) โดยสามารถแปลงเวลาที่ตำบลใดๆ ไปเป็นเวลาสากล ด้วยสมการ

$$U.T. = S.T.Z. + \text{Zone Number} \quad (2.3)$$

ซึ่ง S.T.Z. ย่อมาจาก Standard time zone คือเวลาโซนมาตรฐานที่กำหนดเหมือนกันหมดในแต่ละโซนเมื่อเทียบกับกรีนิช (ตรงกันกับเวลาบนนาฬิกาที่เราใช้ดูประจำวัน) โดยโซนที่อยู่ติดกันมีเวลาต่างกันโซนละ 1 ชั่วโมง เช่น เมื่อโซนที่ 0 (ที่กรีนิช) เป็นเวลาเที่ยงวัน โซนที่ +1 (ศูนย์กลางที่ 15 องศาตะวันตก) จะเป็นเวลา 11 โมงเช้า โซนที่ -1 (ศูนย์กลางที่ 15 องศาตะวันออก) จะเป็นเวลาบ่ายโมงตรง เป็นต้น และหอดูดาวสิรินธร มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ มีค่าลองจิจูด 98.5 องศาตะวันออก จัดอยู่ในเลขโซน (zone number) ที่ -7 หรือ อาจสามารถคำนวณเวลาสากล (U.T.) จาก เวลาท้องถิ่นเฉลี่ย (local mean time, L.M.T.) เมื่อเวลาที่ท้องถิ่นเฉลี่ยตอนเที่ยงคืนพอดี มีค่าเท่ากับ 0 ชั่วโมง คำนวณได้จากสมการ

$$U.T. = L.M.T. + \text{Longitude West} \text{ หรือ } U.T. = L.M.T. - \text{Longitude East} \quad (2.4)$$

เมื่อค่าลองจิจูดตะวันตกหรือตะวันออก (longitude west or east) ของตำบลใดๆ มีหน่วยเป็น ชั่วโมง นาที วินาที ซึ่งเป็นผลต่างของเวลาที่ตำบลนั้นๆ เทียบกับกรีนิช ซึ่งมีความละเอียดของเวลามากกว่าสมการ(2.3) เพราะว่า สมการ(2.4) เป็นการคิดลองจิจูดที่ตำบลใดๆ มากกว่าที่จะคิดจากเวลาเฉลี่ยทั้งโซนเป็นเวลามาตร

ฐานเดียวกัน (S.T.Z.) ของสมการ(2.3) และ Δt ของสมการ(2.1) เป็นผลต่างของเวลาที่แสงใช้เดินทางข้ามวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ คำนวณได้จากสมการ

$$\Delta t(\text{วินาที}) = -0.0057755[(\cos \delta \cos \alpha)X + (\tan \varepsilon \sin \delta + \cos \delta \sin \alpha)Y] \quad (2.5)$$

เมื่อ X, Y เป็นพิกัดฉากของดวงอาทิตย์ ณ วันที่พิจารณา, α, δ เป็นค่าไรต์แอสเซนชัน (right ascension) และเดคลิเนชัน (declination) ของดาว ณ วันที่พิจารณา, ε เป็นค่ามุมเอียงของอิกลิปติก ซึ่งมีค่า $23^\circ 27'$ ซึ่งค่า X, Y สามารถคำนวณได้จากสมการ ตามลำดับ ดังนี้ คือ

$$X = 0.99986 \cos L - 0.025127 \cos(G - L) + 0.008374 \cos(G + L) + 0.000105 \cos(2G + L) + 0.000063T \cos(G - L) + 0.000035 \cos(2G - L) \quad (2.6)$$

$$Y = 0.917308 \sin L + 0.023053 \sin(G - L) + 0.007683 \sin(G + L) + 0.000097 \sin(2G + L) - 0.000057T \sin(G - L) - 0.000032 \sin(2G - L) \quad (2.7)$$

T เป็น ค่าศตวรรษจูเลียนสัมพัทธ์ (relative Julian century) คำนวณได้จากสมการ

$$T = (J.D. - 2415020)/36525 \quad (2.8)$$

L เป็น ค่าลองจิจูดสุริยะเฉลี่ย (mean solar longitude) มีหน่วยเป็นองศา โดย L ต้องมีค่าน้อยกว่า 360 องศา คำนวณจากสมการ

$$L = 279^\circ.696678 + 36000.76892T + 0.000303T^2 - p \quad (2.9)$$

เมื่อ p เป็น ค่าการส่าย (precession) ของแกนหมุนของโลก จากปี ค.ศ.1950 ถึงวันที่ทำการสังเกตการณ์ ซึ่งคำนวณค่าการส่ายได้จากสมการ

$$p = [1.396041 + 0.000308(T + 0.5)][T - 0.49998] \quad (2.10)$$

และ G เป็น ค่าอะนอมัลลีสุริยะเฉลี่ย (mean solar anomaly) มีหน่วยเป็นองศา โดย G ต้องมีค่าน้อยกว่า 360 องศา คำนวณจากสมการ

$$G = 358^\circ.475833 + 35999.04975T - 0.00015T^2 \quad (2.11)$$

2.1.2 เฟสการโคจรของดาวฤกษ์

เฟส (phase) คือ องศาของการโคจรของระบบดาวคู่ ซึ่งมีค่าจาก 0 ถึง 1 โดยตำแหน่งกึ่งกลางของอุปราคาปฐมภูมิ มีค่าเท่ากับ 0 และอุปราคาทุติยภูมิ มีค่าเท่ากับ 0.5 ในการคำนวณเฟส แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

(1). เมื่อวันจูเลียนศูนย์สุริยะ (H.J.D.) น้อยกว่าค่าอีพอช (Epoch) สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\text{Phase} = 1 - \text{Fractional part of } \frac{H.J.D. - \text{Epoch}}{\text{Period}} \quad (2.12)$$

(2). เมื่อวันจูเลียนศูนย์สุริยะ (H.J.D.) มากกว่าค่าอีพอช (Epoch) สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\text{Phase} = \text{Fractional part of } \frac{H.J.D. - \text{Epoch}}{\text{Period}} \quad (2.13)$$

เมื่อ Epoch เป็นวันจูเลียนศูนย์สุริยะในขณะที่ดาวแปรแสงมีความสว่างน้อยที่สุด, Period เป็นคาบการแปรแสง, และ Fractional part of (...) หมายถึง คิดเฉพาะผลการคำนวณที่เป็นเลขทศนิยม เช่น สมมติว่า ผลการคำนวณของสมการ(2.13) เป็น Phase = Fractional part of 2451836.032 จะได้ Phase = 0.032 นั่นเอง

2.2 ทฤษฎีสเปกโตรสโคปี

ประกอบด้วย 2.2.1 สเกลของแมกนิจูด, 2.2.2 การแผ่รังสีของวัตถุดำ, 2.2.3 ดัชนีสี, 2.2.4 ทฤษฎีอะตอมไฮโดรเจน และฮีเลียม, 2.2.5 สเปกตรัมของดาว, 2.2.6 แผนภาพเฮิร์ตซสปริง-รัสเซลล์, และ 2.2.7 โครงสร้างของเส้นสเปกตรัม

2.2.1 สเกลของแมกนิจูด

นักดาราศาสตร์ชาวกรีกชื่อ ฮิปพาร์คัส (Hipparchus) เป็นนักเฝ้าสังเกตท้องฟ้าคนแรกที่จัดหมวดหมู่ของดาว โดยใช้สเกลตัวเลขแทนระดับความสว่างของดาวทั้งหมด 850 ดวง คือ ดาวสว่างที่สุดในท้องฟ้ามีแมกนิจูดปรากฏ (apparent magnitude) $m = 1$ และดาวที่สว่างน้อยที่สุดที่สามารถมองเห็นได้มีค่าเท่ากับแมกนิจูดปรากฏ $m = 6$ โดยค่าตัวเลขที่ต่ำกว่าจะมีความสว่างมากกว่าตัวเลขที่สูงกว่า และศตวรรษ (ค.ศ.) ที่ 19 ค้นพบว่า ตามนุษย์มีการตอบสนองต่อผลต่างในลอการิทึมของความสว่าง (brightness) ของวัตถุส่องสว่าง 2 ดวง และทฤษฎีนี้ให้ผลต่างขนาด 1 แมกนิจูด มีอัตราส่วนของความสว่างคงที่จากดาวทั้งสองดวง โดยผลต่างขนาด 5 แมกนิจูด ตรงกันกับอัตราส่วนของความสว่าง 100 เท่า เครื่องมือวัดทางแสงเป็นเครื่องมือแบบมีความไวสามารถวัดแมกนิจูดปรากฏของวัตถุด้วยความแม่นยำ ± 0.01 แมกนิจูด และผลต่างในแมกนิจูดให้ความแม่นยำ ± 0.002 แมกนิจูด จึงทำให้สเกลของฮิปพาร์คัสขยายออกทั้งสองด้าน ด้วย $m = -26.81$ ของดวงอาทิตย์ จนถึง $m = 29$ สำหรับวัตถุสว่างน้อยที่สุดที่สามารถวัดได้

ความสว่างของดาวโดยแท้จริงวัดได้อยู่ในรูปฟลักซ์ของรังสี (radiant flux) F ที่มาจากดาว ฟลักซ์ของรังสีคือปริมาณรวมของพลังงานแสงของทุกความยาวคลื่นที่ตัดผ่านพื้นที่ขนาดหนึ่งหน่วยที่ทำมุมตั้งฉากกับทิศทางเดินของแสงในเวลาขนาดหนึ่งหน่วย ฟลักซ์ของรังสีที่วัดได้จากวัตถุส่องสว่างขึ้นอยู่กับทั้งกำลังความส่องสว่างที่แท้จริง (intrinsic luminosity) ของมันและระยะทางของมันถึงผู้สังเกต โดยถ้าดาวดวงเดิมถูกนำไปวางไว้ที่ตำแหน่งไกลออกไปจากโลกจะทำให้ความสว่างที่ปรากฏมีค่าน้อยลง

ให้จินตนาการว่า ดาวมีกำลังความส่องสว่าง L ถูกปิดล้อมด้วยผิวทรงกลมขนาดมหึมารัศมี r แล้วสมมติด้วยว่า ไม่มีแสงถูกดูดกลืนในระหว่างการเดินทางออกไปสู่ผิวทรงกลมนี้ ดังนั้น การวัดฟลักซ์ของรังสี F ที่ระยะทาง r มีความสัมพันธ์กับกำลังความส่องสว่างของดาว คือ

$$F = L/4\pi r^2 \quad (2.14)$$

เมื่อ L ไม่ขึ้นอยู่กับ r ดังนั้น ฟลักซ์ของรังสีจึงแปรผกผันกับระยะทางจากดาวยกกำลังสอง ซึ่งรู้จักกันในชื่อว่า กฎกำลังสองผกผันสำหรับแสง

ใช้กฎกำลังสองผกผันหาแมกนิจูดสัมบูรณ์ (absolute magnitude) M ของดาวแต่ละดวง โดยกำหนดให้แมกนิจูดสัมบูรณ์มีค่าเท่ากับแมกนิจูดปรากฏถ้าดาวอยู่ที่ตำแหน่งระยะทาง 10 พาร์เซก (parsec) ผลต่างของแมกนิจูดปรากฏของดาว 2 ดวง ขนาด 5 แมกนิจูด ตรงกันกับอัตราส่วนของความสว่างของดาวที่มีแมกนิจูดน้อยกว่ากับดาวที่มีแมกนิจูดมากกว่าเป็น 100 เท่า เพราะฉะนั้น อัตราส่วนของฟลักซ์ คือ

$$F_2/F_1 = 100^{(m_1 - m_2)/5} \quad (2.15)$$

หาลอการิทึมทั้งสองข้างของสมการ (2.15) จะได้

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}(F_1/F_2) \quad (2.16)$$

แล้วหาความสัมพันธ์ระหว่างแมกนิจูดปรากฏ, แมกนิจูดสัมบูรณ์, และระยะทางของดาว โดยรวมสมการ (2.14) กับ (2.15) ให้เป็นสมการเดียวคือ

$$100^{(m-M)/5} = F_{10}/F = (d/10pc)^2$$

เมื่อ F_{10} เป็นฟลักซ์ที่จะวัดได้ถ้าดาวมีตำแหน่งอยู่ที่ระยะทาง 10 พาร์เซก, d เป็นระยะทางของดาว หน่วยเป็น พาร์เซก (parsec, pc) แก้สมการหา d จะได้

$$d = 10^{(m-M+5)/5} \text{ พาร์เซก} \quad (2.17)$$

ซึ่งปริมาณ $m-M$ ดังกล่าวเป็นการวัดระยะทางถึงดาว จึงเรียกปริมาณนี้ว่า โมดูลัสของระยะทาง (distance modulus) นั่นคือ

$$m-M = 5 \log_{10} d - 5 = 5 \log_{10} (d/10pc) \quad (2.18)$$

สำหรับดาว 2 ดวง ที่ระยะทางเท่ากัน สมการ(2.14) อธิบายว่า อัตราส่วนฟลักซ์ของรังสีมีค่าเท่ากัน กับอัตราส่วนของกำลังความส่องสว่างของดาวทั้งสอง ดังนั้น สมการ(2.15) สำหรับแมกนิจูดสัมบูรณ์จะได้

$$100^{(M_1-M_2)/5} = L_2/L_1 \quad (2.19)$$

ถ้าให้ดาวดวงใดดวงหนึ่งของสองดวงนี้เป็นดวงอาทิตย์ แล้วทำการวิเคราะห์ความสัมพันธ์โดยตรงระหว่าง แมกนิจูดสัมบูรณ์และกำลังความส่องสว่างของพวกมันจะได้ว่า

$$M = M_{Sun} - 2.5 \log_{10} (L/L_{Sun}) \quad (2.20)$$

เมื่อแมกนิจูดสัมบูรณ์และกำลังความส่องสว่างของดวงอาทิตย์คือ $M_{Sun} = 4.76$ และ $L_{Sun} = 3.826 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$ ตามลำดับ แมกนิจูดปรากฏ m ของดาวสัมพันธ์กับฟลักซ์ของรังสี F ที่รับได้จากดาวคือ

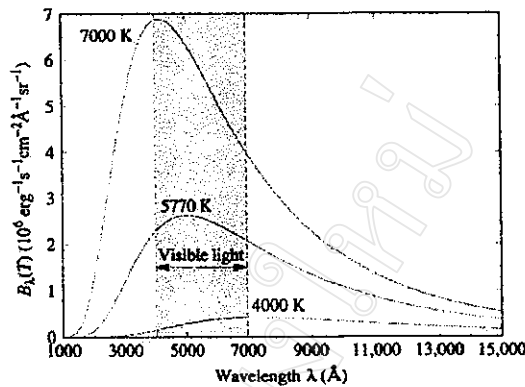
$$m = M_{Sun} - 2.5 \log_{10} (F/F_{10,Sun}) \quad (2.21)$$

เมื่อ $F_{10,Sun}$ เป็นฟลักซ์ของรังสีที่ได้รับจากดวงอาทิตย์ที่ระยะทาง 10 พาร์เซก สรุปว่า กฎกำลังสองผกผัน ของแสงของสมการ(2.14) เป็นความสัมพันธ์ของคุณสมบัติที่แท้จริง (intrinsic properties) ของดาว (กำลังความส่องสว่าง L และแมกนิจูดสัมบูรณ์ M) กับปริมาณที่วัดได้ที่ระยะทางหนึ่งจากดาว (ฟลักซ์ของรังสี F และแมกนิจูดปรากฏ m)

2.2.2 การแผ่รังสีของวัตถุดำ

ดาวมีสีต่างกันเป็นผลเนื่องมาจากอุณหภูมิพื้นผิวของดาวแตกต่างกัน นักฟิสิกส์วิเคราะห์ว่า วัตถุใดๆ ที่มีอุณหภูมิสูงกว่าศูนย์องศาสัมบูรณ์จะเปล่งแสงทุกๆ ความยาวคลื่นออกมาที่ผันแปรตาม degree of efficiency ซึ่งตัวเปล่งแสงอุดมคติ (ideal emitter) เป็นวัตถุที่ดูดกลืนพลังงานแสงทั้งหมดที่ตกกระทบตัวมันแล้วเกิดการเปล่งรังสีออกมาด้วยพลังงานนี้เป็น สเปกตรัมลักษณะเฉพาะ (characteristic spectrum) ดังรูปที่ 2-1 สาเหตุที่ตัวเปล่งแสงอุดมคติไม่มีการสะท้อนแสง จึงเรียกตัวเปล่งแสงอุดมคตินี้ว่า วัตถุดำ (blackbody) และเรียกรังสีที่ปล่อยออกมาว่า รังสีของวัตถุดำ (blackbody radiation) ดาวและดาวเคราะห์คือ วัตถุดำ ซึ่งเป็นวัตถุที่ประมาณได้เป็นอันดับแรก รูปที่ 2-1 อธิบายว่าวัตถุดำที่อุณหภูมิ T ให้สเปกตรัมต่อเนื่อง (continuous spectrum) ด้วยพลังงานที่มีทุกความยาวคลื่นและมียอดของสเปกตรัมของวัตถุดำมีตำแหน่งเป็น λ_{max} ซึ่งจะมีค่าสั้นลงสำหรับดาวที่อุณหภูมิสูงกว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง λ_{max} และ T รู้จักกันในชื่อ กฎการเลื่อนที่ของวิน (Wien's displacement law) คือ

$$\lambda_{\max} T = 0.29 \text{ cm K} \quad (2.22)$$



รูปที่ 2-1 สเปกตรัมของวัตถุดำ ตามฟังก์ชันของแพลงก์ $B_\lambda(T)$

การทดลองของนักฟิสิกส์ชาวออสเตรียนชื่อ โจเซฟ สเตฟาน (Josef Stefan) ในปี พ.ศ. 2422 อธิบายว่า กำลังความส่องสว่าง L ของวัตถุดำที่มีพื้นที่ A และอุณหภูมิสัมบูรณ์ T กำหนดได้จาก

$$L = A \sigma T^4 \quad (2.23)$$

ห้าปีหลังจากนั้นนักฟิสิกส์ชาวออสเตรียนชื่อ ลุดวิก โบลทซมานน์ (Ludwig Boltzmann) ได้พิสูจน์สมการนี้ ทำให้ปัจจุบันเรียกสมการนี้ว่า สมการสเตฟาน-โบลทซมานน์ (Stefan-Boltzmann equation) โดยใช้กฎของเทอร์โมไดนามิกส์และสูตรของแมกซ์เวลล์สำหรับความดันของการแผ่รังสี (radiation pressure) เมื่อ σ เป็นค่าคงที่สเตฟาน-โบลทซมานน์ มีค่าเท่ากับ $5.670 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ดาวที่มีรูปร่างเป็นทรงกลมรัศมี R และพื้นที่ผิว $A = 4\pi R^2$ สมการสเตฟาน-โบลทซมานน์จะมีรูปสมการเป็น

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (2.24)$$

เนื่องจากดาวไม่ได้เป็นวัตถุดำอย่างสมบูรณ์ จึงนิยามอุณหภูมิพื้นผิวของดาวเป็นอุณหภูมิสัมฤทธิ์ (effective temperature) T_e ถ้ารวมสมการ(2.24) กับสมการกฎกำลังสองผกผัน(2.14) ที่พื้นผิวของดาว ($r = R$) จะได้ฟลักซ์ของพื้นผิว (surface flux) คือ

$$F_{\text{surf}} = \sigma T_e^4 \quad (2.25)$$

ในปี พ.ศ. 2443 นักฟิสิกส์ชาวเยอรมันชื่อ แมกซ์ แพลงก์ (Max Planck) ได้ค้นพบสูตรที่ได้จากการทดลองที่สอดคล้องกับสเปกตรัมของวัตถุดำ และรู้จักกันในชื่อ ฟังก์ชันของแพลงก์ คือ

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (2.26)$$

ค่าคงที่ h เรียกว่า ค่าคงที่ของแพลงก์ (Planck's constant) มีค่า $h = 6.626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$ ฟังก์ชันของแพลงก์สามารถใช้เชื่อมโยงระหว่างคุณสมบัติที่สังเกตการณ์ได้ของดาว (ฟลักซ์ของรังสี, แมกนิจูดปรากฏ) และคุณสมบัติที่แท้จริง (รัศมี, อุณหภูมิ) พิจารณาดาวจำลอง (model star) ที่เป็นวัตถุดำแบบทรงกลมรัศมี R และอุณหภูมิ T โดยสมมติว่า แต่ละพื้นที่เล็กๆ ของพื้นผิว dA แผ่รังสีของวัตถุดำแบบไอโซโทรปิก (isotropically, เท่ากันทุกทิศทาง) ทั่วครึ่งทรงกลมชี้ออก (outward hemisphere) พลังงานต่อวินาทีที่ความยาวคลื่น ระหว่าง λ และ $\lambda + d\lambda$ แผ่ออกมาจากดาว คือ

$$L_\lambda d\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_A B_\lambda d\lambda dA \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.27)$$

การอินทิเกรชันเชิงมุมจะให้ผลลัพธ์เป็นแฟกเตอร์ของ π และอินทิกรัลทั่วพื้นที่ของทรงกลมจะได้แฟกเตอร์ของ $4\pi R^2$ ผลลัพธ์คือ

$$L_\lambda d\lambda = 4\pi^2 R^2 B_\lambda d\lambda \quad (2.28)$$

$$= \frac{8\pi^2 R^2 hc^2 / \lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda \quad (2.29)$$

เมื่อ L_λ รู้จักกันในชื่อ กำลังความส่องสว่างความถี่เดียว (monochromatic luminosity) เปรียบเทียบสมการสเตฟาน-โบลทซมานน์(2.24) กับผลของการอินทิเกรตสมการ(2.28) ครอบคลุมทุกความยาวคลื่น จะได้

$$\int B_\lambda(T) d\lambda = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (2.30)$$

กำลังความส่องสว่างความถี่เดียวมีความสัมพันธ์กับฟลักซ์ความถี่เดียว (monochromatic flux) F_λ ด้วยกฎกำลังสองผกผันสำหรับแสงของสมการ(2.14) คือ

$$F_\lambda d\lambda = \frac{L_\lambda}{4\pi r^2} d\lambda = \frac{2\pi hc^2 / \lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \left(\frac{R}{r}\right)^2 d\lambda \quad (2.31)$$

เมื่อ r คือระยะทางถึงดาวจำลอง ดังนั้น $F_\lambda d\lambda$ คือจำนวนเอิร์กของพลังงานของแสงดาวที่ความยาวคลื่นระหว่าง λ และ $\lambda + d\lambda$ ที่มาถึงต่อวินาทีที่หนึ่งตารางเซนติเมตรของเครื่องมือวัดที่ชี้ไปที่ดาวจำลอง โดยสมมติว่าไม่มีแสงถูกดูดกลืนหรือถูกกระเจิงในระหว่างเดินทางจากดาวมาถึงเครื่องมือวัด

2.2.3 ดัชนีสี

แมกนิจูดปรากฏและแมกนิจูดสัมบูรณ์ที่วัดครอบคลุมทุกความยาวคลื่นของแสงที่ส่งออกมาจากดาว รู้จักกันในชื่อ แมกนิจูดโบลเมตริก (bolometric magnitudes) แทนด้วย m_{bol} และ M_{bol} ตามลำดับ ในทางปฏิบัติ เครื่องมือวัดส่วนใหญ่วัดฟลักซ์ของรังสีของดาวได้เฉพาะช่วงความยาวคลื่นที่แน่นอนจากการกำหนดของค่าความไว (sensitivity) ของเครื่องมือวัด สีของดาวอาจกำหนดได้อย่างถูกต้องโดยใช้แผ่นกรองแสง (filters) ที่ปล่อยให้แสงดาวผ่านไปได้ในช่วงความยาวคลื่นแคบที่แน่นอน ระบบยูบีวีมาตรฐาน (standard *UBV*) เป็นการวัดแมกนิจูดปรากฏของดาวที่ผ่านแผ่นกรองแสงจำนวน 3 แผ่น แทนด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่จำนวน 3 ตัว คือ U เท่ากับ แมกนิจูดย่านอัลตราไวโอเลต (ultraviolet magnitude) ของดาว วัดผ่านแผ่นกรองแสงที่ค่ากลางของความยาวคลื่นอยู่ที่ $3650 \text{ \AA}$ ด้วยความกว้างสัมพัทธ์ของแถบสเปกตรัม (effective bandwidth) $680 \text{ \AA}$, B เท่ากับ แมกนิจูดย่านสีน้ำเงิน (blue magnitude) ของดาว วัดผ่านแผ่นกรองแสงที่ค่ากลางของความยาวคลื่นอยู่ที่ $4400 \text{ \AA}$ ด้วยความกว้างสัมพัทธ์ของแถบสเปกตรัม $980 \text{ \AA}$, และ V เท่ากับ แมกนิจูดย่านสีเขียว (visual magnitude) ของดาว วัดผ่านแผ่นกรองแสงที่ค่ากลางของความยาวคลื่นอยู่ที่ $5500 \text{ \AA}$ ด้วยความกว้างสัมพัทธ์ของแถบสเปกตรัม $890 \text{ \AA}$

การใช้สมการ(2.18) อาจหาแมกนิจูดสีสัมบูรณ์ (absolute color magnitudes) M_V , M_B , และ M_U ของดาวได้ถ้าทราบระยะทาง d และมีข้อสังเกตว่า แมกนิจูดปรากฏจะไม่ใช้ตัวอักษรห้อยบน m แต่จะแทนด้วยอักษร U , B , และ V โดยตรง แต่สำหรับแมกนิจูดสัมบูรณ์ M นั้นจะถูกห้อยด้วยอักษรพิมพ์

ใหญ่เหล่านี้ คำนีลี ($U-B$) ของดาวคือผลต่างระหว่างแมกนิจูดข่านอัลตราไวโอเลตและแมกนิจูดข่านสีน้ำเงิน, คำนีลี ($B-V$) ของดาวคือผลต่างระหว่างแมกนิจูดข่านสีน้ำเงินและแมกนิจูดข่านสีเหลือง นั่นคือ

$$U-B = M_U - M_B \quad (2.32)$$

และ

$$B-V = M_B - M_V \quad (2.33)$$

แมกนิจูดของดาวลดลงเมื่อความสว่างเพิ่มขึ้น เพราะฉะนั้น คำนีลี ($B-V$) ที่มีค่าน้อยกว่าจะให้สีน้ำเงินที่เข้มกว่าดาวที่มีค่า $B-V$ มากกว่า เนื่องจากว่าคำนีลีคือผลต่างระหว่างแมกนิจูดจำนวน 2 ค่า ดังนั้น จากสมการ(2.18) แสดงว่ามันไม่ขึ้นอยู่กับระยะทางของดาว ผลต่างระหว่างแมกนิจูดโบโลเมตริกและแมกนิจูดข่านสีเหลืองของดาวคือค่าแก้ไขโบโลเมตริก BC คือ

$$BC = m_{bol} - V = M_{bol} - M_V \quad (2.34)$$

2.2.4 ทฤษฎีอะตอมไฮโดรเจน และฮีเลียม

อิเล็กตรอนและอะตอมเป็นอนุภาคควอนตัม ดังนั้น จึงสามารถแสดงสมการการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในระบบอะตอมได้ด้วยสมการชเรอดิงเงอร์ (Schrodinger equation) $H\psi = E\psi$ เมื่อ H คือแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian), ψ คือฟังก์ชันคลื่น, และ E คือค่าไอเกนหรือค่าพลังงานที่ได้จากการกระทำของโอเปอเรเตอร์แฮมิลโทเนียน คำตอบของสมการคือฟังก์ชันคลื่นและค่าพลังงานเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete) พร้อมเลขควอนตัมจำนวน 3 ตัว คือ n, l, l_z เมื่อ n เป็นเลขควอนตัมหลัก, l เป็นเลขควอนตัมออร์บิทัล, และ l_z เป็นเลขควอนตัมออร์บิทัลในแนวแกน z และจากการทดลองของสเติร์น-เจอร์ลาช (Stern-Gerlach) ทำให้ทราบว่าอิเล็กตรอนมีสปินมีค่าเป็น half-integral ($s = 1/2$) ซึ่งมีองค์ประกอบในแนวแกน z เท่ากับ $s_z = +1/2, -1/2$ และเมื่อรวมกับผลลัพธ์จากการแก้สมการชเรอดิงเงอร์ จึงทำให้ฟังก์ชันคลื่นสามารถอธิบายสถานะของอะตอมตรงกันกับผลทางการทดลองได้เป็นอย่างดี ดังนั้นจึงแทนสถานะของอะตอมได้ด้วยชุดของเลขควอนตัมเพียง 4 ตัว คือ n, l, l_z, s_z และทฤษฎีของอะตอมต่อไปนี้จะอธิบายในมุมมองของแบบจำลองชั้น (shell model) ของอิเล็กตรอน

แบบจำลองชั้นเป็นแบบจำลองโครงสร้างความเป็นไปได้ในการครอบครองวงโคจรหรือระดับพลังงาน ดังรูปที่ 2-2 เมื่อชั้นหลัก (shell) ประกอบด้วย $K, L, M, N, O, P, \dots$ ซึ่งตรงกันกับเลขควอนตัมหลัก $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ตามลำดับ และในแต่ละชั้นหลักก็ประกอบด้วยชั้นย่อยๆ อีก ซึ่งเรียกว่า ชั้นย่อย (subshell) และในคอลัมน์ที่ 3 และ 4 เป็นค่าที่แสดงจำนวนสูงสุดของอิเล็กตรอนในแต่ละชั้นย่อย และจำนวนอิเล็กตรอนรวม ตามลำดับ และการครอบครองของอิเล็กตรอนในแต่ละชั้นย่อยหรือวงโคจร (orbital) ต้องปฏิบัติตามเงื่อนไขของการเข้าครอบครองวงโคจร และอิเล็กตรอนเหล่านี้สามารถเปลี่ยนสถานะหรือเปลี่ยนระดับพลังงาน (transitions) ได้เมื่อมีแรงหรือพลังงานภายนอกมากระทำต่อระบบ อะตอมต้องเป็นไปตามกฎการเลือก (selection rule) ซึ่งเงื่อนไขและกฎข้อบังคับสามารถสรุปสั้นๆ คือ

(1). เงื่อนไขของการเข้าครอบครองวงโคจร (หรือชั้นย่อย) ของอิเล็กตรอนในอะตอม มี 3 ข้อ คือ

1. ต้องเป็นไปตามหลักการกีดกันของเพาลี (Pauli exclusion) ที่ว่า ไม่มีอิเล็กตรอน 2 ตัวในอะตอมหนึ่งอาจมีชุดของเลขควอนตัม n, l, l_z, s_z เดียวกันได้

2. อิเล็กตรอนมีแนวโน้มที่จะครอบครองวงโคจรที่มีระดับพลังงานต่ำสุดเท่าที่จะเป็นไปได้ก่อนเป็นอันดับแรก ซึ่งพบว่าพลังงานของการโคจรของอิเล็กตรอนสำหรับอะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว จะมีค่าเพิ่มขึ้นตามการเพิ่มขึ้นของค่า n และ l คือ

$$1s < 2s < 2p < 3s < 3p < 4s < 3d < 4p < 5s < 4d \dots, \quad (2.35)$$

$$\text{แต่ละวงโคจรสามารถมีอิเล็กตรอนได้สูงสุด} = 2(2l + 1) \quad (2.36)$$

3. หลักการของฮุนด์ (Hund's principle) มีว่า อิเล็กตรอนต่างๆ มีแนวโน้มที่จะครอบครองวงโคจรที่มีสภาพดีเจนเนอเรท (degenerate) ของวงโคจร n, l เดียวกันด้วยสปินแบบขนาน
- (2). อิเล็กตรอนเหล่านี้สามารถเปลี่ยนสถานะ (transitions) ได้เป็นไปตามกฎการเลือก เมื่อมีแรงหรือพลังงานภายนอกมากระทำต่อระบบอะตอม แบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

1. กฎการเลือกของระบบอะตอมที่มีอิเล็กตรอน 1 ตัว (H-atom และ H-like atom) คือ

$$\Delta n = \text{ค่าใดๆ}, \Delta l = \pm 1 \text{ เท่านั้น}, \text{ และ } \Delta j = 0, \pm 1 \quad (2.37)$$

2. กฎการเลือกของระบบอะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว [หรืออะตอมที่มีอิเล็กตรอนวาเลนซ์ (valence electrons) ตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป] คือ

$$\Delta n = \text{ค่าใดๆ}, \Delta S = 0, \Delta L = \pm 1, \text{ และ } \Delta J = 0, \pm 1 \quad (2.38)$$

ชั้นหลัก	ชั้นย่อย	จำนวนสูงสุดของอิเล็กตรอน ที่แต่ละชั้นย่อย	จำนวน อิเล็กตรอนรวม
P	6p	6	86
	5d	10	
	4f	14	
	6s	2	
O	5p	6	54
	4d	10	
	5s	2	
N	4p	6	36
	3d	10	
	4s	2	
M	3p	6	18
	3s	2	
L	2p	6	10
	2s	2	
K	1s	2	2

รูปที่ 2-2 แบบจำลองโครงสร้างความเป็นไปได้ในการครอบครองวงโคจรของอิเล็กตรอนในอะตอม

พฤติกรรมของอิเล็กตรอนวาเลนซ์ที่เกิดขึ้นในอะตอมเป็นตัวบอกสถานะของทั้งระบบอะตอม ซึ่งพิจารณาได้จากโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนในอะตอม นั่นคือ ถ้าการเรียงตัวของอิเล็กตรอนเป็นแบบ closed shell จะทำให้โมเมนตัมเชิงมุมรวม (total angular momentum) มีค่าเท่ากับศูนย์ ($J = 0$) เมื่อ closed shell หมายถึงชั้นหลักที่กำหนดด้วยชุดของเลขควอนตัม n และ l มีอิเล็กตรอนครอบครองอยู่เต็ม ดังรูปที่ 2-2 จึงทำให้อิเล็กตรอนใน closed shell มีเสถียรภาพ และเกิดการเปลี่ยนสถานะได้ยาก ดังนั้น อิเล็กตรอนที่อยู่ในส่วนของ closed shell [หรือแกนอะตอม (atomic core)] จึงไม่แสดงบทบาทที่สำคัญหรือความหมาย

ใดๆ ในทางฟิสิกส์แก่ระบบอะตอม และถ้าอะตอมใดๆ มีอิเล็กตรอนไม่เต็มชั้นหลัก จะส่งผลให้โมเมนต์เชิงมุมรวมของอิเล็กตรอนทั้งหมดในอะตอมมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จะถือว่าเป็นผลเนื่องมาจากอิเล็กตรอนส่วนที่เกิน closed shell หรือรู้จักกันในชื่อ อิเล็กตรอนวาเลนซ์ ซึ่งอิเล็กตรอนวาเลนซ์เหล่านี้ไม่มีเสถียรภาพจึงเป็นเหตุให้มันเกิดการเปลี่ยนสถานะหรือวงโคจรได้ง่าย ดังนั้น อาจกล่าวว่า สเปกตรัมของอะตอมมีที่มาจาก การเปลี่ยนสถานะการโคจรของอิเล็กตรอนวาเลนซ์ เมื่อมีพลังงานภายนอกมากระตุ้น

จากที่กล่าวมา เราสามารถอธิบายสถานะหรือคุณสมบัติของอะตอมแยกเป็น 3 กรณี คือ (1). การเขียน electronic configuration ของอะตอมที่สถานะพื้น (2). การเขียน electronic configuration ของอะตอมที่สถานะกระตุ้น (3). การเขียนสถานะของอะตอมจากการพิจารณาอิเล็กตรอนวาเลนซ์

(1). การเขียน Electronic configuration ของอะตอมที่สถานะพื้น

สถานะพื้น (ground state) ของอะตอม เป็นสถานะของอะตอมที่ไม่ได้อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามพลังงานภายนอก และการเรียงตัวของอิเล็กตรอนทั้งหมดในอะตอมสามารถแสดงได้ด้วยการเขียน ground state electronic configuration ภายใต้เงื่อนไขของการเข้าครอบครองวงโคจรของอิเล็กตรอนจำนวน 3 ข้อข้างต้น คือ 1. หลักการกีดกันของเพาลี 2. อิเล็กตรอนมีแนวโน้มที่จะครอบครองวงโคจรที่มีระดับพลังงานต่ำสุดเท่าที่จะเป็นไปได้ก่อนเป็นอันดับแรก และ 3. กฎของฮุนด์ เช่น

H^1 (Hydrogen มีอิเล็กตรอนทั้งหมด 1 ตัว) มี configuration คือ $1s^1$

He^2 (Helium มีอิเล็กตรอนทั้งหมด 2 ตัว) มี configuration คือ $1s^2$ (2.39)

Ne^{10} (Neon มีอิเล็กตรอนทั้งหมด 10 ตัว) มี configuration คือ $1s^2 2s^2 2p_x^2 2p_y^2 2p_z^2$

เมื่ออักษรตัวพิมพ์เล็กภาษาอังกฤษ $s, p, d, f, g, \dots$ แทนวงโคจรหรือชั้นย่อยของอิเล็กตรอนและมีความสัมพันธ์กับรูปร่างของวงโคจรของอิเล็กตรอนตัวที่ครอบครองอยู่ และมีค่าเท่ากับเลขควอนตัมออร์บิทัล $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ตามลำดับ ตัวเลขที่อยู่หน้าอักษรวงโคจรคือเลขควอนตัมหลัก (n) ซึ่งมีค่าได้เฉพาะ $n = 1, 2, 3, \dots$ ตัวเลขยกขึ้นของอักษรวงโคจรคือจำนวนของอิเล็กตรอนที่อยู่ในวงโคจรนั้น (หรือ n, l นั้น) ซึ่งจำนวนอิเล็กตรอนสูงสุดที่อยู่ในแต่ละชั้นย่อย มีค่าเท่ากับสมการ (2.36) คือ $2(2l+1)$ เมื่อแฟกเตอร์ $(2l+1)$ แทนจำนวน l_z ตามค่า l นั่นคือ ค่าที่เป็นไปได้ของ l_z คือ $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ มีทั้งหมดจำนวน $2l+1$ ค่า ส่วนแฟกเตอร์ 2 หน้าวงเล็บเป็นจำนวน s_z ที่มีได้ของอิเล็กตรอน นั่นคือ s_z มี 2 ค่า คือ $+1/2$ หรือ $-1/2$ ดังนั้น แต่ละวงโคจร $s, p, d, f, \dots$ จะมีจำนวนอิเล็กตรอนได้สูงสุด เท่ากับ $2, 6, 10, 14, \dots$ ตามลำดับ เมื่อแทนค่า l ลงไปในสูตร $2(2l+1)$ ตามรูปที่ 2-2 และให้สังเกตคอลัมน์ที่ 4 ซึ่งเป็นจำนวนอิเล็กตรอนรวมในอะตอมใดๆ พบว่า ตัวเลขเหล่านี้เป็นเลขเชิงกล (Magic number) มีค่าตรงกันกับจำนวนอิเล็กตรอนของอะตอมในธาตุหมู่ 8 ซึ่งเป็นก๊าซเฉื่อย (inert gases) โดยมีคุณสมบัติ คือ (1). เกิดปฏิกิริยาในทางเคมียาก และ (2). เป็นอะตอมที่ถูกทำให้แตกตัวหรือไอออนไนซ์ (ionize) ยาก และจำนวนรวมของอิเล็กตรอนนี้ยังเป็นค่าที่บ่งบอกถึงการมีช่องว่าง (gaps) ของพลังงานระหว่างชั้นหลัก

(2). การเขียน Electronic configuration ของอะตอมที่สถานะกระตุ้น

สถานะกระตุ้น (excited state) ของอะตอม เป็นสถานะของอะตอมที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามพลังงานภายนอก ดังนั้น จะไม่สามารถเขียน electronic configuration ได้แน่นอนในส่วนของอิเล็กตรอนที่

อยู่นอก closed shell เพราะขึ้นอยู่กับปริมาณพลังงานจากภายนอกจะมากหรือน้อย เพราะถ้าพลังงานภายนอกมากก็จะทำให้อิเล็กตรอนใน configuration ไปอยู่ในลำดับวงโคจร (n, l) ที่สูงขึ้น แต่เงื่อนไขของการครอบครองวงโคจรของอิเล็กตรอนต้องปฏิบัติตามหลักการกีดกันของเพาลี กฎของฮุนด์ และกฎการเลือก

(3). การเขียนสถานะของอะตอมจากการพิจารณาอิเล็กตรอนวาเลนซ์

สถานะของอะตอมถูกกำหนดจากอิเล็กตรอนวาเลนซ์ แต่เมื่อเรามองในระดับอะตอม ดังนั้น ผลลัพธ์ของปริมาณทางฟิสิกส์ ได้แก่ โมเมนตัมเชิงมุม จึงต้องคิดผลลัพธ์ของทั้งอะตอม และการเปลี่ยนสถานะก็ต้องเป็นมุมมองของการเปลี่ยนสถานะของทั้งอะตอม เช่น จากอะตอมที่อยู่ในสถานะหนึ่งไปสู่อีกสถานะหนึ่ง ซึ่งสัญลักษณ์ทางสเปกโตรสโคปีที่ใช้แทนสถานะอะตอมคือ เทอร์มซิมโบล (Term symbol) นอกจากนี้มันยังเป็นสัญลักษณ์ที่ใช้กำกับวงโคจรที่อิเล็กตรอนครอบครองอยู่ แต่ถ้าต้องการสถานะของอะตอมแบบละเอียด ก็ให้เขียน configuration ไว้ตอนหน้าของเทอร์มซิมโบลด้วย

นิยาม เทอร์มซิมโบลของสถานะอะตอมเฉพาะใดๆ คือ

$$\text{Term symbol} = {}^{2S+1}L_J \quad (2.40)$$

และ

$$2S+1 = \text{Multiplicity} \quad (2.41)$$

เมื่อ J = เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมรวม (total angular momentum quantum number), L = เลขควอนตัมออร์บิทัลรวม (total orbital quantum number), และ S = เลขควอนตัมสปินรวม (total spin quantum number) ซึ่ง $L = S, P, D, F, G, \dots$ เป็นอักษรวงโคจรแทนเลขควอนตัมออร์บิทัลรวมหรือมีค่าเท่ากับ 0, 1, 2, 3, 4, ... ตามลำดับ มีข้อสังเกตว่า ถ้าเป็นกรณีสถานะของอะตอมสำหรับอิเล็กตรอนหลายตัวเราจะใช้อักษรวงโคจร L เป็นตัวพิมพ์ใหญ่ แต่ถ้าเป็นกรณีสถานะของอะตอมสำหรับอิเล็กตรอนตัวเดียวก็ให้ใช้อักษรวงโคจรเป็นตัวพิมพ์เล็กคือ $L = s, p, d, f, g, \dots$ ซึ่งเท่ากับ 0, 1, 2, 3, 4, ... ตามลำดับ และสมการ (2.41) คือ มัลติพลิตี (multiplicity) เป็นตัวบอกถึงการแยกสถานะที่เนื่องมาจากการแยกของค่า j หรือ j -splitting ซึ่งมีจำนวนเท่ากับเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมรวม $J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|$ ที่เป็นไปได้ พบว่า ถ้ากรณี 1 อิเล็กตรอน $S = 1/2$ เราจะได้ มัลติพลิตี = 2 หรือเกิดการแยกสถานะเป็นสองระดับที่เรียกว่า doublet state ยกเว้นที่วงโคจร $l = 0$, มีกฎเกณฑ์ของมัลติพลิตีที่ 2 ข้อ คือ 1). สำหรับสถานะที่ $L \geq S$ จะได้ มัลติพลิตี = $2S + 1$ เท่ากับจำนวนที่แท้จริงของระดับพลังงานที่เกิดจากการแยกด้วยค่า J ที่แตกต่างกัน, 2). สำหรับสถานะที่ $L < S$ พบว่า จำนวนของ J ไม่เท่ากับมัลติพลิตี = $2S + 1$ ดังนั้น จึงแทนสูตรเป็น (จำนวนของ J) = $2L + 1$ สรุปว่า ค่ามัลติพลิตี = $2S + 1$ เป็นจำนวนของสถานะที่มี J แตกต่างกัน นั่นคือ

- กรณีระบบอะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัวคือ

$$2S+1=3 \quad \text{ถ้า } S=1 \quad \text{ได้ Triplet states}$$

$$2S+1=1 \quad \text{ถ้า } S=0 \quad \text{ได้ Singlet states}$$

- กรณีระบบอะตอมที่มีอิเล็กตรอน 1 ตัว คือ

$$2S+1=2 \quad \text{ถ้า } S=1/2 \quad \text{ได้ Doublet states}$$

และความสัมพันธ์ระหว่างเลขควอนตัมและโมเมนตัมเชิงมุมที่สอดคล้องกันเหล่านี้ คือ

- (1). โมเมนตัมเชิงมุมออร์บิตอลรวม (total orbital angular momentum) $\vec{L} = \sqrt{L(L+1)}$ เมื่อ $\sum \vec{l}_i = \vec{L}$
และเลขควอนตัมออร์บิตอลรวม

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2| \quad (2.42)$$

- (2). โมเมนตัมเชิงมุมสปินรวม (total spin angular momentum) $\vec{S} = \sqrt{S(S+1)}$ เมื่อ $\sum \vec{s}_i = \vec{S}$ และ
เลขควอนตัมสปินรวม

$$\begin{aligned} S &= \sum s_i, \sum s_i - 1, \sum s_i - 2, \dots \\ &= \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, \frac{1}{2} \quad \text{สำหรับ } N \text{ เป็นเลขคี่} \\ &= \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, 0 \quad \text{สำหรับ } N \text{ เป็นเลขคู่} \end{aligned} \quad (2.43)$$

- (3). โมเมนตัมเชิงมุมรวม (total angular momentum) $\vec{J} = \sqrt{J(J+1)}$ เมื่อ $\sum \vec{j}_i = \vec{J}$; $\vec{l}_i + \vec{s}_i = \vec{j}_i$ และ
เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมรวม

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S| \quad (2.44)$$

สถานะของอะตอมไฮโดรเจน

เริ่มจากพิจารณาว่า H^1 มีอิเล็กตรอน 1 ตัว ในอะตอม เพราะฉะนั้น สปินรวมหรือเลขควอนตัมสปินรวม $S = s = 1/2$, มัลติพลิซิตี $= 2S + 1 = 2(1/2) + 1 = 2$ ซึ่งหมายถึง เกิดการแยกของวงโคจรรอบเป็น 2 วงโคจร หรือทำให้ J แยกออกเป็น 2 ค่า เรียกว่า doublet states, มี ground state electronic configuration เป็น $1s^1$, มีเงื่อนไขของการเปลี่ยนสถานะสำหรับอิเล็กตรอน 1 ตัว ตามสมการ(2.37) และเนื่องจากเป็นกรณีของอิเล็กตรอน 1 ตัว จึงทำให้การครอบครองวงโคจรไม่ขัดกับหลักการกีดกันของเพาลี เพราะฉะนั้น การเขียนเทอร์มิมโบลของสมการ(2.40) ซึ่งพิจารณาได้ 2 กรณี คือ (1).กรณี $L < S$ ซึ่งให้จำนวนการแยกของ j เท่ากับ $2L + 1$, และ (2).กรณี $L \geq S$ เมื่อ $L =$ สัญลักษณ์ของเลขควอนตัมออร์บิตอล $s, p, d, f, \dots$ และ $S =$ เลขควอนตัมสปินรวม

- (1). กรณี $L < S$ เนื่องจากว่าสปินรวม $S = 1/2$ ดังนั้น เลขควอนตัมออร์บิตอลรวมที่สอดคล้องกับกรณีนี้คือ $L = 0$ (ซึ่งเท่ากับวงโคจร s เพราะระบบมีอิเล็กตรอนเพียง 1 ตัว) นั่นคือ ที่วงโคจร ns เมื่อ $n \geq 1$ และ $l_i = 0$ (หรือวงโคจร s) จะได้ $L = \sum l_i = 0$ ดังนั้น $J = L + S = 0 + 1/2 = 1/2$ ตามสมการ (2.44) ซึ่งกรณีนี้ J มีได้ค่าเดียวตามสูตร $2L + 1$ สำหรับกรณี $L < S$ เพราะฉะนั้น เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ(2.40) จะได้เทอร์มิมโบลเท่ากับ $^2S_{1/2}$ สำหรับวงโคจร ns

- (2). กรณี $L \geq S$

- ที่วงโคจร np เมื่อ $n \geq 1$ และ $l_i = 1$ (หรือวงโคจร p) จะได้ $L = \sum l_i = 1$ ดังนั้น $J = L + S$, $L + S - 1 = 1 + 1/2, 1 + 1/2 - 1 = 3/2, 1/2$ สำหรับกรณีนี้จะได้จำนวนของ J เท่ากับค่าของมัลติพลิซิตี $= 2$ เพราะฉะนั้น ที่วงโคจร np จะได้เทอร์มิมโบลเท่ากับ $^2P_{3/2}$ และ $^2P_{1/2}$
- ที่วงโคจร nd เมื่อ $n \geq 1$ และ $l_i = 2$ (หรือวงโคจร d) จะได้ $L = \sum l_i = 2$ ดังนั้น $J = L + S$, $L + S - 1 = 2 + 1/2, 2 + 1/2 - 1 = 5/2, 3/2$ เพราะฉะนั้น ที่วงโคจร nd จะได้เทอร์มิมโบลเท่ากับ $^2D_{5/2}$ และ $^2D_{3/2}$

- ที่วงโคจร nf เมื่อ $n \geq 1$ และ $l_i = 3$ (หรือวงโคจร f) จะได้ $L = \sum l_i = 3$ ดังนั้น $J = L + S, L + S - 1$
 $= 3 + 1/2, 3 + 1/2 - 1 = 7/2, 5/2$ เพราะฉะนั้น จะได้เทอร์มิมโบลเท่ากับ $^2F_{7/2}$ และ $^2F_{5/2}$
- และการคำนวณสำหรับวงโคจร $ng, \dots$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน
 ดังนั้น เส้นสเปกตรัมคู่คี่หรือสว่างที่เกิดขึ้นได้ตามกฎการเลือกในการเปลี่ยนสถานะคือ

$$\begin{aligned}
 &^2F_{7/2} \longrightarrow ^2D_{5/2} \\
 &^2F_{5/2} \longrightarrow ^2D_{5/2}, ^2D_{3/2} \\
 &^2D_{5/2} \longrightarrow ^2P_{3/2} \\
 &^2D_{3/2} \longrightarrow ^2P_{3/2}, ^2P_{1/2} \\
 &^2P_{3/2} \longrightarrow ^2S_{1/2} \\
 &^2P_{1/2} \longrightarrow ^2S_{1/2} \quad \text{เป็นต้น}
 \end{aligned}$$

ผังรูปที่ 2-3 และสำหรับเส้นสเปกตรัมสว่างที่เป็น เส้นบาลเมอร์ (Balmer lines) ที่เกิดจากการเปลี่ยนสถานะจากวงโคจรที่ $n = 3$ ไปสู่ $n = 2$ คือ

$$\begin{aligned}
 3s \ ^2S_{1/2} &\rightarrow 2p \ ^2P_{3/2}, \text{ หรือ } 2p \ ^2P_{1/2} \\
 3d \ ^2D_{5/2} &\rightarrow 2p \ ^2P_{3/2} \\
 3d \ ^2D_{3/2} &\rightarrow 2p \ ^2P_{3/2}, \text{ หรือ } 2p \ ^2P_{1/2}
 \end{aligned}$$

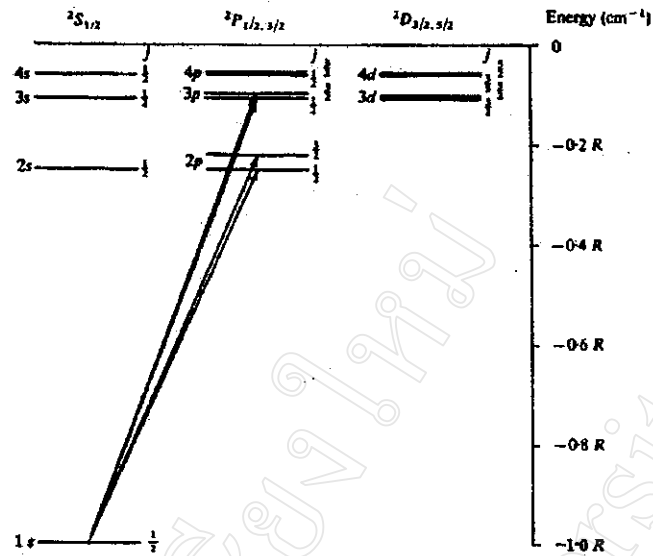
มีข้อสังเกตว่า การแยกของวงโคจร อันเนื่องมาจากการแยกของ j หรืออันตรกิริยา LS สำหรับการศึกษาเส้นสเปกตรัมนั้นเป็นการยากที่จะมองเห็นเส้นเหล่านี้แยกกัน เพราะว่า ผลต่างของพลังงานในการเปลี่ยนสถานะมีค่าน้อยมาก ดังนั้น สำหรับงานวิจัยของผู้เขียนที่เครื่องมือซีซีดีสเปกโตรกราฟ สำหรับเกรตติงขนาด 600 ช่องต่อมิลลิเมตร มีกำลังการแยกสเปกตรัมต่ำ จึงพิจารณาผลของเส้นสเปกตรัมเหล่านั้นจากการเปลี่ยนสถานะระหว่างเลขควอนตัมหลักก็เพียงพอ และสำหรับอะตอมไฮโดรเจนในวงโคจร s มีฟังก์ชันคลื่น คือ

$$\psi_{ns} = f\left(\frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right)$$

และจากสมการชเรอดิงเงอร์จะได้พลังงานคือ

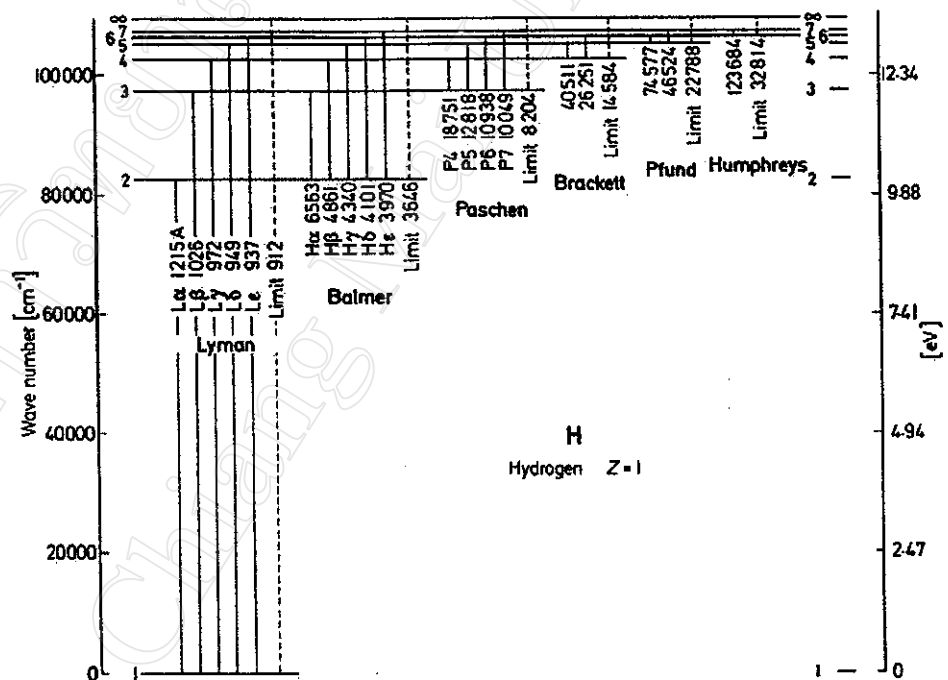
$$\begin{aligned}
 E_n &= -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} \\
 &= -\frac{R_H hc}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

เมื่อ E_n มีหน่วยเป็นอิเล็กตรอนโวลต์ (eV), R_H เป็นค่าคงที่ของริดเบิร์ก (Rydberg constant), h เป็นค่าคงที่ของพลังค์, c เป็นความเร็วแสง, และ m_e, e เป็นมวล และค่าประจุของอิเล็กตรอน ตามลำดับ ซึ่งค่าเชิงตัวเลขของค่าคงที่เหล่านี้ดูจากภาคผนวก จ และวงโคจร $p, d, \dots$ มีพลังงานเดียวกับวงโคจร s (สำหรับไฮโดรเจนเท่านั้น) และมีผลการวัดทางการทดลองของค่าความยาวคลื่นของการเปลี่ยนสถานะ (ที่สอดคล้องกับ $\lambda = hc/\Delta E$) ที่น่าเชื่อถือและเป็นค่ามาตรฐาน ซึ่งผู้เขียนได้นำมาใช้อ้างอิง ได้แก่ ข้อมูลในภาคผนวก ข และ ข้อมูลในรูปที่ 2-4



รูปที่ 2-3 ระดับพลังงานต่ำของอะตอมไฮโดรเจน รวมถึงผลกระทบที่เกิดจาก j-splitting

[Banwell, 1972]



รูปที่ 2-4 แผนภาพโกรเทรียน (Grotrian diagrams) H ของ Moore และ Merrill ในปี พ.ศ. 2511

[Lang, 1980]

สถานะของอะตอมฮีเลียม

เริ่มจากการพิจารณาว่า He^2 มีอิเล็กตรอน 2 ตัว และผลอันเนื่องมาจากสปินของอิเล็กตรอน 2 ตัวนี้ทำให้ได้สปินรวมของสมการ(2.43) สำหรับ N เป็นเลขคู่ เท่ากับ

$$S = \sum s_i, \sum s_i - 1, \sum s_i - 2, \dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1, \dots = 1, 0$$

เมื่อคิดเฉพาะค่าบวกของสปินรวมเท่านั้น เห็นว่า S มีความเป็นไปได้ 2 ค่า คือ 1 และ 0 ซึ่งยอมเข้าใจร่วมกันว่า $S=1$ เกิดจากการเสริมกันหรือสปินขนานกันและมีทิศทางเดียวกัน และ $S=0$ เกิดจากการหักล้างกันหรือสปินขนานกันและมีทิศทางสวนกัน จากการเปรียบเทียบค่า S ว่ามากหรือน้อย

(1).กรณีสปินรวม $S=1$ เมื่อแทนในสมการ(2.41) จะได้ค่ามัลติพลิกิตี $2S+1=2(1)+1=3$ ซึ่งหมายถึงจะได้ J ที่มีค่าต่างกันจำนวน 3 ค่า เรียกว่า triplet states หรือเกิดการแยกของวงโคจรออกเป็น 3 วงโคจร ดังรูปที่ 2-5 (ด้านขวา)

(2).กรณีสปินรวม $S=0$ จะได้มัลติพลิกิตี $= 2S+1=2(0)+1=1$ นั่นคือ J มี 1 ค่า เรียกว่า singlet states หรือไม่เกิดการแยกของวงโคจร ดังรูปที่ 2-5 (ด้านซ้าย)

พิจารณาการเขียนระดับของวงโคจร $1s^2, 1s2s, 1s2p, \dots$ ที่สถานะต่างๆ ในรูปที่ 2-5 โดยที่แต่ละระดับที่เห็นในรูป แทนสถานะของทั้งอะตอม และสมมติว่ามีอิเล็กตรอน 1 ตัว อยู่ในวงโคจร $1s$ เสมอ ดังนั้น จึงมีอิเล็กตรอนเพียงตัวเดียวที่สามารถเปลี่ยนสถานะไปสู่วงโคจรอื่น จึงทำให้ผลลัพธ์ที่แสดงออกมาของอะตอมฮีเลียมเกิดจากอิเล็กตรอนเพียงตัวเดียว และมีเงื่อนไขของการเปลี่ยนสถานะเป็นไปตามกฎการเลือกของระบบอะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว ตามสมการ(2.38) นั่นคือ $\Delta n = \text{ค่าใดๆ}$, $\Delta S = 0$, $\Delta L = \pm 1$, $\Delta J = 0, \pm 1$ เมื่อ $\Delta n = \text{ค่าใดๆ}$ ซึ่งอาจมีค่าเป็น $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ และ $\Delta S = 0$ เมื่อ $S = \text{เลขควอนตัมสปินรวม}$ ดังนั้น กรณีฮีเลียมที่ $S=1$, และ 0 จึงทำให้การพิจารณาสถานะของอะตอมฮีเลียมถูกแยกออกเป็น 2 กลุ่ม ด้านซ้ายและขวา ตามรูปที่ 2-5 คือ (1). กลุ่มของ singlet state ($S=0$) สำหรับสปินขนานที่มีทิศทางสวนกัน, (2). กลุ่มของ triplet state ($S=1$) สำหรับสปินขนานที่มีทิศทางเดียวกัน และจากกฎการเลือก $\Delta S = 0$ หมายความว่า จะไม่มีการเปลี่ยนสถานะข้ามไปมา ระหว่าง singlet และ triplet ได้

พิจารณาวงโคจรที่เป็นไปได้ของสถานะใดๆ ดังนี้ คือ

(1).กรณี singlet states หรือ singlet levels พบว่า สปินเป็นแบบขนานที่มีทิศทางสวนกัน ดังนั้น อิเล็กตรอนทั้งคู่จึงสามารถอยู่ที่ n, l เดียวกันได้ตามหลักการกีดกันของเพาลี (n, l, l_z, s_z) นั่นคือ $(1, 0, 0, +1/2)$ และ $(1, 0, 0, -1/2)$ ดังนั้น จึงเขียน singlet level เริ่มจาก $1s^2$ ได้ และ ลำดับต่อไปก็จะเป็น $1s2s, 1s2p, \dots$

(2).กรณี triplet states หรือ triplet levels พบว่า สปินเป็นแบบขนานที่มีทิศทางเดียวกัน ดังนั้น ตามหลักของเพาลี จึงทำให้อะตอมไม่สามารถมีสถานะที่ $1s^2$ ได้ จึงต้องเริ่มที่ $1s2s, 1s2p, \dots$

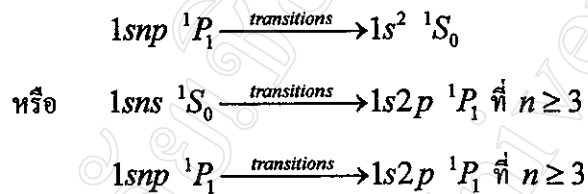
ต่อไปทำการเขียนเทอร์มซิมโบล $^{2S+1}L_J$ ทั้งสำหรับกรณี $S=0$ และ $S=1$ คือ

(1). กรณี singlet state (สปินรวม $S=0$) ได้มัลติพลิกิตี $= 2S+1=2(0)+1=1$ และมี J ได้ 1 ค่า เท่ากันกับค่ามัลติพลิกิตีที่คำนวณได้ ตามเงื่อนไขที่ $L \geq S$ วงโคจรที่มีได้คือ

- $L = \sum l_i = l_1 + l_2$ ที่ $1s^2, 1sns, \dots$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $l_i = 0$ (วงโคจร s) เพราะฉะนั้น เลขควอนตัมออร์บิตอลรวม L ของการรวม l_i ที่วงโคจร s ใดๆ เท่ากับ $L=0+0=0$ หรือวงโคจรรวม S ดังนั้น จากสมการ(2.44) จะได้ $J = L + S = 0 + 0 = 0$ เพราะฉะนั้น ที่วงโคจร $1s^2, 1sns, \dots$ จะได้เทอร์มซิมโบลเท่ากับ 1S_0

- L ที่ $1snp$ ($n \geq 2$) จะได้ $L = l_1 + l_2 = 0 + 1 = 1$ หรือวงโคจรรวม P เมื่อ $l_1 = 0$ (วงโคจร $1s$), $l_2 = 1$ (วงโคจร np) ดังนั้น $J = L + S = 1 + 0 = 1$ เพราะฉะนั้น ที่วงโคจร $1snp$ จะได้เทอร์มิมโบลเท่ากับ 1P_1
- L ที่ $1snd$ ($n \geq 3$) จะได้ $L = l_1 + l_2 = 0 + 2 = 2$ หรือวงโคจรรวม D เมื่อ $l_1 = 0$ (วงโคจร $1s$), $l_2 = 2$ (วงโคจร nd) ดังนั้น $J = L + S = 2 + 0 = 2$ เพราะฉะนั้น ที่วงโคจร $1snd$ จะได้เทอร์มิมโบลเท่ากับ 1D_2
- และคำนวณในลักษณะเดียวกันสำหรับสถานะอื่นๆ

แล้วนำเทอร์มิมโบล 1S_0 , 1P_1 , 1D_2 , ... ไปเขียนไว้ด้านบนของ singlet levels ดังรูปที่ 2-5 แล้วพิจารณากฎการเลือก พบว่า เส้นสเปกตรัมสว่างที่สามารถเกิดขึ้นได้คือ

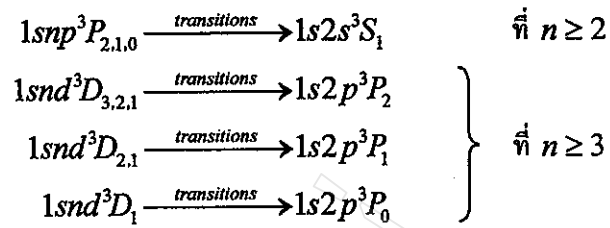


เป็นต้น โดย configuration ที่อยู่ด้านหน้าเทอร์มิมโบล แสดงไว้เพื่อให้รู้ถึงตำแหน่งการครอบครองของอิเล็กตรอนในวงโคจรนั้นๆ

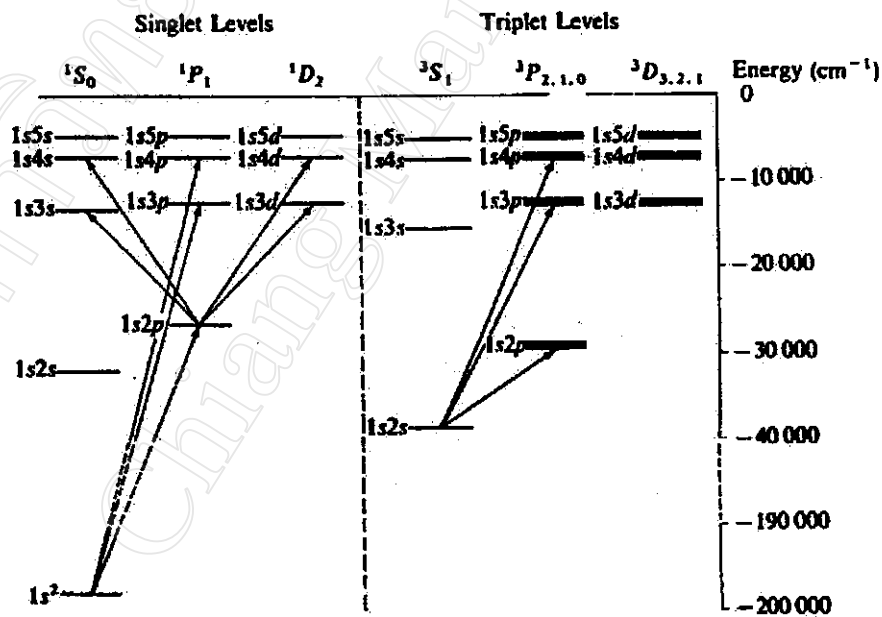
- (2). กรณี Triplet state ($S = 1$) ได้มัลติพลิกิตี $= 2S + 1 = 2(1) + 1 = 3$ และมี J ได้ 3 ค่า เท่ากันกับค่ามัลติพลิกิตีที่คำนวณได้ สำหรับเงื่อนไขที่ $L \geq S$ ยกเว้น กรณีที่ $L = 0$ (ซึ่งเป็นเลขควอนตัมออร์บิตอลรวมหรือวงโคจรรวม S) หรือเงื่อนไขที่ $L < \text{สปินรวม} S$ ดังนั้น เงื่อนไขหลังนี้จึงให้จำนวนของ J เท่ากับ $2L + 1$ ค่า ซึ่งได้ J จำนวน 1 ค่า วงโคจรที่มีได้ คือ

- $L = \sum l_i = l_1 + l_2$ ที่ $1sns$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $l_1 = 0$ (วงโคจร s) เพราะฉะนั้น เลขควอนตัมออร์บิตอลรวม L ของการรวม l_i ที่วงโคจร s ใดๆ เท่ากับ $L = 0 + 0 = 0$ หรือ วงโคจรรวม S ซึ่งกรณีนี้เห็นว่า $L < \text{สปินรวม} S$ หรือ $(L=0) < (S=1)$ ฉะนั้น จำนวนของ J เท่ากับ $2L + 1 = 2(0) + 1 = 1$ ดังนั้น $J = L + S = 0 + 1 = 1$ เพราะฉะนั้น ที่วงโคจร $1sns$ จะได้เทอร์มิมโบลเท่ากับ 3S_1
- L ที่ $1snp$ ($n \geq 2$) จะได้ $L = l_1 + l_2 = 0 + 1 = 1$ หรือวงโคจรรวม P เมื่อ $l_1 = 0$ (วงโคจร $1s$), $l_2 = 1$ (วงโคจร np) มี J 3 ค่า เพราะว่า $L \geq S$ ดังนั้น $J = L + S, L + S - 1, L + S - 2 = 1 + 1, 1 + 1 - 1, 1 + 1 - 2 = 2, 1, 0$ ตามลำดับ เพราะฉะนั้น ที่วงโคจร $1snp$ จะได้เทอร์มิมโบลเท่ากับ $^3P_{2,1,0}$
- L ที่ $1snd$ ($n \geq 3$) จะได้ $L = l_1 + l_2 = 0 + 2 = 2$ หรือวงโคจรรวม D เมื่อ $l_1 = 0$ (วงโคจร $1s$), $l_2 = 2$ (วงโคจร nd) มี J 3 ค่า เพราะว่า $L \geq S$ ดังนั้น $J = L + S, L + S - 1, L + S - 2 = (2 + 1), (2 + 1) - 1, (2 + 1) - 2 = 3, 2, 1$ เพราะฉะนั้น ที่วงโคจร $1snd$ จะได้เทอร์มิมโบลเท่ากับ $^3D_{3,2,1}$
- และการคำนวณสำหรับวงโคจรอื่นๆ ก็พิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

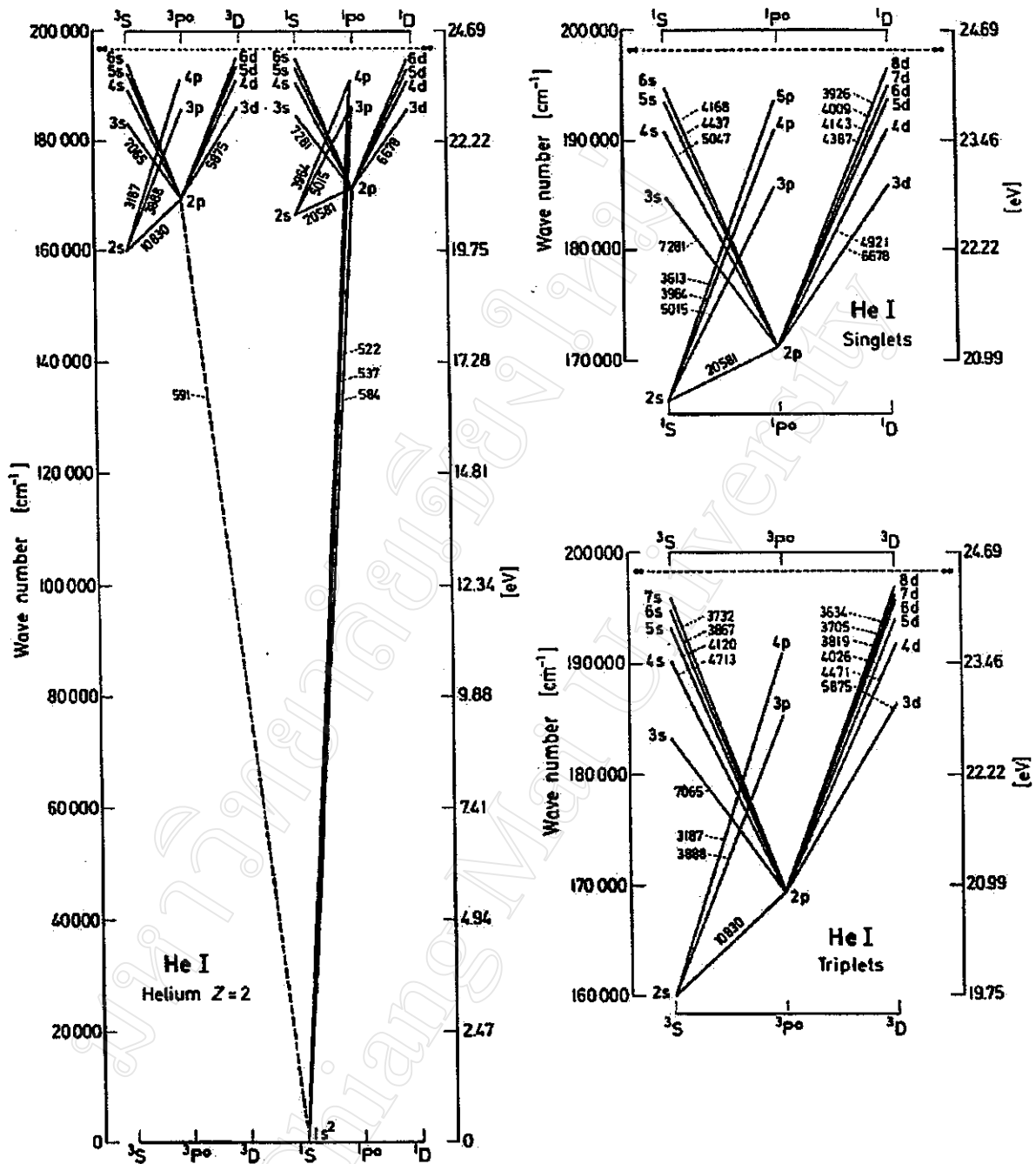
แล้วนำเทอร์มิมโบล 3S_1 , $^3P_{2,1,0}$, $^3D_{3,2,1}$, ... ไปเขียนไว้ด้านบนของ triplet levels ดังรูปที่ 2-5 แล้วมาพิจารณากฎการเลือก พบว่า สำหรับเส้นสเปกตรัมสว่างที่สามารถเกิดขึ้นได้คือ



ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้ ดังรูปที่ 2-5 และมีข้อสังเกตเช่นเดียวกับกรณีไฮโดรเจนว่า การแยกของวงโคจร อันเนื่องมาจากการแยกของ j หรืออันตรกิริยา LS สำหรับการศึกษาเส้นสเปกตรัมนั้นเป็นการยากที่จะมองเห็นเส้นเหล่านี้แยกกัน เพราะว่า ผลต่างของพลังงานในการเปลี่ยนสถานะมีค่าน้อยมาก ดังนั้น จึงพิจารณาผลของเส้นสเปกตรัมที่เกิดจากการเปลี่ยนสถานะระหว่างเลขควอนตัมหลักก็เพียงพอ และสำหรับอะตอมฮีเลียม มีผลการศึกษาและทดลองไว้เป็นที่น่าเชื่อถือ ซึ่งผู้เขียนนำมาใช้อ้างอิง ได้แก่ ข้อมูลในภาคผนวก ข และข้อมูลในรูปที่ 2-6



รูปที่ 2-5 ระดับพลังงานของฮีเลียมและแสดงการเปลี่ยนสถานะระหว่างบางวงโคจร [Banwell, 1972]



รูปที่ 2-6 แผนภาพโคเรชัน He I ของ Moore และ Merrill ในปี พ.ศ. 2511 [Lang, 1980]

2.2.5 สเปกตรัมของดาว

ประกอบด้วย 2.2.5.1 การเลื่อนคอปเปลอร์, และ 2.2.5.2 การเกิดของเส้นสเปกตรัมของดาว

2.2.5.1 การเลื่อนคอปเปลอร์

ในปี พ.ศ. 2385 นักฟิสิกส์ชาวออสเตรียชื่อ คริสเตียน คอปเปลอร์ (Christian Doppler) แสดงให้เห็นว่า แหล่งกำเนิดเสียงเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง (เช่นอากาศ) ความยาวคลื่นถูกบีบอัดในทิศด้านหน้า และถูกทำให้ขยายในทิศด้านหลัง การเปลี่ยนแปลงในความยาวคลื่นของชนิดคลื่นใดๆ มีสาเหตุจากการเคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิดหรือผู้สังเกต ถูกเรียกว่า การเลื่อนคอปเปลอร์ (Doppler shift) คอปเปลอร์ได้พิจารณาเหตุผลว่า ผลต่างระหว่างความยาวคลื่น λ_{obs} ที่สังเกตจากแหล่งกำเนิดเสียงที่เคลื่อนที่ และความยาวคลื่น

λ_{rest} ที่วัดในห้องปฏิบัติการจากแหล่งกำเนิดอ้างอิงที่อยู่นิ่ง มีความสัมพันธ์กับความเร็วในแนวเส้นสายตา (radial velocity) v_r ของแหล่งกำเนิดที่ผ่านตัวกลางมา คือ

$$\frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{rest}} = \frac{v_r}{v_s} \quad (2.46)$$

เมื่อ v_s คืออัตราเร็วของเสียงในตัวกลาง

สำหรับกรณีแสงที่มาจากดาวเดี่ยวๆ ที่ $v \ll c$ โดยเปลี่ยน v_s เป็น c (ความเร็วแสง) เราจะได้

$$\frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{rest}} = \frac{v_r}{c} \quad (2.47)$$

เมื่อ λ เป็นความยาวคลื่นของแสง

2.2.5.2 การเกิดของเส้นสเปกตรัมของดาว

ชนิดสเปกตรัมของดาวแบบฮาร์วาร์ด (Harvard) แบ่งตามตัวอักษร O B A F G K M ซึ่งเรียงลำดับตามอุณหภูมิจากดาวร้อนที่สุดสีน้ำเงินชนิด O ไปจนถึงดาวเย็นที่สุดสีแดงชนิด M แต่ละชนิดสเปกตรัมยังแบ่งเป็นชนิดย่อยๆ อีก 10 ลำดับ คือ O0, O1, O2, ..., O9 เป็นต้น โดย Annie Jump Cannon ในปี พ.ศ. 2444 ซึ่งคุณลักษณะ (characteristics) ในการจัดจำแนกชนิดสเปกตรัมของดาว ดังตารางที่ 2-1

ตารางที่ 2-1 การจำแนกชนิดสเปกตรัมของดาวแบบฮาร์วาร์ด

ชนิดสเปกตรัม	คุณลักษณะ
O	ดาวสีขาว-สีน้ำเงินที่ร้อนที่สุด มีจำนวนเส้นน้อย ให้เส้นดูดกลืน (บางครั้งเป็นเส้นสว่าง) แบบแรงของธาตุ HeII จึงทำให้เส้นดูดกลืนของ HeI มีความแรงมากกว่า
B	ดาวสีขาว-สีน้ำเงินที่ร้อน ให้เส้นดูดกลืน He I ที่แรงที่สุดที่ดาวชนิด B2 จึงทำให้เส้นดูดกลืน (บาลเมอร์) ของ HI มีความแรงมากกว่า
A	ดาวสีขาว ให้เส้นดูดกลืนบาลเมอร์ที่แรงที่สุดที่ดาวชนิด A0 และอ่อนลงในลำดับย่อย จึงทำให้เส้นดูดกลืนของ CaII มีความแรงมากกว่า
F	ดาวสีขาว-สีเหลือง ให้เส้นของ CaII แรงอย่างค่อยเป็นค่อยไปตามลำดับย่อย ขณะที่เส้นบาลเมอร์อ่อนลงอย่างค่อยเป็นค่อยไป มีเส้นดูดกลืนของธาตุหนักที่เป็นกลางทางไฟฟ้า (neutral metal lines) ได้แก่ FeI, CrI
G	ดาวสีเหลือง ให้ชนิดสเปกตรัมแบบดวงอาทิตย์ จึงทำให้เส้นของ CaII มีความแรงมากขึ้นอย่างค่อยเป็นค่อยไปตามลำดับย่อย และให้เส้นของ FeI และของธาตุหนักที่เป็นกลางทางไฟฟ้าอื่นๆ มีความแรงมากกว่า
K	ดาวสีส้มที่เย็น ให้เส้น H และ K ของธาตุ CaII ที่แรงที่สุดที่ดาวชนิด K0 และอ่อนลงตามลำดับย่อย สเปกตรัมที่เด่นๆ คือเส้นดูดกลืนของธาตุหนัก
M	ดาวสีแดงที่เย็นที่สุด สเปกตรัมที่เด่นๆ คือเส้นดูดกลืนของโมเลกุล โดยเฉพาะโมเลกุลไททาเนียมออกไซด์ [titanium oxide (TiO)] เส้นดูดกลืนของธาตุหนักที่เป็นกลางทางไฟฟ้าจะยังคงแรงอยู่

ในการจัดจำแนกชนิดของดาว สิ่งที่ต้องทราบ คือ (1) วงโคจรโคมีโอกาพบอิเล็กตรอนมากที่สุดของอะตอมของธาตุหนึ่ง, (2) มีจำนวนอะตอมเท่าไรที่สถานะหนึ่งๆ จากการเปรียบเทียบกับจำนวนอะตอมของธาตุอื่น ซึ่งต้องใช้วิชาทฤษฎีสถิติในการหาคำตอบ

สำหรับก๊าซที่อยู่ในระบบสมดุลเชิงความร้อน (thermal equilibrium) อนุภาคมีอัตราเร็วคงตัวและการกระจายตัวของอนุภาคเป็นแบบฟังก์ชันการแจกของแมกซ์เวลล์-โบลทซ์มานน์ (Maxwell-Boltzmann distribution function) เพราะฉะนั้น จำนวนอนุภาคของก๊าซต่อปริมาตรขนาดหนึ่งหน่วย ที่มีอัตราเร็วระหว่าง v และ $v + dv$ คือ

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv \quad (2.48)$$

เมื่อ n เป็นความหนาแน่นของจำนวนรวม (total number density) ของอนุภาค, m เป็นมวลของอนุภาค 1 ตัว, k เป็นค่าคงที่ของโบลทซ์มานน์, T เป็นอุณหภูมิของก๊าซอยู่ในหน่วยเคลวิน มีอัตราเร็วของอนุภาคส่วนใหญ่ (most probable speed) คือ $v_{mp} = \sqrt{2kT/m}$ และปลายของเส้นโค้งเอกซ์โปเนนเชียลอัตราเร็วสูงของฟังก์ชันการแจกแจง จะให้ผลลัพธ์ในอัตราเร็วเฉลี่ยที่สูงกว่า (root-mean-square) คือ $v_{rms} = \sqrt{3kT/m}$ ซึ่งปลายเส้นโค้งอัตราเร็วสูงลดลงด้วย $\exp(-mv^2/2kT)$ ฟังก์ชันการแจกของแมกซ์เวลล์-โบลทซ์มานน์ n_v/n ของสมการ(2.48) อยู่ภายใต้พื้นฐานทางกลศาสตร์สถิติ คือ อิเล็กตรอนมักไม่ครอบครองวงโคจรที่ระดับพลังงานสูงกว่า

พิจารณาระบบอนุภาค โดยให้ s_a เท่ากับเซตของเลขควอนตัม $\{n, l, l_z, s_z\}$ แสดงสถานะของอนุภาคที่มีพลังงาน E_a , และ s_b เท่ากับเซตของเลขควอนตัม $\{n, l, l_z, s_z\}$ แสดงสถานะของอนุภาคที่มีพลังงาน E_b , ดังนั้น อัตราส่วนของความน่าจะเป็นที่ระบบอนุภาคจะอยู่ในสถานะ s_b ต่อสถานะ s_a คือ

$$\frac{P(s_b)}{P(s_a)} = \frac{e^{-E_b/kT}}{e^{-E_a/kT}} = e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

เมื่อ T เป็นค่าอุณหภูมির่วม (common temperature) ของ 2 ระบบ, $e^{-E/kT}$ เป็นเทอมที่เรียกว่า แฟกเตอร์ของโบลทซ์มานน์ (Boltzmann factor) และเมื่อคิดสถานะแบบดีเจนเฮอร์ จะทำให้มีเทอมของ g_a และ g_b ที่เรียกว่า น้ำหนักทางสถิติ (statistical weights) ของระดับพลังงาน E_a และ E_b ตามลำดับ เมื่อ g_a เป็นจำนวนสถานะที่มีพลังงาน E_a และ g_b เป็นจำนวนสถานะที่มีพลังงาน E_b เพราะฉะนั้น จะได้อัตราส่วนของความน่าจะเป็นที่ระบบอนุภาคจะอยู่ในสถานะแบบดีเจนเฮอร์จำนวน g_b สถานะ ด้วยพลังงาน E_b ต่อสถานะแบบดีเจนเฮอร์จำนวน g_a สถานะ ด้วยพลังงาน E_a คือ

$$\frac{P(E_b)}{P(E_a)} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

เนื่องจากบรรยากาศของดาวมีอะตอมจำนวนมาก ดังนั้น อัตราส่วนของความน่าจะเป็นที่ระบบอนุภาคจะอยู่ที่สถานะใดๆ จึงมีสาระสำคัญเท่ากับอัตราส่วนของจำนวนอะตอมที่สถานะใดๆ นั้น เพราะฉะนั้น ระบบอะตอมของธาตุหนึ่งที่ยกสถานะของการไอออนไนซ์ จะมีอัตราส่วนของจำนวนอะตอม N_b ที่มีพลังงาน E_b ต่อจำนวนอะตอม N_a ที่มีพลังงาน E_a ในสถานะกระตุ้นที่ต่างกันคือ

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT} \quad (2.49)$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการโบลทซ์มานน์ (Boltzmann equation)

พิจารณาเส้นคูคกลืนบาลเมอร์ของอะตอมไฮโดรเจนที่เกิดจากการเปลี่ยนสถานะจากวงโคจร $n=2$ ไปสู่วงโคจรที่สูงกว่า และจากสมการ(2.49) เห็นว่าอิเล็กตรอนจะอยู่ในสถานะ $n=2$ ก่อนในตอนเริ่มต้นจำนวนมากๆ ได้ระบบต้องมีอุณหภูมิสูงถึง 85,000 K แต่กลับมีดาวที่อุณหภูมิต่ำกว่าคือ 9520 K ให้เส้นบาลเมอร์ด้วยความเข้มสูงสุด หรือสัดส่วนของจำนวนอิเล็กตรอนที่อยู่ในสถานะ $n=2$ ต่อสถานะพื้น ($n=1$) มีมากกว่า ซึ่งเหตุผลสำหรับกรณีนี้ได้รับการอธิบายจาก สมการซาฮา (Saha equation)

ให้ χ_i เป็นพลังงานของการไอออนไนเซชัน (ionization energy) สำหรับย้ายอิเล็กตรอนออกจากอะตอมในสถานะพื้น ซึ่งทำให้อะตอมที่มีสภาพไอออนไนเซชัน (ionization stage) i ไปอยู่ในสภาพไอออนไนเซชัน ($i+1$) อย่างไรก็ตาม อาจมีว่าอะตอมที่สถานะเริ่มต้นและสุดท้ายไม่อยู่ในสถานะพื้น ดังนั้น การเฉลี่ยจึงต้องทำครอบคลุมทุกพลังงานของวงโคจรเพื่อให้เกิดการแบ่งปันที่เป็นไปได้ของอิเล็กตรอนของอะตอมในระหว่างวงโคจรต่างๆ ของมัน พฤติกรรมนี้สัมพันธ์กับการคำนวณฟังก์ชันของการพาร์ทิชัน (partition function) สำหรับอะตอมที่สถานะเริ่มต้นและสุดท้าย ฟังก์ชันของการพาร์ทิชัน คือ ผลรวมแบบถ่วงดุล (weighted sum) ของจำนวนวิธีที่อะตอมสามารถจัดเรียงอิเล็กตรอนด้วยพลังงานเท่ากัน โดย configuration ที่ระดับพลังงานสูงได้รับการถ่วงดุลน้อยกว่าแฟกเตอร์ของโบลทซ์มานน์เมื่อกระทำการรวม ถ้า E_j เป็นพลังงานของระดับพลังงานที่ j และ g_j เป็นดีเจนเออเรซีของระดับพลังงานที่ j ดังนั้น ฟังก์ชันของการพาร์ทิชัน Z กำหนดได้เท่ากับ

$$Z = g_1 + \sum_{j=2}^{\infty} g_j e^{-(E_j - E_1)/kT} \quad (2.50)$$

ถ้าเราใช้ฟังก์ชันของการพาร์ทิชัน Z_i และ Z_{i+1} สำหรับอะตอมที่อยู่ในสภาพไอออนไนเซชันเริ่มต้นและสุดท้าย ดังนั้น อัตราส่วนของจำนวนอะตอมในสภาพ ($i+1$) ต่อจำนวนอะตอมในสภาพ i คือ

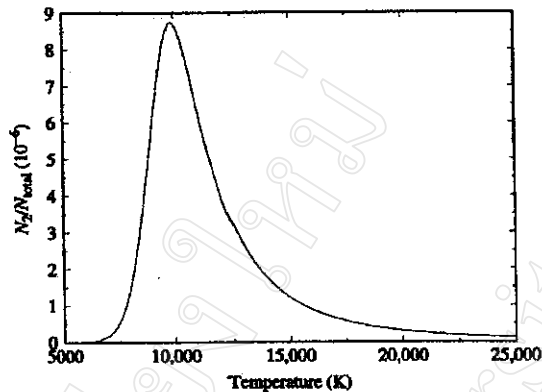
$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT} \quad (2.51)$$

สมการนี้รู้จักกันในชื่อ สมการซาฮา (Saha equation) เมื่อ n_e เป็นความหนาแน่นของจำนวนอิเล็กตรอนอิสระ ซึ่งอิเล็กตรอนอิสระเกิดจากขบวนการไอออนไนเซชัน (ionization process) จากสมการ(2.51) นี้พบว่า ถ้า n_e เพิ่มขึ้นจะทำให้จำนวนอะตอมที่อยู่ในสภาพไอออนไนเซชันที่ระดับสูงกว่ามีจำนวนลดลง เนื่องจากการกลับมารวมกันของอิเล็กตรอนอิสระกับไอออน เลข 2 ที่อยู่ด้านหน้า Z_{i+1} เป็นจำนวนสปินที่เป็นไปได้ของอิเล็กตรอนอิสระ ด้วย $s_z = \pm 1/2$, m_e เป็นมวลของอิเล็กตรอน หรือจะเขียนสมการ(2.51) ในรูปของความดันของอิเล็กตรอนอิสระ P_e เมื่อ $P_e = n_e kT$ จากกฎของก๊าซอุดมคติ (ideal gas law) จะได้

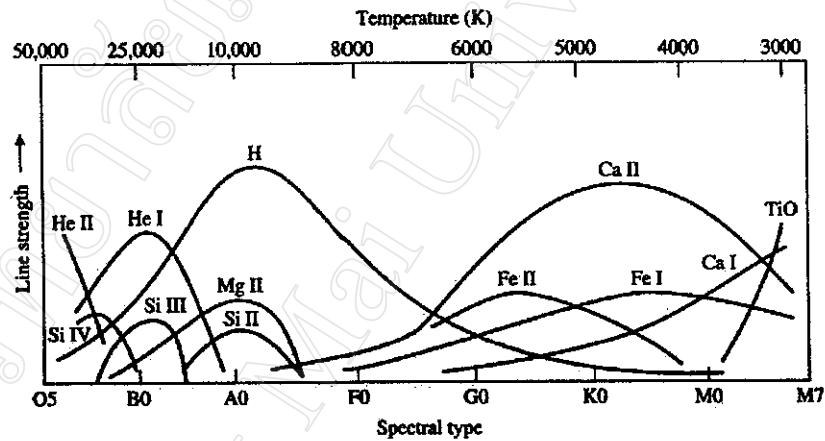
$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kTZ_{i+1}}{P_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT} \quad (2.52)$$

พิจารณารูปที่ 2-7 N_2/N_{total} ของ H จากสมการโบลทซ์มานน์และซาฮา แสดงความแรงของเส้นบาลเมอร์ โดยมีความแรงสูงสุดที่ $T = 9900$ K และความแรงลดลงที่ T เพิ่มขึ้นกว่าค่านี้อย่างต่อเนื่อง จึงทำให้สามารถจำแนกชนิดสเปกตรัมของดาวได้ ในทำนองเดียวกัน รูปที่ 2-8 แสดงความแรงของเส้นสเปกตรัมต่างๆ ที่ผันแปรกับชนิดสเปกตรัมและอุณหภูมิของดาว ขณะที่อุณหภูมิเปลี่ยน เห็นว่าความผัน

แปรแบบสม่ำเสมอจากชนิดสเปกตรัมหนึ่งไปยังชนิดสเปกตรัมถัดไป เป็นการบ่งบอกว่า มีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยในองค์ประกอบของสารของดาว เหมือนกับที่พิจารณาจากสเปกตรัมของพวกมัน



รูปที่ 2-7 N_2/N_{total} ของ H จากสมการ ไบลทซ์มานน์และซาฮา [Carroll and Ostlie, 1996]



รูปที่ 2-8 ความแรงของเส้นสเปกตรัมที่ขึ้นกับอุณหภูมิ [Carroll and Ostlie, 1996]

2.2.6 แผนภาพเฮิร์ตซสปริง-รัสเซลล์

วิศวกรและนักดาราศาสตร์สมัครเล่นชาวเดนมาร์กชื่อ เอจনার เฮิร์ตซสปริง (Ejnar Hertzsprung, พ.ศ. 2416-2510) ได้วิเคราะห์แมกนิจูดสัมบูรณ์และชนิดสเปกตรัมของดาวอย่างถูกต้อง (เสนอความคิดนี้ในปี พ.ศ. 2448) การค้นพบอันน่าประหลาดใจของเขา คือดาวชนิด G หรือลำดับย่อยถัดมา มีช่วงห่างของแมกนิจูด แม้ว่าจะเป็นชนิดสเปกตรัมเดียวกัน ซึ่งเฮิร์ตซสปริงกำหนดให้ดาวที่สว่างกว่าเป็นดาวยักษ์ (giant star) การตั้งชื่อนี้เป็นไปโดยธรรมชาติ เมื่อถูกของสเตฟาน-ไบลทซ์มานน์ สมการ(2.24) แสดงให้เห็นว่า

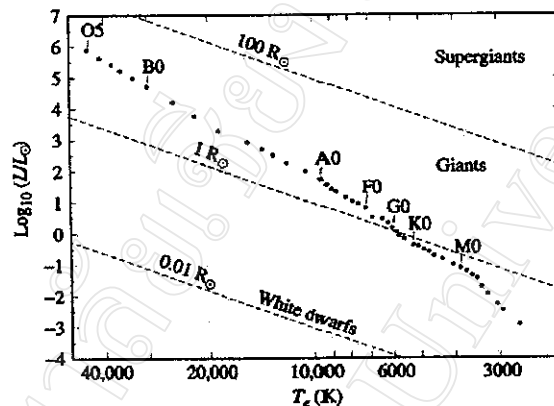
$$R = \frac{1}{T_e^2} \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}} \quad (2.53)$$

ถ้าดาว 2 ดวงมีอุณหภูมิเท่ากัน (หรือมีชนิดสเปกตรัมแบบเดียวกัน) ดังนั้น ดาวที่มีกำลังส่องสว่างมากกว่าต้องมีขนาดใหญ่กว่า

เฮนรี นอร์ริส รัสเซลล์ (Henry Norris Russell, พ.ศ. 2420-2500) ได้จัดจำแนกดาวของเขาอย่างอิสระ และสรุปเหมือนกันกับกรณีของเฮิร์ตซสปริง โดยใช้เทอมเหมือนกันคือดาวยักษ์ อธิบายดาวสว่าง

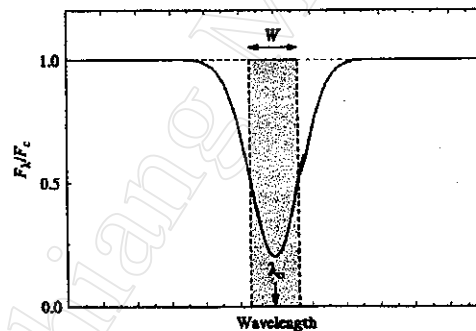
(luminous stars) ของชนิดสเปกตรัมลำดับหลัก และเทอมของดาวแคระ (dwarf stars) สำหรับใช้เป็น ตัวเปรียบเทียบแบบทึบแสง (เสนอความคิดนี้ในปี พ.ศ. 2456)

เนื่องจากการศึกษาเรื่องเดียวกันของทั้ง 2 ท่านนี้ จึงเรียกแผนภาพที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง แมกนิจูดสัมบูรณ์กับชนิดสเปกตรัมของดาวว่า แผนภาพเฮิร์ตสปรุง-รัสเซลล์ หรือแผนภาพเอช-อาร์ [Hertzsprung–Russell (H-R) diagram] รัศมีของดาวสามารถหาจากตำแหน่งของมันบนแผนภาพเอช-อาร์ และสมการ(2.53) จะได้แผนภาพเอช-อาร์ที่สร้างด้วยสเกลลอการิทึม โดยตำแหน่งของดาวที่มีรัศมีเท่ากัน จะเรียงตัวในแนวทแยงมุมที่เกือบขนานกับแนวของแถบขบวนหลัก ดังรูปที่ 2-9



รูปที่ 2-9 แนวรัศมีคงตัวของดาวบนแผนภาพเอช-อาร์ [Carroll and Ostlie, 1996]

2.2.7 โครงสร้างของเส้นสเปกตรัม



รูปที่ 2-10 รูปร่างของเส้นสเปกตรัมทั่วไป

รูปร่างของเส้นสเปกตรัมเดี่ยวๆ ประกอบด้วย ข้อมูลจำนวนมากเกี่ยวกับสภาวะแวดล้อมที่เส้นนั้น ถูกสร้าง รูปที่ 2-10 แสดงกราฟของฟลักซ์ของรังสี F_λ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของความยาวคลื่นสำหรับเส้น สเปกตรัมดูดกลืนทั่วไป ในรูป F_λ แสดงเป็นสัดส่วนของ F_c เมื่อ F_c คือค่าของฟลักซ์จากสเปกตรัมต่อเนื่อง ที่อยู่ด้านนอกเส้นสเปกตรัม บริเวณใกล้กับความยาวคลื่นค่ากลาง (central wavelength) λ_0 คือแกนของ เส้น และด้านข้างของเส้นที่ลู่อื่นไปจนถึงสเปกตรัมต่อเนื่องคือ ปีกของเส้น (line's wings) แต่ละเส้นอาจแคบ หรือกว้าง ตื้นหรือลึก ปริมาณ $(F_c - F_\lambda)/F_c$ เป็นความลึกของเส้น (depth of the line) ความแรง (strength) ของเส้นสเปกตรัมวัดได้ในเทอมของความกว้างสมมูล (equivalent width) ของเส้นนั้น ความกว้างสมมูล W ของเส้นสเปกตรัม นิยามเท่ากับ ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แรงเท่ากัน ดังรูปที่ 2-10 อยู่ในหน่วย

อังสตรอม ($\text{\AA}$) ซึ่งความยาวในแนวดิ่งยาวถึงสเปกตรัมต่อเนื่อง และมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของเส้นนั้น นั่นคือ

$$W = \int \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} d\lambda \quad (2.54)$$

เมื่ออินทิเกรตจากด้านหนึ่งไปยังอีกด้านของเส้น การวัดความกว้างของเส้นสเปกตรัมอีกวิธี คือวัดระยะทางในหน่วยอังสตรอม จากด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่งของเส้นที่มีความลึก $[1 - (F_\lambda/F_c)_{\min}]/2$ จึงเรียกความกว้างนี้ว่า full width at half-maximum แทนด้วย $(\Delta\lambda)_{1/2}$

เส้นสเปกตรัม ดังรูปที่ 2-10 เป็น optically thin เพราะว่า ไม่มีความยาวคลื่นที่ฟลักซ์ของรังสีถูกปิดกั้นอย่างสมบูรณ์ ความทึบ (opacity) κ_λ ของสสารควรมีค่ามากที่สุดที่ความยาวคลื่น λ_0 ที่กึ่งกลางของเส้น และลดลงเมื่อดูไปตามปีกของเส้น หมายความว่า ตำแหน่งกึ่งกลางของเส้นถูกสร้างขึ้นที่บริเวณสูงกว่า (และเย็นกว่า) ในบรรยากาศของดาว ส่วนที่ดูไปตามปีกจากตำแหน่ง λ_0 เกิดในบริเวณที่ระดับลึกกว่า (และร้อนกว่า) ในบรรยากาศ

สาเหตุหลักในการเกิดความกว้างของเส้นสเปกตรัม มี 3 ขบวนการ โดยแต่ละขบวนการจะให้รูปร่างหรือ profile ของเส้นในแบบเฉพาะของมัน คือ

- (1). ความกว้างโดยธรรมชาติ (Natural broadening) เป็นไปตามหลักการความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก มีความไม่แน่นอนในความยาวคลื่นของโฟตอน ประมาณ

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{\Delta t_i} + \frac{1}{\Delta t_f} \right) \quad (2.55)$$

เมื่อ Δt_i เป็นช่วงเวลาชีวิตของอิเล็กตรอนในสถานะเริ่มต้นของมัน และ Δt_f เป็นช่วงเวลาชีวิตในสถานะสุดท้าย มี full width at half-maximum ของ line profile สำหรับความกว้างโดยธรรมชาติ คือ

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = \frac{\lambda^2}{\pi c} \frac{1}{\Delta t_e} \quad (2.56)$$

เมื่อ Δt_e เป็นช่วงเวลาที่ช้าโดยเฉลี่ย (average waiting time) สำหรับการเปลี่ยนสถานะจำเพาะที่เกิดขึ้น

- (2). ความกว้างโดยปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ (Doppler broadening) ในสมดุลเชิงความร้อน (thermal equilibrium) อะตอมในก๊าซแต่ละตัวมีมวล m กำลังเคลื่อนที่แบบสะเปะสะปะ (randomly) ด้วยการแจกแจงของอัตราเร็วที่อธิบายด้วยฟังก์ชันการแจกแจงแมกซ์เวลล์-โบลทซ์มานน์ [สมการ(2.48)] ด้วยอัตราเร็วของอนุภาคส่วนใหญ่คือ $v_{mp} = \sqrt{2kT/m}$ ความยาวคลื่นที่ถูกดูดกลืนหรือเปล่งแสงโดยอะตอมในก๊าซถูกทำให้เลื่อนแบบดอปเปลอร์ (Doppler-shifted) สอดคล้องกับสมการ $\Delta\lambda/\lambda = \pm |v_r|/c$ ดังนั้น ความกว้างของเส้นสเปกตรัมที่เนื่องมาจากดอปเปลอร์ ประมาณได้เท่ากับ

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

มี full width at half-maximum ของ line profile สำหรับความกว้างโดยปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ คือ

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{m}} \quad (2.57)$$

แม้ว่า line profile สำหรับความกว้างโดยปรากฏการณ์คอปเปอเรอร์ที่ half-maximum มีความกว้างกว่าความกว้างโดยธรรมชาติอย่างมาก แต่ความลึกของเส้นสำหรับความกว้างโดยปรากฏการณ์คอปเปอเรอร์ลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียลขณะที่ความยาวคลื่นลู่ออกจากค่ากลาง λ_0 ซึ่งการตกลงอย่างรวดเร็วเป็นผลจากส่วนปลายของเส้นโค้งเอกซ์โปเนนเชียลอัตราเร็วสูงของการแจกแจงความเร็วของแมกซ์เวลล์-โบลทซ์มานน์ และความแรงลดลงอย่างรวดเร็วกว่าความกว้างโดยธรรมชาติ

การเลื่อนคอปเปอเรอร์ที่เกิดจากการเคลื่อนที่แบบเทอร์บูเลนต์ของสเกลใหญ่ (large-scale turbulent motion) ของมวลก๊าซขนาดใหญ่ (ซึ่งตรงข้ามกับการเคลื่อนที่แบบสะเปะสะปะของแต่ละอะตอม) สามารถรวมเข้ากับสมการ(2.57) ถ้าการแจกแจงความเร็วแบบเทอร์บูเลนต์ที่ปฏิบัติตามการแจกแจงของแมกซ์เวลล์-โบลทซ์มานน์ จะได้

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\left(\frac{2kT}{m} + v_{turb}^2\right) \ln 2} \quad (2.58)$$

เมื่อ v_{turb} เป็นอัตราเร็วแบบเทอร์บูเลนต์ที่เป็นไปได้ส่วนใหญ่ ผลกระทบของเทอร์บูเลนต์ที่มีต่อ line profiles อย่างสำคัญในบรรยากาศของดาวยักษ์และดาวเหนือยักษ์ (supergiant)

- (3). ความกว้างโดยความดัน (และการชน) [Pressure (and collisional) broadening] วงโคจรของอิเล็กตรอนสามารถถูกรบกวนในการชนกันกับอะตอมที่เป็นกลางทางไฟฟ้าหรือโดยการปะทะในระยะใกล้กับสนามไฟฟ้าของไอออน ผลของการชนโดยตรง ถูกเรียกว่า ความกว้างโดยการชนกัน (collisional broadening) และผลกระทบทางสถิติของสนามไฟฟ้าของไอออนจำนวนมากที่ผ่านเข้ามาในระยะใกล้สามารถกำหนดเป็น ความกว้างโดยความดัน (pressure broadening) ในทั้งสองกรณี ผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นอยู่กับเวลาเฉลี่ยระหว่างชนหรือปะทะกับอะตอมและไอออนอื่น

damping profile เป็นชื่อเรียกโปรไฟล์ร่วม ของความกว้างโดยธรรมชาติและความดัน

การประมาณความกว้างโดยความดัน ที่เนื่องมาจากการชนกันกับอะตอมของธาตุหนึ่งสามารถหาได้ โดยให้ Δt_c ในสมการ(2.56) เป็นเวลาเฉลี่ยในระหว่างชน ซึ่งประมาณเท่ากับ mean free path (l)หารด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย (v) ของอะตอม

$$\Delta t_c \approx \frac{l}{v} = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2kT/m}}$$

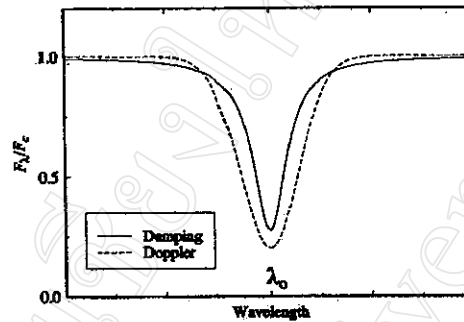
เมื่อ m เป็นมวลของอะตอม, σ เป็นภาคตัดขวางของการชนกัน (collision cross section) ของมัน, และ n เป็นความหนาแน่นของจำนวนอะตอม ดังนั้น ความกว้างของเส้นสเปกตรัมอันเนื่องมาจากความกว้างโดยความดันมีค่าอยู่ในออร์เดอร์

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \frac{1}{\pi\Delta t_c} \approx \frac{\lambda^2}{c} \frac{n\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (2.59)$$

จากสมการนี้ เห็นว่าความกว้างของเส้นแปรผันกับความหนาแน่นของจำนวนอะตอม n บัดนี้ เหตุผลทางกายภาพสำหรับการจัดจำแนกกำลังความส่องสว่างของมอร์แกน-คีแนน (Morgan-Keenan luminosity classes) มีความชัดเจนขึ้น นั่นคือ เส้นที่แคบกว่าสังเกตได้จากดาวยักษ์และเหนือยักษ์

เพราะว่า ความหนาแน่นของจำนวนอะตอมมีค่าต่ำในบรรยากาศที่ขยายตัว ดังนั้น บรรยากาศของดาวในแถบขบวนหลักที่มีความหนาแน่นสูงกว่า มีความถี่ของการชนมาก จึงให้ความกว้างโดยความดันมากกว่า

total line profile ถูกเรียกว่า Voigt profile เพราะว่ามันเกิดจากการเสริมกันของโปรไฟล์ชนิด Doppler และ damping ดังรูปที่ 2-11



รูปที่ 2-11 แสดง line profiles ชนิด Doppler และ damping เมื่อความกว้างสมมูลมีค่าเท่ากัน [Carroll and Ostlie, 1996]

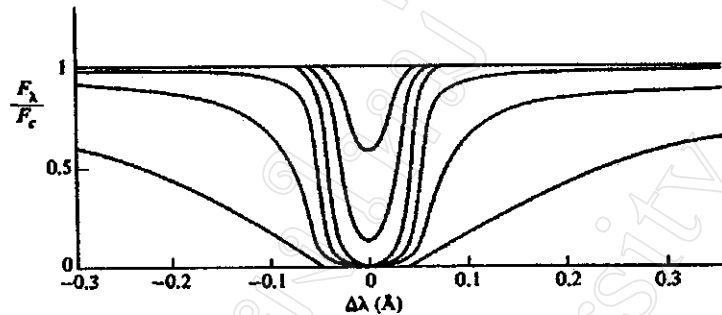
อับนแดนซ์ (Abundance)

พิจารณาดาวเป็นวัตถุดำ ที่ให้สเปกตรัมแบบต่อเนื่อง แต่ผลของอะตอมที่อยู่เหนือโฟโตสเฟียร์ทำให้เกิดเส้นดูดกลืนบนสเปกตรัมต่อเนื่อง นั้นแสดงว่า ค่าของอุณหภูมิ, ความหนาแน่น, และองค์ประกอบของสาร ต้องมาจากบริเวณที่อยู่เหนือโฟโตสเฟียร์ ที่เส้นถูกสร้างขึ้น

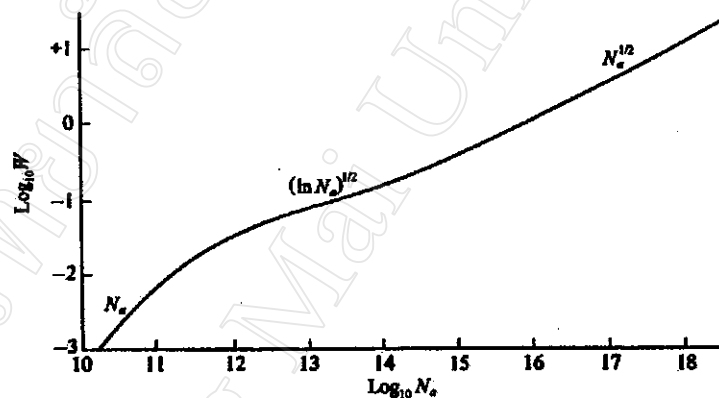
กำหนดให้ N_a เป็นจำนวนอะตอมที่เป็นตัวดูดกลืนต่อพื้นที่ขนาดหนึ่งหน่วย ที่มีอิเล็กตรอนอยู่ในวงโคจรเฉพาะสำหรับดูดกลืนโฟตอนที่ความยาวคลื่นของเส้นสเปกตรัมนั้น (หน่วยเป็น cm^{-2}) เนื่องจากโอกาสในการเปลี่ยนสถานะระหว่างวงโคจรไม่เท่ากัน เช่น ไฮโดรเจนจะเปลี่ยนสถานะจาก $n=2$ ไปยัง $n=3$ ($H\alpha$) มีโอกาสเป็น 5 เท่าของกรณีเปลี่ยนสถานะจาก $n=2$ ไปยัง $n=4$ ($H\beta$) ดังนั้น ความน่าจะเป็นสัมพัทธ์ของอิเล็กตรอนในการเปลี่ยนสถานะจากวงโคจรเริ่มต้นเดียวกันจึงกำหนดได้จาก ค่า f หรือ oscillator strengths สำหรับวงโคจรนั้น oscillator strengths อาจคำนวณได้ในทางทฤษฎี หรือวัดได้ในห้องปฏิบัติการ และนิยามพวกมันว่า ค่า f สำหรับการเปลี่ยนสถานะจากวงโคจรเริ่มต้นเดียวกันเป็นการเพิ่มจำนวนอิเล็กตรอนในอะตอมหรือไอออนให้สูงขึ้น ดังนั้น oscillator strengths คือจำนวนอิเล็กตรอนสัมพัทธ์ต่ออะตอมที่มีส่วนร่วมในการเปลี่ยนสถานะ ซึ่งกรณี $H\alpha$ มี $f = 0.637$ และ $H\beta$ มี $f = 0.119$ และถ้าคูณจำนวนอะตอมที่เป็นตัวดูดกลืนต่อพื้นที่ขนาดหนึ่งหน่วยกับค่า f จะได้ จำนวนอะตอมที่อยู่เหนือแต่ละตารางเซนติเมตรของโฟโตสเฟียร์ที่สัมพันธ์กับเส้นสเปกตรัมนั้น คือ fN_a

เส้นโค้งของการเติบโต (curve of growth) เป็นเครื่องมือที่นักดาราศาสตร์ใช้หา N_a และอับนแดนซ์ของธาตุในบรรยากาศของดาว รูปที่ 2.12 แสดงความกว้างสมมูล W ของเส้นต้นแปรกับ N_a และรูปที่ 2.13 แสดงเส้นโค้งของการเติบโต เป็นกราฟลอการิทึมของความกว้างสมมูล W ซึ่งเป็นฟังก์ชันของจำนวนอะตอมที่เป็นตัวดูดกลืน โดยช่วงแรกของเส้นโค้งเป็นแบบ linear ด้วย $W \propto N_a$ ก่อนข้างลาดชัน และช่วงที่สองเส้นโค้งค่อนข้างแบนราบด้วย $W \propto \sqrt{\ln N_a}$ และช่วงที่สามเส้นโค้งมีความชันมากแต่

ไม่มากเท่าตอนแรกด้วย $W \propto \sqrt{N_a}$ สำหรับ total line profile การใช้เส้นโค้งของการเติบโต และความกว้างสมมูลที่วัดได้ เราจะสามารถหาจำนวนอะตอมที่เป็นตัวดูดกลืนได้ สมการโบลซมานน์ และซาฮา ใช้เปลี่ยนค่านี้ไปสู่จำนวนอะตอมรวมของธาตุนั้นที่อยู่เหนือโฟโตสเฟียร์



รูปที่ 2-12 Voigt profiles ของเส้น K ของ Ca II โดยเส้นคั่นที่สุกสร้างขึ้นจากอะตอมที่เป็นตัวดูดกลืนต่อพื้นที่ขนาดหนึ่งหน่วย จำนวน $N_a = 3.4 \times 10^{11}$ ions cm^{-2} และเส้นโปรไฟล์ที่กว้างกว่าออกไปจะมีอันแคนซ์เพิ่มขึ้นทีละ 10 เท่า ตามลำดับ ของ Novotny ในปี พ.ศ. 2516 [Carroll and Ostlie, 1996]



รูปที่ 2-13 เส้นโค้งของการเติบโต ของเส้น K ของ Ca II ขณะที่ N_a เพิ่มขึ้นจะทำให้ฟังก์ชัน $\log_{10} W$ เปลี่ยนไป ของ Aller ในปี พ.ศ. 2506 [Carroll and Ostlie, 1996]

2.3 ทฤษฎีกลศาสตร์

ประกอบด้วย 2.3.1 กฎสามข้อของเคปเลอร์ (แก้ไขให้ถูกต้องโดยนิวตัน), 2.3.2 ทฤษฎีบทไวเรียล, และ 2.3.3 แรงไทดอล

2.3.1 กฎสามข้อของเคปเลอร์

นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ โยฮานเนส เคปเลอร์ (Johannes Kepler) ค้นพบกฎ 3 ข้อ ของเขา จากการวิเคราะห์ข้อมูลสังเกตการณ์ของ ไทโค บราเฮ (Tycho Brahe) ที่มอบให้กับเขา โดยใช้ข้อมูลการโคจรของดาวอังคารและให้การโคจรเป็นวงรี โดยดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัส ทำให้เขาสามารถเขียนสมการทางคณิตศาสตร์อธิบายผลสังเกตการณ์ของบราเฮได้ แต่มีข้อผิดพลาดบางจุดบนวงโคจรที่ไม่ตรงกัน ซึ่ง ปี พ.ศ. 2152 เคปเลอร์เสนอกฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์จำนวน 3 ข้อ คือ กฎข้อที่ 1 ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี โดยดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสจุดหนึ่งของวงรี, กฎข้อที่ 2 เส้นตรงเชื่อมโยระหว่างดาวเคราะห์ถึงดวงอาทิตย์กวาดได้พื้นที่เท่ากันในช่วงเวลาที่เท่ากัน, และ กฎข้อที่ 3 $P^2 = a^3$ เมื่อ P เป็นคาบ

ของการโคจรของดาวเคราะห์ อยู่ในหน่วยของปี และ a เป็นระยะทางเฉลี่ยของดาวเคราะห์จากดวงอาทิตย์ อยู่ในหน่วยของหน่วยดาราศาสตร์ (Astronomical unit) AU

แต่กฎทั้ง 3 ข้อ ของเคปเลอร์ยังมีความคลาดเคลื่อนและเป็นคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่า กฎเอนไพริคัล (empirical laws) ซึ่งเขาเองก็ยังไม่สามารถอธิบายฟิสิกส์ของมันได้ หลังจากนั้น ก็มีผู้ที่สามารถพิสูจน์กฎทั้งสามข้อของเคปเลอร์ได้คือ เซอร์ไอแซค นิวตัน (Issaac Newton) โดยเขาพิสูจน์กฎเอนไพริคัลของการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์จากกฎของแรงโน้มถ่วงของเขา สรุปเป็นกฎของเคปเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว 3 ข้อ คือ

กฎของเคปเลอร์ที่ปรับปรุงแล้วข้อที่ 1 คือ วัตถุทั้งสองอยู่ในวงโคจรคู่ (binary orbit) เคลื่อนที่รอบศูนย์กลางมวลในวงรี ด้วยศูนย์กลางมวลมีตำแหน่งอยู่ที่โฟกัสอันหนึ่งของแต่ละวงรี

กฎของเคปเลอร์ที่ปรับปรุงแล้วข้อที่ 2 คือ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} \quad (2.60)$$

มีความหมายว่า เมื่อโมเมนตัมเชิงมุมออร์บิตอล (L) มีค่าคงที่ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่กับเวลาที่กวาดไปได้โดยเส้นตรงเชื่อมโยระหว่างดาวเคราะห์ถึงจุดโฟกัสของวงรีมีค่าคงที่ เป็นครึ่งหนึ่งของโมเมนตัมเชิงมุมออร์บิตอลต่อมวลขนาดหนึ่งหน่วย

กฎของเคปเลอร์ที่ปรับปรุงแล้วข้อที่ 3 คือ

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (2.61)$$

เมื่อ P เป็นคาบของการโคจร หน่วยเป็น ปี, a เป็นระยะครึ่งแกนเอกของวงโคจรแบบวงรี หน่วยเป็น AU

2.3.2 ทฤษฎีบทไวเรียล

ทฤษฎีบทไวเรียล (Virial theorem) คือทฤษฎีที่ใช้อธิบายระบบที่อยู่ในสภาวะสมดุล พลังงานรวมมีค่าเป็นลบ (ระบบมีขอบเขต หรือ bound) และมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของพลังงานศักย์รวม พลังงานรวมของวงโคจรคู่ (binary orbit) เท่ากับครึ่งหนึ่งของพลังงานศักย์โน้มถ่วงที่เฉลี่ยกับเวลา นั่นคือ

$$\langle E \rangle = \langle U \rangle / 2 \quad (2.62)$$

หรือ

$$-2\langle K \rangle = \langle U \rangle \quad (2.63)$$

ซึ่งสมการ(2.63) เป็นรูปหนึ่งของทฤษฎีบทไวเรียล เมื่อพลังงานรวมของระบบคือ $\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle U \rangle$

ประโยชน์ของทฤษฎีบทไวเรียล คือสามารถประยุกต์ใช้กับระบบต่างๆ ได้อย่างกว้างขวาง จากก๊าซอุดมคติจนถึงกระจุกแกแลกซี เช่น กรณีของดาวที่อยู่ในสภาวะสถิตย์ (static star) ในสภาวะสมดุล (equilibrium) แล้วดาวจะอยู่ภายใต้ทฤษฎีบทไวเรียล หมายความว่าพลังงานรวมของมันมีค่าเป็นลบและมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของพลังงานศักย์รวม

2.3.3 แรงไทดอล

ไทดัลของมหาสมุทร (ocean tides) ได้รับความสนใจจากมนุษย์มาเป็นเวลายาวนาน กาลิเลโอ (Galileo) พยายามอธิบายไทดัลของมหาสมุทรแต่ไม่ประสบผลสำเร็จและไม่สามารถอธิบายเวลาของการเกิด

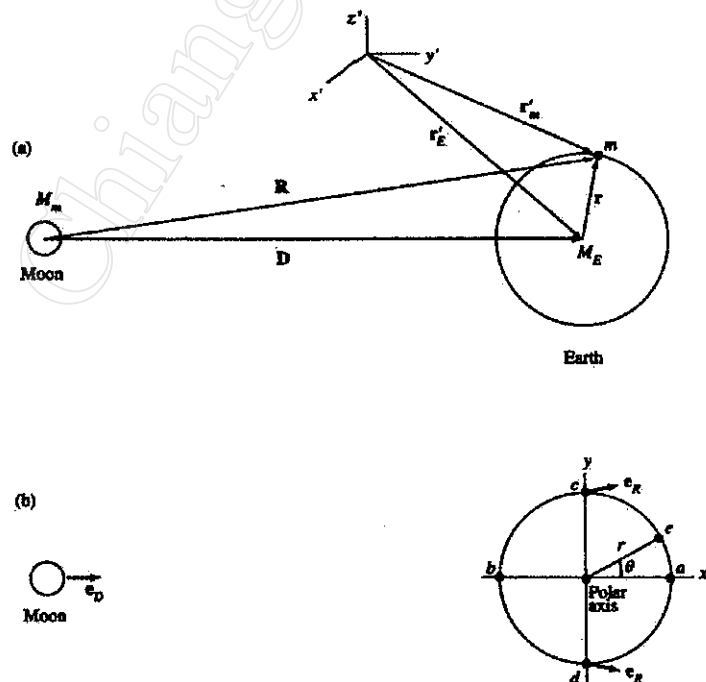
ไทด์สูงสุดประมาณ 2 ครั้งต่อวัน สุกท้ายนิวตันก็ให้คำอธิบายนี้ได้อย่างเพียงพอ ไทด์เป็นสาเหตุที่เกิดขึ้นจากแรงดึงดูดโน้มถ่วงของมหาสมุทรกับทั้งดวงจันทร์และดวงอาทิตย์ แต่มีแฟกเตอร์ซับซ้อนหลายตัว

การคำนวณมีความซับซ้อนเนื่องจากความจริงที่ว่า พื้นผิวของโลกไม่ได้เป็นระบบเฉื่อย (inertial system) โลกและดวงจันทร์โคจรรอบจุดศูนย์กลางมวล (center of mass) ร่วมกัน (และเคลื่อนที่รอบดวงอาทิตย์) ดังนั้น เราอาจจินตนาการว่า น้ำที่ตำแหน่งไกลที่สุดจากดวงจันทร์ถูกดึงให้ห่างออกไปจากโลก และโลกก็ถูกดึงห่างออกไปจากน้ำที่มีตำแหน่งไกลที่สุดจากดวงจันทร์ อย่างไรก็ตาม โลกมีการโคจรรอบดวงอาทิตย์ขณะที่ดวงจันทร์ก็โคจรรอบโลก อันดับแรกให้พิจารณาเฉพาะผลกระทบของดวงจันทร์ เริ่มจากการสมมติแบบจำลองอย่างง่ายว่า พื้นผิวของโลกถูกปกคลุมด้วยน้ำอย่างสมบูรณ์ โดยจะรวมผลกระทบของการหมุนรอบตัวเองของโลกในภายหลัง และกำหนดให้มีกรอบอ้างอิงเฉื่อย $x' y' z'$ ดังรูปที่ 2-14(a) ให้ M_m เป็นมวลของดวงจันทร์, r เป็นรัศมีของโลกแบบวงกลม (circular Earth), และ D เป็นระยะทางจากจุดศูนย์กลางของดวงจันทร์ถึงจุดศูนย์กลางของโลก พิจารณาผลกระทบของแรงดึงดูดโน้มถ่วงจากทั้งดวงจันทร์และโลกที่กระทำบนมวลขนาดเล็ก m ซึ่งมีตำแหน่งอยู่บนพื้นผิวของโลก รูปที่ 2-14(a) เวกเตอร์บอกตำแหน่งของมวล m จากดวงจันทร์คือ $\vec{R}$, จากจุดศูนย์กลางของโลกคือ $\vec{r}$, และจากระบบเฉื่อยของเราคือ $\vec{r}'_m$, เวกเตอร์บอกตำแหน่งจากระบบเฉื่อยถึงจุดศูนย์กลางของโลกคือ $\vec{r}'_E$ เมื่อดำเนินการวัดจากระบบเฉื่อย แรงที่กระทำบนมวล m ที่เนื่องมาจากโลกและดวงจันทร์ คือ

$$m\ddot{\vec{r}}'_m = -\frac{GmM_E}{r^2}\hat{e}_r - \frac{GmM_m}{R^2}\hat{e}_R \quad (2.64)$$

ทำนองเดียวกัน แรงที่กระทำบนจุดศูนย์กลางมวลของโลกที่เนื่องมาจากดวงจันทร์ คือ

$$M_E\ddot{\vec{r}}'_E = -\frac{GM_E M_m}{D^2}\hat{e}_D \quad (2.65)$$



รูปที่ 2-14 เวกเตอร์ของแรงไทด์ที่กระทำบนโลกที่เนื่องมาจากดวงจันทร์ [Marion and Thornton, 1995]

ความเร่ง $\ddot{r}$ ที่วัดในระบบแบบไม่เฉื่อย (noninertial system) ถูกกำหนดอยู่ที่ศูนย์กลางของโลก คือ

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \ddot{r}'_m - \ddot{r}'_E = \frac{m\ddot{r}'_m}{m} - \frac{M_E\ddot{r}'_E}{M_E} \\ &= -\frac{GM_E}{r^2}\hat{e}_r - GM_m\left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_D}{D^2}\right)\end{aligned}\quad (2.66)$$

ส่วนแรกเป็นผลเนื่องมาจากโลก, และส่วนที่สองเป็นความเร่งจากแรงไทดอล (tidal force) ซึ่งเป็นสาเหตุให้เกิดไทดัลของมหาสมุทร ดังนั้น ไทดัลของมหาสมุทรจึงเป็นผลที่เนื่องมาจากผลต่างระหว่างแรงดึงดูดโน้มถ่วงของดวงจันทร์ที่จุดศูนย์กลางของโลกและบนพื้นผิวของโลก

หาผลกระทบของแรงไทดอลที่จุดต่างๆ บนโลกตามจุดในรูปที่ 2-14(b) ซึ่งมุมการมองอยู่ที่ด้านข้างของโลกโดยแกนข้างอยู่ในแนวแกน z แรงไทดอล $\vec{F}_T$ ที่กระทำบนมวล m บนพื้นผิวของโลก คือ

$$\vec{F}_T = -GmM_m\left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_D}{D^2}\right)\quad (2.67)$$

เมื่อใช้เฉพาะส่วนที่สองของสมการ(2.66) เริ่มจากการพิจารณาที่จุด a ซึ่งเป็นจุดห่างไกลที่สุดบนโลกจากดวงจันทร์ เวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยทั้ง $\hat{e}_R$ และ $\hat{e}_D$ กำลังชี้อยู่ในทิศทางเดียวกันออกจากดวงจันทร์ในแนวแกน x เนื่องจาก $R > D$ จึงทำให้เทอมที่ 2 ในสมการ(2.67) มีความโดดเด่นกว่า และทำให้แรงไทดอลมีทิศอยู่ในแนวแกน $+x$ ดังรูปที่ 2-14(b) สำหรับจุด b , $R < D$ และแรงไทดอลมีขนาดเดียวกันกับที่จุด a แต่มีทิศอยู่ในแนวแกน $-x$ ขนาดของแรงไทดอลในแนวแกน x , F_{Tx} คือ

$$F_{Tx} = -GmM_m\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{D^2}\right) = -GmM_m\left(\frac{1}{(D+r)^2} - \frac{1}{D^2}\right) = -\frac{GmM_m}{D^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r}{D}\right)^2} - 1\right)$$

กระจายเทอมที่ 1 ในวงเล็บโดยใช้การกระจายแบบไบนอมิเยล $(1+x)^{-2}$ จะได้

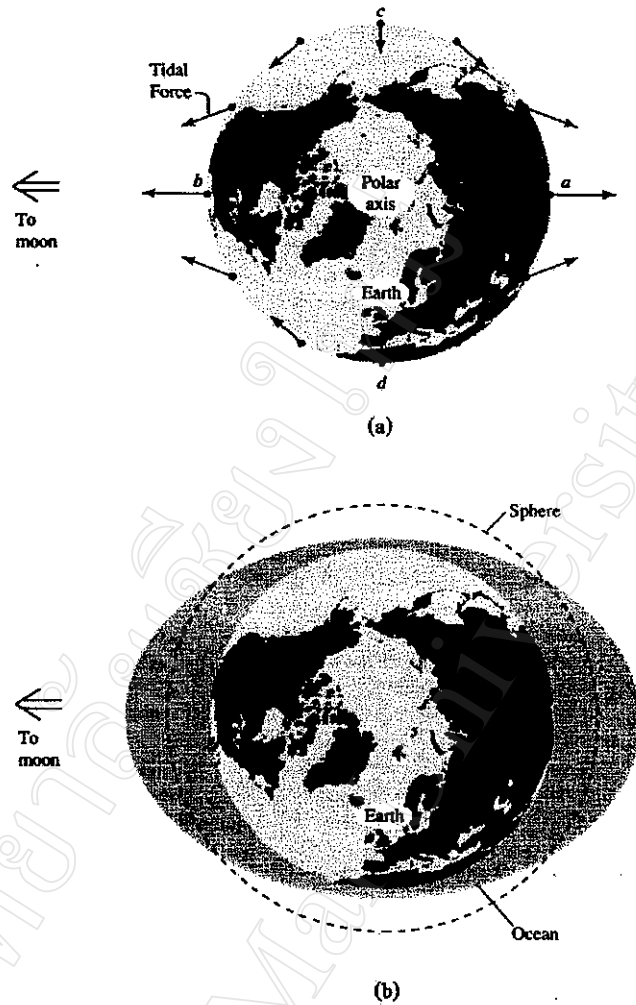
$$F_{Tx} = -\frac{GmM_m}{D^2}\left[1 - 2\frac{r}{D} + 3\left(\frac{r}{D}\right)^2 - \dots - 1\right] = +\frac{2GmM_m r}{D^3}\quad (2.68)$$

เมื่อคงไว้เฉพาะเทอมที่มีค่ามากที่สุดที่ไม่เป็นศูนย์ในการกระจาย เพราะว่า $r/D = 0.02$

สำหรับจุด c เวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วย $\hat{e}_R$ [รูปที่ 2-14(b)] ไม่ได้ชี้ในแนวเดียวกันกับ $\hat{e}_D$ แต่องค์ประกอบในแนวแกน x อาจประมาณให้หักล้างกันได้ เพราะว่า $R \cong D$ และองค์ประกอบในแนวแกน x ของ $\hat{e}_R$ และ $\hat{e}_D$ จึงคล้ายคลึงกัน มุ่งองค์ประกอบอื่นๆ ของ $\hat{e}_R$ ในแนวแกน y ทำการประมาณองค์ประกอบในแนวแกน y ของ $\hat{e}_R$ ด้วย $(r/D)\hat{j}$ และแรงไทดอลที่จุด c แทนด้วย $\vec{F}_{Ty}$ มีทิศอยู่ในแนวแกน y และมีขนาดเท่ากับ

$$F_{Ty} = -GmM_m\left(\frac{1}{D^2} \frac{r}{D}\right) = -\frac{GmM_m r}{D^3}\quad (2.69)$$

มีข้อสังเกตว่า แรงนี้มีทิศในแนวแกน $-y$ ซึ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางของโลกที่จุด c ทำนองเดียวกัน การหาแรงที่จุด d พบว่า มีขนาดเท่ากับ แต่องค์ประกอบของ $\hat{e}_R$ จะมีทิศอยู่ในแนวแกน $-y$ ดังนั้น จะได้แรงมีทิศในแนวแกน $+y$ ซึ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางของโลก แรงไทดอลที่จุด a, b, c , และ d แสดง ดังรูปที่ 2-15(a)



รูปที่ 2-15 แรงโน้มถ่วงคิฟเฟอเรนเชียลของดวงจันทร์ที่กระทำบนโลก [Marion and Thornton, 1995]

หาแรงที่จุดไม่เจาะจง (arbitrary point) e โดยองค์ประกอบในแนวแกน x และ y ของแรงไทดอล สามารถหาได้โดยแทน x และ y บน r ใน F_{Tx} และ F_{Ty} ตามลำดับ ในสมการ(2.68) และ (2.69) จะได้

$$F_{Tx} = \frac{2GmM_m x}{D^3} \text{ และ } F_{Ty} = -\frac{GmM_m y}{D^3}$$

ดังนั้น ที่จุดไม่เจาะจง เช่น e เราให้ $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$ ดังนั้น จะได้

$$F_{Tx} = \frac{2GmM_m r \cos \theta}{D^3} \quad (2.70a)$$

$$F_{Ty} = -\frac{GmM_m r \sin \theta}{D^3} \quad (2.70b)$$

สมการ(2.70a) และ (2.70b) ให้แรงไทดอลเกิดขึ้นรอบโลกสำหรับทุกมุม θ มีข้อสังเกตว่า สมการทั้งสอง ให้ผลลัพธ์อย่างถูกต้องที่จุด a, b, c , และ d

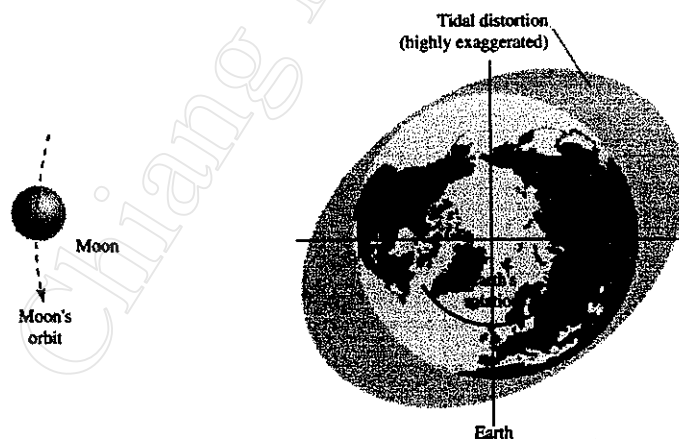
รูปที่ 2-15(a) แทนผลของแรงไทดอล สำหรับแบบจำลองอย่างง่ายนี้ แรงเหล่านี้จะเป็นสาเหตุให้น้ำที่อยู่ในแนวแกน y เกิดการตื้นเขินกว่าน้ำที่อยู่ในแนวแกน x เมื่อโลกหมุนรอบตัวเองครบรอบทุก 24 ชั่วโมง เราจึงสังเกตการณ์เห็นไต้สูง (high tides) 2 ครั้งต่อวัน

การคำนวณโดยประมาณ จะเห็นว่า แรงดึงดูดโน้มถ่วงของดวงอาทิตย์มีค่า 175 เท่าของดวงจันทร์ ที่กระทำบนพื้นผิวของโลก ดังนั้น จึงต้องคิดแรงไทดอลจากดวงอาทิตย์ด้วย การคำนวณแรงไทดอลที่ทำในลักษณะเดียวกันกับกรณีของดวงจันทร์ พบว่าแรงไทดอลที่เนื่องมาจากดวงอาทิตย์มีค่า 0.46 เท่าของดวงจันทร์ แม้ว่าดวงอาทิตย์มีแรงดึงดูดที่แรงกว่า แต่เกรเดียนของแรงโน้มถ่วง (gravitational force gradient) ทั้งทั้งพื้นผิวของโลกมีค่าน้อยกว่ามาก เพราะว่า ดวงอาทิตย์มีระยะทางไกลกว่าอย่างมาก

ไทดัลสูงสุด เรียกว่า spring tides เกิดขึ้นเมื่อโลก, ดวงจันทร์, และดวงอาทิตย์ อยู่ในแนวเดียวกัน (new moon และ full moon) และไทดัลต่ำสุด เรียกว่า neap tides เกิดขึ้นสำหรับควอเตอร์ (quarters) ที่ 1 และ 3 ของดวงจันทร์ เมื่อดวงอาทิตย์และดวงจันทร์ทำมุมตั้งฉากกัน จึงเกิดหักล้างกันแบบบางส่วน ไทดัลสูงสุดเกิดขึ้นทุกๆ 2 สัปดาห์

เรโซแนนซ์ (resonances) สามารถให้ผลกระทบในการสั่นทางธรรมชาติ (natural oscillation) ของตัวน้ำ (bodies of water) และเป็นสาเหตุให้เกิดการเปลี่ยนแปลงไทดอล (tidal changes) ความเสียดทานไทดอล (Tidal friction) ระหว่างน้ำและโลกจะทำให้เกิดการสูญเสียพลังงานอย่างชัดเจนบนโลก โลกไม่ได้เป็นวัตถุแข็งเกร็ง (rigid) จึงทำให้โลกมีรูปร่างบิดเบี้ยวไปโดยแรงไทดอล

ขณะโลกหมุนรอบตัวเอง ดวงจันทร์ก็กำลังโคจรรอบโลก จะส่งผลให้ไม่ได้ไทดัลสูง 2 ครั้งต่อวัน เพราะว่า ไทดัลสูงเกิดขึ้นทุก 12 ชั่วโมง และ 26 นาที ระยะเวลาของวงโคจรของดวงจันทร์รอบโลกไม่ได้ตั้งฉากกันกับแกนหมุนของโลก จึงเป็นสาเหตุให้เกิดไทดัลสูง 1 ครั้งในแต่ละวันสูงเล็กน้อยกว่าอีกอันเล็กน้อย ความเสียดทานไทดอลระหว่างน้ำและแผ่นดินทำให้โลกหดถากมหาสมุทรไปพร้อมกับที่โลกหมุน นี่จึงเป็นเหตุให้ไทดัลสูงค่อนข้างไม่อยู่ในแนวแกนระหว่างโลกและดวงจันทร์ ด้วยระยะหลายองศา ดังรูปที่ 2-16



รูปที่ 2-16 ผลของแรงเสียดทานไทดอลบนโลก [Marion and Thornton, 1995]

2.4 ชนิดของระบบดาวคู่

ประกอบด้วย 2.4.1 การจำแนกชนิดของระบบดาวคู่, และ 2.4.2 ระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปีอุปราคา

2.4.1 การจำแนกชนิดของระบบดาวคู่

ดาวคู่ คือระบบที่ประกอบด้วยดาวสองดวงที่โคจรรอบศูนย์กลางมวล (center of mass) ของระบบ เพราะได้รับแรงโน้มถ่วงกระทำซึ่งกันและกัน ซึ่งแบ่งดาวคู่ได้หลายชนิด คือ

(1). ดาวคู่ที่มองเห็นได้ (visual binary) ประกอบด้วย ดาวสองดวง สามารถมองเห็นแยกกัน เมื่อมองผ่านกล้องโทรทรรศน์ ดาวทั้งสองโคจรรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบด้วยแรงดึงดูดระหว่างกัน ซึ่งระบบนี้ให้ระยะห่างกันเชิงมุม (angular separation) ของดาวเทียบกับจุดศูนย์กลางมวลของระบบ ถ้าทราบระยะทางจากโลกถึงระบบดาวคู่ชนิดนี้ จะสามารถคำนวณหาระยะห่างกันเชิงเส้นของดาวได้

(2). ดาวคู่โดยการวัดทางดาราศาสตร์ (astrometric binary) ประกอบด้วย ดาวสองดวง แต่สังเกตเห็นเพียงดวงเดียว เนื่องจากดาวอีกดวงมีกำลังความส่องสว่างน้อยจนสังเกตไม่เห็น แม้ว่าจะมองผ่านกล้องโทรทรรศน์ อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่เฉพาะดาวที่มองเห็นจะพบว่า มีการส่าย (wobble) หรือเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัด (oscillatory) อันเนื่องมาจากผลของแรงกระทำของดาวสมาชิกที่มองไม่เห็น

(3). ดาวคู่สเปกโตรสโคปี (spectroscopic binary) ประกอบด้วย ดาวสองดวง มีระยะห่างกันเชิงมุมน้อยมาก จึงไม่เห็นดาวคู่แยกกันเป็น 2 ดวง แม้ว่าจะมองผ่านกล้องโทรทรรศน์ เป็นไปได้ 2 กรณี คือ 1. ดาวทั้งสองอยู่ใกล้กันมาก, และ 2. ดาวคู่นี้มีระยะทางไกลจากโลกมาก แม้จะความจริงดาวคู่นี้อาจมีระยะห่างกันมาก อย่างไรก็ตาม เมื่อถ่ายสเปกตรัมของดาวคู่นี้จะพบเส้นสเปกตรัม 2 ชุด และมีการเคลื่อนที่ไป-มา ซึ่งเกิดจากการโคจรของดาว 2 ดวงรอบจุดศูนย์กลางมวลร่วมกันในแนวเส้นสายตา (line of sight) แต่บางกรณีเส้นสเปกตรัมปรากฏเห็นเพียงชุดเดียว เพราะดาวดวงหนึ่งมีความสว่างน้อยจึงสังเกตไม่เห็นเส้นสเปกตรัม

(4). ดาวคู่สเปกตรัม (spectrum binary) ประกอบด้วย ดาวสองดวง ซึ่งคล้ายดาวคู่สเปกโตรสโคปี แต่เส้นสเปกตรัมจากดาว 2 ดวงนั้นไม่เคลื่อนที่ไปมา ซึ่งอาจเกิดจากความเร็วในวงโคจรของดาวมีค่าต่ำมาก จึงไม่สามารถสังเกตพบความเร็วในแนวเส้นสายตามีการเปลี่ยนแปลง หรืออาจเกิดจากระนาบการโคจรของดาวคู่ทำมุมเกือบตั้งฉากกับแนวเส้นสายตา แต่สามารถบอกได้ว่ามีสเปกตรัม 2 ชุด ที่เกิดจากดาว 2 ดวง

(5). ดาวคู่อุปราคา (eclipsing binary) ประกอบด้วย ดาวสองดวง ที่ระนาบวงโคจรอยู่ในแนวเส้นสายตา จึงเห็นการบังกัน (eclipse) ของดาวทั้งสอง ดาวคู่ชนิดนี้เป็นได้ทั้งดาวคู่สเปกโตรสโคปีหรือดาวคู่ที่มองเห็นได้ แต่ส่วนใหญ่ ดาวทั้งสองมักอยู่ใกล้กันมากจนไม่สามารถมองแยกกันโดยดูผ่านกล้องโทรทรรศน์ และบางกรณีดาวสมาชิกของมันมีกำลังความส่องสว่างน้อยจนไม่สามารถสังเกตเส้นสเปกตรัมได้ ระบบนี้ กราฟแสง (light curve) เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการวัด ซึ่งทำให้ทราบว่า เป็นดาวคู่, อุณหภูมิสัมฤทธิ์เชิงสัมพัทธ์, รัศมีของดาวแต่ละดวง จากการวัดปริมาณแสงที่ลดลงและช่วงเวลาของการบังกัน

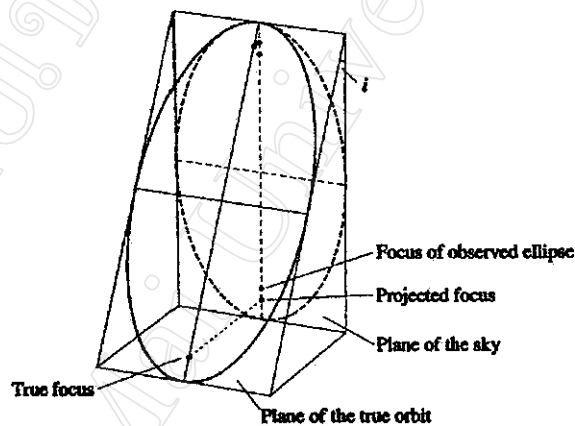
2.4.2 ระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปีอุปราคา (Eclipsing, Spectroscopy Binaries)

พิจารณาระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปี ที่สเปกตรัมของดาวทั้งสองสามารถมองเห็นได้ (ระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปีแบบเส้นคู่) เมื่อดาวสมาชิกแต่ละดวงไม่สามารถมองเห็นแยกกันได้ ดังนั้น เทคนิคที่ใช้หาทิศทาง (orientation) และความรี (eccentricity) ของวงโคจรของระบบดาวคู่ชนิดที่มองเห็นได้จึงไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้ มุมอินคลิเนชัน (inclination angle) i แสดงหน้าที่หลักในการหามวลของดาว เพราะว่า มันส่งผลโดยตรงในการวัดความเร็วในแนวเส้นสายตา (radial velocities) ถ้า v_1 เป็นความเร็วของดาวมวล m_1 , และ v_2 เป็นความเร็วของดาวมวล m_2 ถ้าพิจารณารูปที่ 2-17 จะพบว่า ความเร็วในแนวเส้นสายตาที่สังเกตได้ไม่สามารถมีค่าเกิน $v_{1r}^{max} = v_1 \sin i$ และ $v_{2r}^{max} = v_2 \sin i$ ตามลำดับ เมื่อ v_1 และ v_2 เป็น

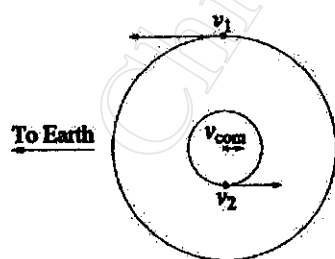
ความเร็วในแนวเส้นสายตาของมวล m_1 และ m_2 ตามลำดับ ในความเป็นจริง ความเร็วในแนวเส้นสายตาที่วัดได้จริงขึ้นอยู่กับตำแหน่งของดาว ณ ขณะนั้น และถ้าทิศการเคลื่อนที่ของดาวตั้งฉากกับแนวเส้นสายตา ดังนั้น ความเร็วในแนวเส้นสายตาที่วัดได้ จะมีค่าเท่ากับ ศูนย์

สำหรับระบบของดาวที่มีวงโคจรแบบวงกลม ทำให้อัตราเร็วของดาวแต่ละดวงคงที่ ถ้าระนาบของวงโคจรอยู่ในแนวเส้นสายตาของผู้สังเกต ($i = 90^\circ$) ดังนั้น ความเร็วในแนวเส้นสายตาที่วัดได้จะให้เส้นโค้งของความเร็วแบบฟังก์ชันไซน์ (sinusoidal velocity curves) ดังรูปที่ 2-18 การเปลี่ยนมุมอินคลิเนชันไม่ได้ทำให้รูปร่างของเส้นโค้งความเร็วเปลี่ยนแปลง แต่เปลี่ยนแปลงเฉพาะอัมพลิจูดด้วยแฟกเตอร์ $\sin i$

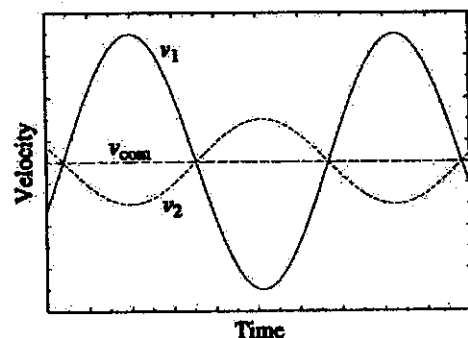
เมื่อความริชของวงโคจร e ไม่เป็นศูนย์ จะทำให้เส้นโค้งความเร็วที่วัดได้เกิดการเบ้ (skewed) ดังรูปที่ 2-19 รูปร่างแน่นอนของเส้นโค้งขึ้นอยู่กับทิศทางของวงโคจรเทียบกับผู้สังเกตอย่างมากหรือมุม i ที่กำหนด



รูปที่ 2-17 วงโคจรแบบวงรีที่โปรเจกชันบนระนาบของท้องฟ้าจะได้วงโคจรแบบวงรีที่สังเกตเห็น เห็นว่า จุดโฟกัสของวงรีเดิมไม่ได้โปรเจกชันบนจุดโฟกัสของวงรีที่สังเกตเห็น [Carroll and Ostlie, 1996]

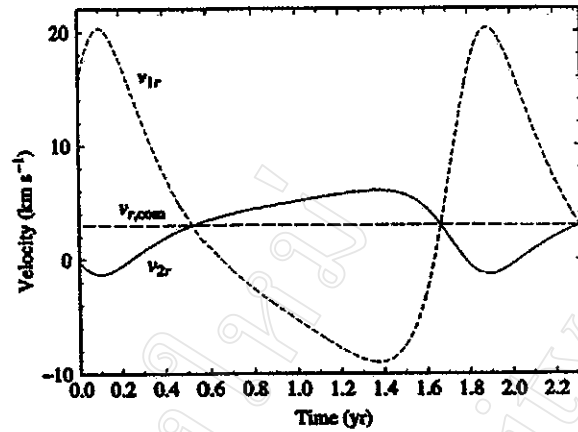


(a)



(b)

รูปที่ 2-18 (a). วงโคจรแบบวงกลม 2 วงที่ระนาบการโคจรอยู่ในแนวเส้นสายตาของผู้สังเกต, (b). เส้นโค้งความเร็วในแนวเส้นสายตาที่สังเกตได้ เมื่อ v_1 , v_2 , และ v_{com} เป็นความเร็วของดาว 1, ดาว 2, และศูนย์กลางมวล ตามลำดับ [Carroll and Ostlie, 1996]



รูปที่ 2-19 ความเร็วและทิศทางของวงโคจรเป็นตัวกำหนดรูปร่างของเส้นโค้งความเร็วในแนวเส้นสายตา ในกรณีนี้ $M_1 = 0.5M_{Sun}$, $M_2 = 2.0M_{Sun}$, $a = 2 \text{ AU}$, $e = 0.3$, $i = 30^\circ$ พร้อมกับการหมุนแกน = 45° [Carroll and Ostlie, 1996]

ระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปีจำนวนมากค่อนข้างมีวงโคจรแบบวงกลม เพราะว่า ระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด (close binaries) มีแนวโน้มที่วงโคจรเป็นแบบวงกลม เนื่องมาจากอันตรกิริยาไทดัล (tidal interactions) ระหว่างดาวสมาชิกตลอดระยะเวลา ซึ่งสั้นเมื่อเทียบกับเวลาชีวิตของดาวที่สัมพันธ์กัน

ถ้าสมมติว่า ความเร็วของวงโคจรมีค่าน้อยมากๆ ($e \ll 1$) ดังนั้น อัตราเร็วของดาวจะให้คงที่ และกำหนดให้ $v_1 = 2\pi a_1 / P$ และ $v_2 = 2\pi a_2 / P$ สำหรับดาวมวล m_1 และ m_2 ตามลำดับ เมื่อ a_1 และ a_2 เป็นรัศมี (ระยะครึ่งแกนเอก) และ P เป็นคาบของการโคจร แก้สมการหา a_1 และ a_2 แล้วแทนในสมการ(2.71)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1} \quad (2.71)$$

เมื่อ r_1 เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{r}_1$ ($\vec{r}_1$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของมวล m_1 เทียบกับจุดกำเนิด) และ r_2 เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{r}_2$ ($\vec{r}_2$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของมวล m_2 เทียบกับจุดกำเนิด) จะได้อัตราส่วนมวลของดาว 2 ดวง คือ

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad (2.72)$$

เมื่อ v_1 , v_2 เท่ากับความเร็วในการโคจรจริง (ความเร็วเชิงเส้น) จาก $v_{1r} = v_1 \sin i$ และ $v_{2r} = v_2 \sin i$ จะสามารถเขียนสมการ(2.72) ให้อยู่ในเทอมของความเร็วในแนวเส้นสายตา คือ

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_{2r} / \sin i}{v_{1r} / \sin i} = \frac{v_{2r}}{v_{1r}} \quad (2.73)$$

ซึ่งเห็นว่า สามารถหาอัตราส่วนมวลของดาวได้โดยไม่ต้องทราบค่ามุมอินคลิเนชัน

แต่ผลรวมของมวลจำเป็นต้องทราบมุมอินคลิเนชัน ซึ่งหาได้โดยแทนค่า a ด้วย

$$a = a_1 + a_2 = \frac{P}{2\pi} (v_1 + v_2)$$

ซึ่งได้จากความสัมพันธ์ $v_1 = 2\pi a_1 / P$ และ $v_2 = 2\pi a_2 / P$ และใช้กฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์จากสมการ(2.61) และแก้สมการหาผลรวมของมวลได้เท่ากับ

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^3 \quad (2.74)$$

แล้วเขียนความเร็วในแนวเส้นสายตาในเทอมของค่าจากการสังเกต โดยใช้ความสัมพันธ์ $v_{1r} = v_1 \sin i$ และ $v_{2r} = v_2 \sin i$ เราจะได้ผลรวมของมวลเท่ากับ

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_{1r} + v_{2r})^3}{\sin^3 i} \quad (2.75)$$

เห็นชัดว่า สมการ(2.75) ที่เป็นผลรวมของมวลจะสามารถหาได้ ก็ต่อเมื่อทั้ง v_{1r} และ v_{2r} วัดได้ แต่จะหาไม่ได้สำหรับกรณีนี้ถ้าดาวดวงหนึ่งสว่างกว่าดาวสมาชิกของมันมาก ๆ เป็นเหตุให้สเปกตรัมของดาวสมาชิกของมันถูกทับซ้อนไม่สามารถสังเกตเห็น เรียกแบบนี้ว่า ระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปีแบบเส้นเดี่ยว (single-line spectroscopic binary) ถ้าสเปกตรัมของดาว 1 สามารถสังเกตได้ ขณะที่สเปกตรัมของดาว 2 ไม่สามารถสังเกตได้ ดังนั้น จากสมการ(2.73) ให้แทน v_{2r} ด้วยอัตราส่วนมวลของดาว ซึ่งขึ้นอยู่กับทั้งมวลของระบบและมุมอินคลิเนชัน แล้วแทนในสมการ(2.75) จะได้

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{v_{1r}^3}{\sin^3 i} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^3$$

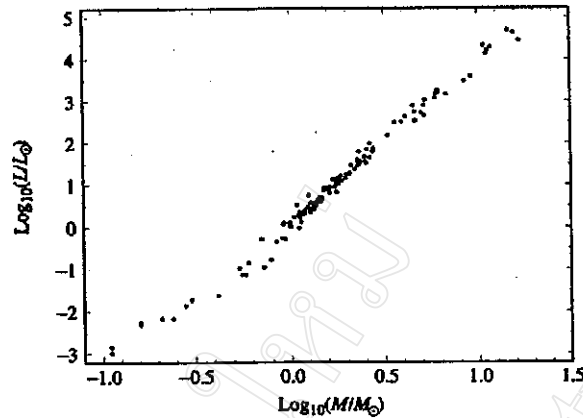
หรือ จัดใหม่เป็น

$$\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} v_{1r}^3 \quad (2.76)$$

ด้านขวาของสมการนี้คือ ฟังก์ชันของมวล (mass function) ซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณที่สามารถสังเกตได้เท่านั้น เช่น คาบ และความเร็วในแนวเส้นสายตา เมื่อสเปกตรัมของดาวเพียงดวงเดียวสามารถนำมาวิเคราะห์ จึงทำให้สมการ(2.73) ไม่สามารถให้ข้อมูลใดๆ เกี่ยวกับอัตราส่วนของมวล ขณะที่ ผลลัพธ์ของฟังก์ชันของมวล มีประโยชน์เฉพาะการศึกษาทางสถิติหรือถ้าจะประมาณมวลของดาวดวงเดียวของระบบที่ปรากฏอยู่ก็ทำได้ โดยวิธีทางอ้อม เช่น ถ้าไม่ทราบค่าใดค่าหนึ่งระหว่าง m_1 หรือ $\sin i$ ดังนั้น ฟังก์ชันของมวลจะกำหนดเป็นขีดที่ต่ำกว่า (lower limit) ของมวล m_2 เมื่อด้านซ้ายของสมการมีค่าน้อยกว่า m_2 เสมอ

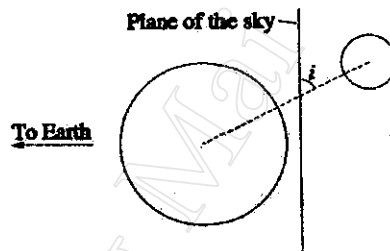
แม้ว่าถ้าความเร็วในแนวเส้นสายตาสามารถวัดได้ แต่เป็นไปได้ที่จะได้ค่าแน่นอนของมวล m_1 และ m_2 โดยไม่ทราบค่า i อย่างไรก็ตาม เมื่อดาวสามารถจัดกลุ่มได้ตามอุณหภูมิสัมฤทธิ์และกำลังความส่องสว่าง และสมมติว่า ปริมาณเหล่านี้มีความสัมพันธ์กับมวล ดังนั้น การประมาณมวลทางสถิติ (statistical mass) สำหรับแต่ละชนิดอาจหาโดยการเลือกค่าเฉลี่ยเหมาะสมของ $\sin^3 i$ ค่าเฉลี่ยของการอินทิเกรตของ $\sin^3 i$ (หรือ $\langle \sin^3 i \rangle$) ที่คำนวณจากค่ามุม 0° ถึง 90° มีค่าเท่ากับ 0.42 อย่างไรก็ตาม ถ้า $i = 0^\circ$ จะไม่มีการเลื่อนดอปเปลอร์, และถ้า i มีค่าไม่เป็นศูนย์ระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปีจะถูกตรวจพบ ผลกระทบของการเลือก (selection effect) นี้ชี้ให้เห็นว่า ค่าที่สูงกว่า $\langle \sin^3 i \rangle \sim 2/3$ จะมีความเหมาะสมอย่างมาก

ค่ามวลของระบบดาวคู่มีการคำนวณไว้อยู่ในรูปของ ความสัมพันธ์ระหว่างมวลและกำลังความส่องสว่าง (mass-luminosity relation) สำหรับดาวหลักๆ ที่เห็นบนท้องฟ้า ดังรูปที่ 2-20



รูปที่ 2-20 ความสัมพันธ์ระหว่างมวลและกำลังความส่องสว่าง ของ Popper ในปี พ.ศ. 2523 [Carroll and Ostlie, 1996]

ค่าประมาณอย่างดีของ i มีความเป็นไปได้ในสถานการณ์พิเศษที่ระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปีถูกสังเกตได้ว่าเป็นระบบดาวคู่อุปราคาด้วย เว้นแต่ ระยะห่างกันระหว่างสมาชิกต้องไม่มากกว่ารัศมีของดาวที่เกี่ยวข้องมากเกินไป ระบบดาวคู่อุปราคาถือว่า i ต้องใกล้เคียง 90° ดังรูปที่ 2-21 แม้ว่าถ้าสมมติให้ $i = 90^\circ$ ขณะที่ค่าแท้จริงใกล้เคียง 75° แต่มีค่าผิดพลาด (error) เพียง 10% เท่านั้นในผลการคำนวณ $\sin^3 i$ และ $m_1 + m_2$



รูปที่ 2-21 เรขาคณิตของระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปีอุปราคา ที่มุมอินคลิเนชันต้องมีค่าใกล้เคียง 90°

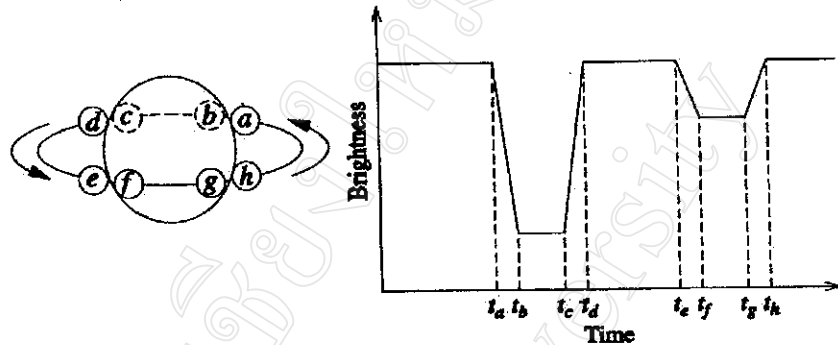
สามารถใช้กราฟแสงจากดาวคู่อุปราคา แก้ไขค่าประมาณ i ให้ดีขึ้น รูปที่ 2-22 ชี้ว่าถ้าดาวดวงเล็กกว่าถูกบังอย่างสมบูรณ์โดยดาวดวงใหญ่กว่า ค่าความสว่างต่ำสุดเกือบคงตัวจะเกิดขึ้นในระหว่างคาบของการบังสูงสุด (occultation) ทำนองเดียวกัน เมื่อดาวดวงใหญ่กว่าถูกบังแบบไม่เต็มจากดาวดวงเล็กกว่า พื้นที่ที่ถูกบังจะยังคงที่เป็นระยะเวลาหนึ่ง และรูปที่ 2-23 ดาวไม่ได้ถูกบังอย่างสมบูรณ์โดยดาวที่เป็นสมาชิกของมันค่าความสว่างต่ำสุดจะไม่ให้ค่าคงที่อีกต่อไป ซึ่งถือว่า i ต้องมีค่าน้อยกว่า 90°

ใช้การวัดช่วงเวลาของการบังกัน หารัศมีของดาวสมาชิกแต่ละดวงของดาวคู่สเปกโตรสโคปีอุปราคา ดูรูปที่ 2-22 ถ้าเราสมมติว่า $i \approx 90^\circ$ ดังนั้น ช่วงเวลาระหว่างจุดสัมผัสลำดับที่ 1 (t_a) และจุดที่ความสว่างต่ำสุดลำดับที่ 1 (t_b) พร้อมกับความเร็วของดาว จะทำให้คำนวณรัศมีของดาวดวงเล็กกว่าได้โดยตรง เช่น ถ้าระยะครึ่งแกนเอกของวงโคจรของดาวดวงเล็กกว่า ยาวอย่างเพียงพอเมื่อเทียบกับรัศมีของดาวดวงใดดวงหนึ่ง และถ้าวงโคจรเกือบเป็นวงกลมจะสามารถประมาณว่าดาวดวงเล็กกว่ากำลังเคลื่อนที่ในทิศตั้งฉากกับแนวเส้นสายตาของผู้สังเกตในช่วงเวลาของการบัง ในกรณีนี้รัศมีของดาวดวงเล็ก คือ

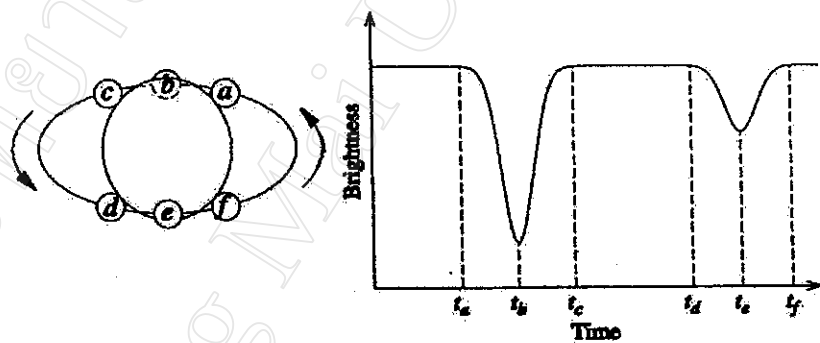
$$r_s = \frac{v}{2}(t_b - t_a) \quad (2.77)$$

เมื่อ $v = v_s + v_l$ เป็นความเร็วสัมพัทธ์ของดาว 2 ดวง (v_s, v_l เป็นความเร็วของดาวดวงเล็ก และดาวดวงใหญ่ ตามลำดับ) ทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาช่วงเวลาระหว่าง t_b และ t_c ก็จะสามารถหาขนาดของดาวดวงใหญ่กว่าได้นั่นคือ

$$r_l = \frac{v}{2}(t_c - t_a) = r_s + \frac{v}{2}(t_c - t_b) \quad (2.78)$$



รูปที่ 2-22 กราฟแสงของระบบดาวคู่อุปราคาสำหรับ $i = 90^\circ$ เวลาที่แสดงบนกราฟแสงตรงกับตำแหน่งของดาวดวงเล็กกว่าเทียบกับดาวดวงใหญ่กว่า โดยรูปนี้เป็นตัวอย่างจากการสมมติว่าดาวดวงเล็กร้อนกว่าดาวดวงใหญ่



รูปที่ 2-23 กราฟแสงของระบบดาวคู่อุปราคาบางส่วน (partially eclipsing binary) โดยรูปนี้เป็นตัวอย่างจากการสมมติว่าดาวดวงเล็กร้อนกว่าดาวดวงใหญ่

อัตราส่วนอุณหภูมิสัมพัทธ์ของดาว 2 ดวง สามารถหาได้จากกราฟแสงของระบบดาวคู่อุปราคา โดยพิจารณาดาวเป็นวัตถุดำ (BB radiators) และเปรียบเทียบปริมาณแสงที่วัดได้ในช่วงเวลาบังกับปริมาณแสงที่วัดได้เมื่อดาวสมาชิกทั้งสองเห็นเต็มดวง (ไม่มีการบัง)

รูปที่ 2-22 จะสังเกตเห็นว่า การลดลงในกราฟแสงส่วนที่ให้ความลึกมากกว่า เกิดขึ้นเมื่อดาวดวงเล็กที่ร้อนกว่าไปอยู่ด้านหลังของดาวดวงใหญ่ การทำความเข้าใจเหตุการณ์นี้ ให้ย้อนไปพิจารณาฟลักซ์ของพื้นผิวของการแผ่รังสี (radiative surface flux) จากสมการ (2.25) นั่นคือ

$$F_r = F_{surf} = \sigma T_e^4$$

ไม่ต้องคำนึงว่าดาวดวงเล็กกว่าผ่านไปอยู่ด้านหลังหรือด้านหน้าของดาวดวงใหญ่กว่า เพราะว่า พื้นที่ภาคตัดขวางรวม (total cross-sectional area) ที่ถูกบังมีค่าเท่ากัน แล้วให้สมมติว่า ฟลักซ์ที่สังเกตได้มีค่าคงที่ทั่วทั้งดิสก์ (เมื่อดิสก์ คือ แผ่นกลมแทนขนาด 2 มิติของดาวจากการมอง) เมื่อดาวทั้งคู่สามารถเห็นได้เต็มดวง ดังนั้น ปริมาณแสงที่วัดได้จากระบบดาวคู่ คือ

$$B_0 = k(\pi r_1^2 F_H + \pi r_s^2 F_{rs})$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับระยะทางของผู้สังเกตถึงระบบดาวคู่และธรรมชาติของเครื่องมือวัด ความสว่างส่วนที่ลึกมากกว่า หรืออุปราคาปฐมภูมิ (deeper or primary minimum) เกิดขึ้นเมื่อดาวที่ร้อนกว่า ผ่านไปอยู่ด้านหลังดาวที่เย็นกว่า สมมติว่าดาวดวงเล็กกว่ามีความร้อนมากกว่า ซึ่งจะทำให้มันมีฟลักซ์ของ พื้นผิวที่มากกว่า ดังนั้น ปริมาณของแสงที่วัดได้ในระหว่างเกิดอุปราคาปฐมภูมิ (primary minimum) คือ

$$B_p = k\pi r_1^2 F_H$$

ขณะเดียวกัน ความสว่างของอุปราคาทุติยภูมิ (secondary minimum) คือ

$$B_s = k(\pi r_1^2 - \pi r_s^2) F_H + k\pi r_s^2 F_{rs}$$

เมื่อ อุปราคาทุติยภูมิคือ ความสว่างส่วนที่ลึกน้อยกว่าของกราฟแสง

โดยทั่วไป ไม่มีความเป็นไปได้ที่จะหาค่า k ที่แน่นอน ดังนั้น จึงต้องใช้ประโยชน์ของการคำนวณ อัตราส่วน พิจารณาอัตราส่วนความลึกของอุปราคาปฐมภูมิต่อความลึกของอุปราคาทุติยภูมิ โดยใช้สมการ ของ B_0 , B_p , และ B_s จะได้

$$\frac{B_0 - B_p}{B_0 - B_s} = \frac{F_{rs}}{F_H} \quad (2.79)$$

หรืออยู่ในรูป [เมื่อใช้สมการ (2.25)]

$$\frac{B_0 - B_p}{B_0 - B_s} = \left(\frac{T_s}{T_1} \right)^4 \quad (2.80)$$

2.5 วิวัฒนาการของระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด

ประกอบด้วย 2.5.1 โครงสร้างความโน้มถ่วงของระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด, 2.5.2 วิวัฒนาการของ ระบบดาวคู่แบบความมวลมาก, และ 2.5.3 วิวัฒนาการของระบบดาวคู่แบบความมวลน้อย

2.5.1 โครงสร้างความโน้มถ่วงของระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด

พิจารณาดาวสองดวงในวงโคจรแบบวงกลม ในระนาบ x-y เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุม (angular velocity) คือ

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} \quad (2.81)$$

เมื่อ v_1 และ r_1 เป็นอัตราเร็วของการโคจร (orbital speed) และระยะทางถึงจุดศูนย์กลางมวลของระบบ ของ ดาวปฐมภูมิ (primary star) ตามลำดับ, และ v_2 และ r_2 เป็นอัตราเร็วของการโคจร และระยะทางถึงจุดศูนย์กลาง มวลของระบบ ของดาวทุติยภูมิ (secondary star) ตามลำดับ ระบบพิกัดที่ใช้คือระบบพิกัดแบบหมุน พร้อมกัน (corotating coordinate system) ที่เป็นการหมุนของดาว 2 ดวงรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบ ของดาวทั้งสองนี้ ถ้าศูนย์กลางมวลของระบบอยู่ที่จุดกำเนิด ดังนั้น ดาวทั้งสองจะอยู่นิ่งๆ ในกรอบอ้างอิง แบบหมุนนี้ ด้วยสมดุลระหว่างแรงดึงดูดโน้มถ่วงที่กระทำต่อกันและแรงหนีศูนย์กลาง (centrifugal force) ซึ่งเป็นแรงผลึกออก เวกเตอร์แรงหนีศูนย์กลางที่กระทำต่อมวล m ในกรอบอ้างอิงนี้ที่ r จากจุดกำเนิด คือ

$$\vec{F}_c = m\omega^2 r \hat{r} \quad (2.82)$$

อยู่ในทิศออกตามแนวรัศมี

พลังงานศักย์โน้มถ่วง (gravitational potential energy) ระหว่างมวล m และ M คือ

$$U_g = -G \frac{Mm}{r} \quad (2.83)$$

เมื่อ r เป็นระยะทางระหว่างมวล M และ m ในระบบพิกัดแบบหมุนนี้จะก่อให้เกิดมีพลังงานศักย์หนีศูนย์กลางเทียม (fictitious “centrifugal potential energy”) เกิดขึ้นด้วย คือ

$$U_c = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (2.84)$$

รูปที่ 2-24 แสดงระบบพิกัดแบบหมุนพร้อมกัน ประกอบด้วย ดาว 2 ดวง มวล M_1 และ M_2 มีระยะห่างกันเท่ากับ a , ตำแหน่งของดาวบนแกน x คือ r_1 และ r_2 ตามลำดับ จากศูนย์กลางมวลที่กำหนดให้มีตำแหน่งอยู่ที่จุดกำเนิด ดังนั้น

$$r_1 + r_2 = a \quad \text{และ} \quad M_1 r_1 = M_2 r_2 \quad (2.85)$$

พลังงานศักย์สัมฤทธิ์ (effective potential energy) ที่กระทำต่อมวลทดสอบ m ในระนาบวงโคจร คือ

$$U = -G \left(\frac{M_1 m}{s_1} + \frac{M_2 m}{s_2} \right) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (2.86)$$

หารสมการ(2.86) ด้วย m จะได้ ศักย์โน้มถ่วงสัมฤทธิ์ (effective gravitational potential) คือ

$$\Phi = -G \left(\frac{M_1}{s_1} + \frac{M_2}{s_2} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad (2.87)$$

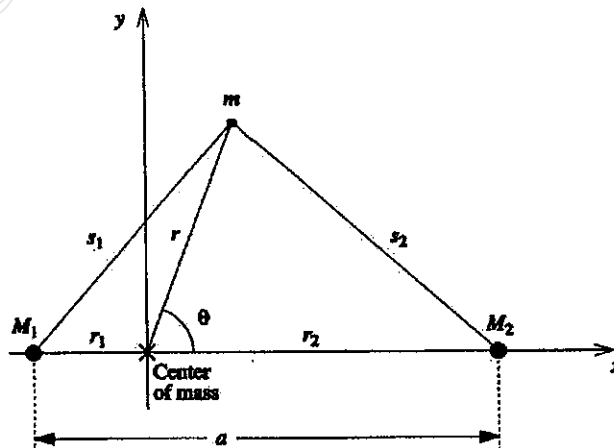
เมื่อ Φ เป็นพลังงานศักย์สัมฤทธิ์ต่อมวลขนาดหนึ่งหน่วย มีหน่วยเป็น ergs g^{-1} , ระยะทาง s_1 และ s_2 หาได้จากกฎของโคไซน์ (law of cosines) นั่นคือ

$$s_1^2 = r_1^2 + r^2 + 2r_1 r \cos \theta \quad (2.88)$$

$$s_2^2 = r_2^2 + r^2 - 2r_2 r \cos \theta$$

ความถี่เชิงมุมของการโคจร ω หาจากกฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์สำหรับคาบการโคจร P ของสมการ(2.61) คือ

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \quad (2.89)$$



รูปที่ 2-24 แสดงพิกัดแบบหมุนพร้อมกัน ของระบบดาวคู่

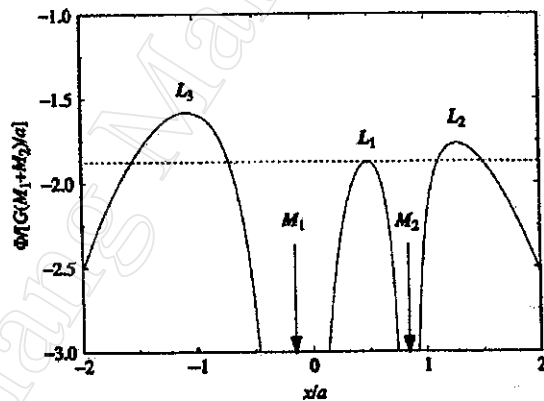
สมการ(2.85) ถึง (2.89) สามารถใช้หาค่าศักย์โน้มถ่วงสัมฤทธิ์ Φ ที่ทุกจุดในระนาบของการโคจรของระบบดาวคู่ ยกตัวอย่างเช่น รูปที่ 2-25 แสดงค่า Φ ในแนวแกน x ความหมายของกราฟนี้จะชัดเจนเมื่อแรงในแนวแกน x ที่กระทำบนมวลทดสอบขนาดเล็ก m ที่เริ่มจากอยู่นิ่งบนแกน x เท่ากับ

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -m \frac{d\Phi}{dx} \quad (2.90)$$

จุดยอดของเส้นโค้ง 3 จุด แทนด้วย L_1 , L_2 , และ L_3 คือจุดลากรางเจียน (Lagrangian points) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ไม่มีแรงกระทำต่อมวลทดสอบ ($d\Phi/dx = 0$) จุดสมดุล 3 จุดนี้มีแรงโน้มถ่วงกระทำบนมวล m เนื่องจากมวล M_1 และ M_2 สมดุลกับแรงหนีศูนย์กลาง จุดสมดุลเหล่านี้ไม่มีเสถียรภาพ เพราะว่า จุดเหล่านี้ให้ค่าสูงสุดเฉพาะที่ (local maximum) ของ Φ ถ้ามวลทดสอบถูกทำให้เคลื่อนที่เล็กน้อย เครื่องหมายลบในสมการ(2.90) หมายความว่า มันจะถูกเร่งสู่เบื้องล่างออกจากตำแหน่งสมดุลของมัน จุดลากรางเจียนชั้นใน (inner Lagrangian point) L_1 แสดงหน้าที่หลักในระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด นิพจน์โดยประมาณสำหรับระยะทางจาก L_1 ถึง M_1 และ M_2 แทนด้วย l_1 และ l_2 ตามลำดับ คือ

$$l_1 = a \left[0.500 - 0.227 \log_{10} \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \right] \quad (2.91)$$

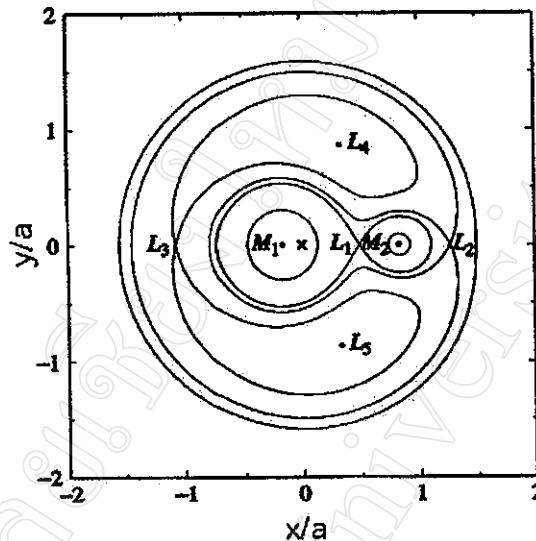
$$l_2 = a \left[0.500 + 0.227 \log_{10} \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \right] \quad (2.92)$$



รูปที่ 2-25 ศักย์โน้มถ่วงสัมฤทธิ์ Φ สำหรับดาว 2 ดวง มวล $M_1 = 0.85M_{\text{sun}}$, $M_2 = 0.17M_{\text{sun}}$ บนแกน x กำหนดให้ระยะห่างกันของดาวสมาชิกเท่ากับ $a = 5 \times 10^{10} \text{ cm} = 0.718R_{\text{sun}}$ พร้อมกับจุดศูนย์กลางมวลของระบบอยู่ที่จุดกำเนิด แกน x อยู่ในหน่วยของ a และ Φ แสดงในหน่วยของ $G(M_1+M_2)/a = 2.71 \times 10^{15} \text{ ergs g}^{-1}$ เส้นประคือ ค่า Φ ที่จุดลากรางเจียนชั้นใน ถ้าพลังงานรวมต่อกรัมของอนุภาคเกินค่า Φ นี้ อนุภาคนั้นจะสามารถไหลผ่านจุดลากรางเจียนชั้นในระหว่างดาว 2 ดวง [Carroll and Ostlie, 1996]

จุดในปริภูมิที่ใช้ค่า Φ เดียวกันรวมกันเป็นรูปร่าง เรียกว่า พื้นผิวสมศักย์ (equipotential surfaces) รูปที่ 2-26 แสดงคอนทัวร์สมศักย์ (equipotential contours) เป็นรูปร่างที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิวสมศักย์หลายๆ ชั้นกับระนาบของการโคจร พื้นผิวสมศักย์ที่อยู่ใกล้อย่างมากกับมวลใดมวลหนึ่งของ M_1 หรือ M_2 จะมีรูปร่างเกือบเป็นทรงกลมและมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่มวลของดาวแต่ละดวง ที่ระยะห่างออกไปจะมีอิทธิพลความโน้มถ่วงร่วมกันของมวล M_1 และ M_2 เป็นเหตุให้พื้นผิวสมศักย์มีรูปร่างบิดเบี้ยวเป็นรูปร่าง

แบบหยคน้ำตา (teardrop shapes) จนกระทั่งมีชั้นสุดท้ายสัมผัสกันที่จุดลากรางเจียนชั้นใน ที่ระยะห่างออกไปอีกรูปร่างของพื้นผิวสมศักย์เป็นรูปร่างแบบคัมป์เบลล์ (dumbbell shape) ล้อมรอบมวลทั้งสอง ซึ่งโครงสร้างความโน้มถ่วงของระบบดาวคู่ ดังรูปที่ 2-26 นี้ เป็นผลเนื่องมาจากอันตรกิริยาไทดอล (ในหัวข้อ 2.3.3)



รูปที่ 2-26 คอนทัวร์สมศักย์ สำหรับระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด มวล $M_1 = 0.85M_{\text{Sun}}$, $M_2 = 0.17M_{\text{Sun}}$ และ $a = 5 \times 10^{10} \text{ cm} = 0.718R_{\text{Sun}}$ แกนอยู่ในหน่วยของ a พร้อมกับจุดศูนย์กลางมวลของระบบ ($\times$) อยู่ที่จุดกำเนิด เริ่มจากคอนทัวร์ (เส้นโค้ง) ด้านบนของรูปและเลื่อนลงมาที่จุดศูนย์กลางมวล ค่าของ Φ (ในหน่วยของ $G(M_1 + M_2)/a = 2.71 \times 10^{15} \text{ ergs g}^{-1}$) สำหรับเส้นโค้งสมศักย์ $\Phi = -1.875, -1.768, -1.583, -1.583, -1.768$ (รูปคัมป์เบลล์), -1.875 (รูปโรชโลบ), และ -3 (รูปทรงกลม) จุด L_4 และ L_5 เป็นศักย์สูงที่สุดเฉพาะที่ด้วย $\Phi = -1.431$ [Carroll and Ostlie, 1996]

พื้นผิวสมศักย์เหล่านี้เป็นพื้นผิวแบบชั้น (level surfaces) ของดาวคู่ ในระบบดาวคู่ เช่น ดาวดวงหนึ่งมีวิวัฒนาการ มันจะขยายตัวจนเต็มและโตกว่าพื้นผิวสมศักย์อย่างต่อเนื่อง เพื่อให้มองเห็นภาพ เราจะพิจารณาว่า แรงโน้มถ่วงสัมฤทธิ์ที่แต่ละจุดมีทิศตั้งฉากกับพื้นผิวสมศักย์นั้นเสมอ สภาวะสมดุลทางไฮโดรสแตติก (hydrostatic equilibrium) ยืนยันว่าความดันมีค่าคงที่ในแนวพื้นผิวที่ Φ คงที่ ดังนั้น จึงไม่มีองค์ประกอบของแรงโน้มถ่วงขนานกับพื้นผิวสมศักย์ และผลต่างของความดันในทิศนั้นไม่สามารถอยู่ในสมดุลและคงอยู่ได้ เพราะว่า ความดันเกิดจากน้ำหนักของชั้นมวลที่ซ้อนๆ กันของดาว ดังนั้นความหนาแน่นต้องเท่ากันด้วยในแนวพื้นผิวสมศักย์แต่ละผิว เพื่อให้ความดันคงที่ ณ ที่นั้นๆ

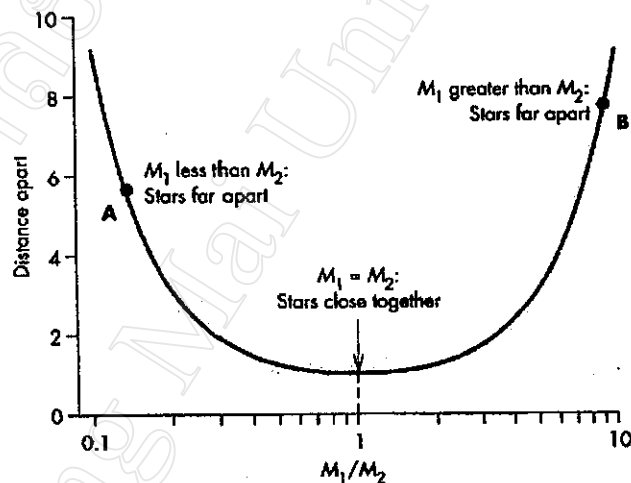
ลักษณะปรากฏของระบบดาวคู่ขึ้นอยู่กับพื้นผิวสมศักย์ไหนถูกทำให้เต็มด้วยขนาดของดาว ดาวคู่ที่รัศมีน้อยกว่าระยะห่างกันของดาวสมาชิกมากๆ จะมีรูปร่างเกือบเป็นทรงกลม (วงกลมเล็ก ดังรูปที่ 2-26) ระบบลักษณะนี้ เรียกว่า ระบบดาวคู่แบบแยกกัน (detached binary) ที่ดาววิวัฒนาการค่อนข้างอิสระจากกัน

ถ้าดาวดวงหนึ่งขยายตัวจนเต็มคอนทัวร์รูปเลขแปด ดังรูปที่ 2-26 ดังนั้น ก๊าซของบรรยากาศของมันสามารถหนีผ่านจุดลากรางเจียนชั้นใน L_1 ตกสู่ดาวสมาชิกของมัน บริเวณรูปร่างแบบหยคน้ำตาของปริภูมิที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิวสมศักย์รูปเลขแปดนี้ ถูกเรียกว่า โรชโลบ (Roche lobes) การส่งถ่ายมวล (transfer of mass) จากดาวดวงหนึ่งไปยังดาวอีกดวงสามารถเริ่มเกิดได้เมื่อดาวดวงใดดวงหนึ่งขยายตัวพ้น

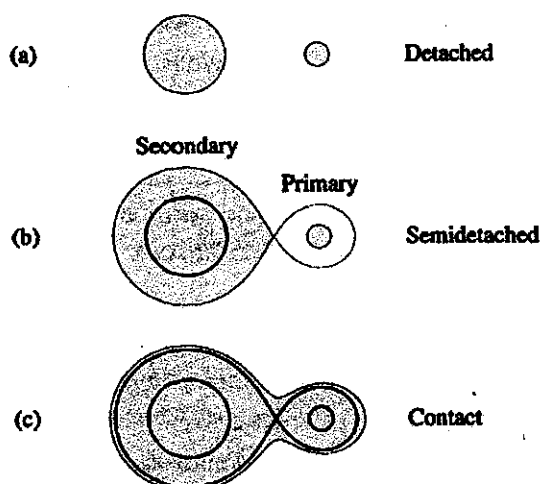
โรสโบลของมัน ระบบลักษณะนี้ ถูกเรียกว่า ระบบดาวคู่แบบกึ่งแยกกัน (semidetached binary) ดาวที่มีขนาดเต็มโรสโบลของมันและเป็นฝ่ายสูญเสียมวล ปกติถูกเรียกว่า ดาวทุติยภูมิ มีมวล M_2 และดาวสมาชิกของมัน จะเรียกว่า ดาวปฐมภูมิ มีมวล M_1 ซึ่งดาวปฐมภูมิอาจมีมวลมากกว่าหรือน้อยกว่าดาวทุติยภูมิก็ได้

มวลที่ถูกถ่ายจากดาวสมาชิกดวงหนึ่งของระบบดาวคู่ไปสู่ดาวอีกดวง การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมจะเป็นสาเหตุทำให้ระยะห่างกันของดาวและการโคจรของระบบเปลี่ยนแปลง ถ้าดาวทั้งสองมีมวลมากจนเกือบเท่ากันจะส่งผลให้ระยะห่างกันของดาวสั้นลง ดูรูปที่ 2-27 ถ้าดาวมวลมากเป็นฝ่ายสูญเสียมวลจะทำให้การส่งถ่ายมวลเป็นไปอย่างรวดเร็ว แต่ถ้าดาวมวลน้อยเป็นฝ่ายสูญเสียมวลจะทำให้การส่งถ่ายมวลเป็นไปค่อนข้างช้า

สำหรับกรณีดาวทั้งสองดวงมีขนาดเต็มโรสโบล หรือพื้นโรสโบลของทั้งสองดวง ในกรณีนี้ดาวทั้งสองดวงจะใช้บรรยากาศร่วมกันที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิวสมศักย์รูปคัมภ์เบลล์ ดังนั้น จึงมีมวลไหลผ่านจุดลากรางเจียน L_2 ระบบลักษณะนี้ ถูกเรียกว่า ระบบดาวคู่แบบติดกัน (contact binary) ดังรูปที่ 2-28



รูปที่ 2-27 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างกันของดาวสมาชิกกับอัตราส่วนมวลของดาวทั้งสอง ในระบบดาวคู่ [Fix, 1995]



รูปที่ 2-28 ชนิดของระบบดาวคู่ (a). แสดงระบบดาวคู่แบบแยกกัน, (b). แสดงระบบดาวคู่แบบกึ่งแยกกัน ที่ดาวทุติยภูมิขยายตัวเต็มโรสโบลของมัน, และ (c). แสดงระบบดาวคู่แบบติดกัน

2.5.2 วิวัฒนาการของระบบดาวคู่แบบความมวลมาก (The evolution of massive binaries)

มีการศึกษาวิวัฒนาการของระบบดาวคู่ไว้มากมาย และมีผลสรุปเกี่ยวกับวิวัฒนาการค่อนข้างเป็นไปได้โดยอาศัยทฤษฎีฟิสิกส์ ตามความเห็นของผู้เขียน วิทยานิพนธ์นี้ไม่ได้มุ่งเน้นศึกษาในเรื่องนี้ แต่เนื้อหาในเรื่องนี้ยังคงสำคัญอยู่สำหรับการวิเคราะห์ผลสังเกตการณ์ เช่น ชนิดสเปกตรัมของระบบดาวคู่สัมพันธ์กันอย่างไรกับลำดับวิวัฒนาการ เป็นต้น ซึ่งจะขอสรุปเป็นหลักการแบบย่อๆ

วิวัฒนาการของระบบดาวคู่แบบความมวลมาก เริ่มจากความมวลมากออกจากแถบขบวนหลักครั้งแรก ด้วยขนาดเต็มโรสโลบของมัน และถ่ายมวลให้กับดาวสมาชิก ลำดับต่อไปก็ถ่ายให้กับเอนเวลโลปร่วม (common envelope) ดาวคงเข้าหากันเนื่องจากแกนของดาว (stellar cores) สูญเสียโมเมนตัมเชิงมุมให้กับเอนเวลโลป (โดยแรงเสียดทานระหว่างแกนของดาวกับเอนเวลโลปร่วมทำให้อัตราเร็วของการโคจรช้าลง) และขับเอนเวลโลปร่วมทิ้ง เหลือระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดที่ความมวลมากกลายเป็นดาวนิวตรอนหรือหลุมดำที่บัดนี้กลายเป็นความมวลน้อยกว่าดาวสมาชิกของมัน ลำดับต่อไป ชีวิตของดาวจะวิวัฒนาการอย่างมีเสถียรภาพเป็นเวลายาวนาน พร้อมกับมีลมอนุภาคจากดาวสมาชิกขับออกมาสู่ compact object และเมื่อดาวสมาชิกมีขนาดเต็มโรสโลบของมัน จะเกิดการถ่ายมวลไปสู่ compact object ในที่สุดดาวสมาชิกกลายเป็น compact object ที่เหลือเพียงดวงเดียวในระบบ (ดาวรวมกัน) หรือเป็นระบบดาวคู่ที่ประกอบด้วยดาวนิวตรอน และ compact object เดิม ซึ่งเขียนเป็นลำดับวิวัฒนาการ ประมาณ 8 ถึง 10 ลำดับ คือ

1. ความมวลมากขยายตัว, ถ่ายมวลไปสู่ดาวสมาชิกของมันอย่างรวดเร็ว
2. เอนเวลโลปร่วมถูกสร้างล้อมรอบดาวทั้งสอง
3. ดาวคงเข้าหากัน, ขับเอนเวลโลปร่วมทิ้ง
4. บัดนี้ความมวลน้อยกลายเป็นความมวลมาก
5. ความมวลน้อยระเบิดแบบซูเปอร์โนวา, กลายเป็นหลุมดำ หรือดาวนิวตรอน
6. ความมวลมากสูญเสียมวลในรูปลมร้อน (hot wind)
7. ความมวลมากขยายตัว, สร้างเอนเวลโลปร่วม
8. วิวัฒนาการถูกแยกออกเป็น 2 เส้นทาง คือ
 - 8.1 ดาวรวมกันเป็นดาวเดี่ยวอยู่ในเอนเวลโลปร่วม
 - 8.2 เอนเวลโลปร่วมถูกขับออก, ความมวลมากระเบิดแบบซูเปอร์โนวา แล้ววิวัฒนาการต่อไปโดยแยกเป็น 2 เส้นทาง คือ
 - 8.2.1 ดาวลอยห่างจากกัน, เป็นจุดจบของระบบดาวคู่
 - 8.2.2 ดาวทั้งสองเป็น compact objects, และยังคงมีวงโคจรแบบปิด (close orbit)

2.5.3 วิวัฒนาการของระบบดาวคู่แบบความมวลน้อย (The evolution of low-mass binaries)

วิวัฒนาการของระบบดาวคู่แบบความมวลน้อย ตอนเริ่มต้นมีความคล้ายกันกับกรณีความมวลมาก เว้นแต่ ความมวลมากมีวิวัฒนาการกลายเป็นดาวแคระขาวที่มีมวลมากกว่าดาวสมาชิกของมัน หลังจากนั้นดาวสมาชิกมีขนาดเต็มโรสโลบ แล้วถ่ายมวลให้กับดาวแคระขาวด้วยคาบเวลายาวนาน เขียนเป็นลำดับวิวัฒนาการ ประมาณ 5 ลำดับ คือ

1. ความมวลมากขยายตัว, ถ้ามวลไปสู่ดาวสมาชิกอย่างรวดเร็ว
2. เอนเวลโลปร่วมถูกสร้างล้อมรอบดาวทั้งสอง
3. ดาวคงเข้าหากัน, จับเอนเวลโลปร่วมทั้งไป
4. บัดนี้ ความมวลมากกลายเป็นดาวแคระขาว
5. ความมวลน้อยขยายตัว, ถ้ามวลค่อนข้างช้ามาก ๆ สู่อาวสมาชิกของมัน

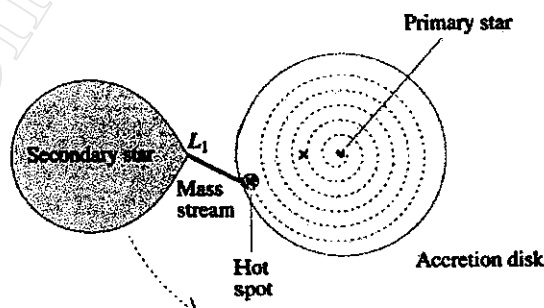
2.6 ระบบดาวคู่ที่มีสมาชิกเป็น Compact objects

ประกอบด้วย 2.6.1 แอครีชันดิสก์, 2.6.2 ระบบดาวคู่ที่มีสมาชิกดวงหนึ่งเป็นดาวแคระขาว, และ 2.6.3 ระบบดาวคู่ที่มีสมาชิกดวงหนึ่งเป็นดาวนิวตรอน หรือหลุมดำ

2.6.1 แอครีชันดิสก์ (Accretion disks)

compact object คือดาวแคระขาว (white dwarf), ดาวนิวตรอน (neutron star), หรือหลุมดำ (black hole) ถ้าสมาชิกดวงหนึ่งของระบบดาวคู่เป็น compact object จะทำให้มีปรากฏการณ์แปลกๆ และพลังงานสูง ส่วนใหญ่เกิดจากการถ่วงมวลระหว่างสมาชิก เนื่องจาก compact object มีขนาดเล็ก จึงทำให้มีแรงโน้มถ่วงสูงบริเวณใกล้พื้นผิว การตกลงของสสารสู่ compact object จะถูกเร่งให้มีอัตราเร็วสูงเปลี่ยนพลังงานศักย์โน้มถ่วงเป็นพลังงานจลน์ สำหรับดาวนิวตรอนและหลุมดำ ก๊าซถูกทำให้ร้อนจะแผ่รังสีอย่างแรงย่านรังสีเอกซ์ การตกลงของก๊าซสู่ดาวแคระขาวส่วนใหญ่แผ่รังสีในย่านอัลตราไวโอเลต

การเคลื่อนที่แบบวงโคจรของดาวคู่แบบกึ่งแยกกันทำให้มวลที่ถ่ายเทไม่ตกสู่ดาวปฐมภูมิโดยตรง ถ้ารัศมีของดาวปฐมภูมิน้อยกว่าระยะห่างกัน a ประมาณ 5% จะทำให้กระแสมวล (mass stream) ตกสู่พื้นผิวดาวปฐมภูมิพลาดเป่า ทำให้กระแสมวลไหลสู่วงโคจรรอบดาวปฐมภูมิรวมกันเป็นรูปร่างแอครีชันดิสก์บาง (thin accretion disk) ของก๊าซร้อนในระนาบการโคจร ดังรูปที่ 2-29 ความหนืด (viscosity) เป็นความเสียดทานภายในที่เปลี่ยนพลังงานจลน์ของมวลขนาดใหญ่เป็นการเคลื่อนที่เชิงความร้อนแบบสะเปะสะปะโดยตรง เป็นสาเหตุให้ก๊าซที่กำลังโคจรสูญเสียพลังงานและคงเข้าหาดาวปฐมภูมิอย่างช้าๆ แต่กลไกทางกายภาพสำหรับความหนืดในแอครีชันดิสก์ยังเข้าใจกันน้อย



รูปที่ 2-29 ดาวคู่แบบกึ่งแยกกัน ที่แสดงแอครีชันดิสก์ล้อมรอบดาวปฐมภูมิ และมี hot spot ซึ่งเป็นตำแหน่งที่กระแสมวลที่ไหลมาจากจุดลากรางเจียนชั้นในตกกระทบบนดิสก์ [Carroll and Ostlie, 1996]

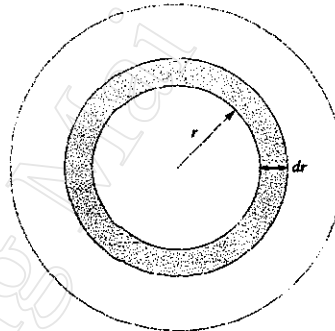
พิจารณาให้ดาวเป็นวัตถุดำ และมีแอครีชันดิสก์แบบ optically thick แผ่รังสีเหมือนวัตถุดำ แต่ละตำแหน่งในแนวรัศมีของดิสก์แบบ optically thick เปล่งรังสีของวัตถุดำเป็นสเปกตรัมแบบต่อเนื่องตรงกัน

กับอุณหภูมิของดิสก์เฉพาะที่ (local disk temperature) ที่ตำแหน่งในแนวรัศมีนั้น ทำการประมาณอุณหภูมิของแบบจำลองแอกครีชันดิสก์ที่ระยะ r จากจุดศูนย์กลางของดาวปฐมภูมิมวล M_1 , รัศมี R_1 โดยสมมติว่าความเร็วในแนวเส้นสายคาทิสเข้าหาผู้สังเกตของก๊าซของดิสก์มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเร็วของการโคจรของพวกมัน ดังนั้น การประมาณที่ดีจึงให้ก๊าซไหลตามวงโคจรเคปเลอร์แบบวงกลม (circular Keplerian orbits) และไม่คิดแรงหนืดภายในดิสก์ เนื่องจากมวลของดิสก์มีน้อยมากเมื่อเทียบกับมวลของดาวปฐมภูมิ ทำให้มวลสารที่กำลังโคจรรับรู้เฉพาะความโน้มถ่วงของดาวปฐมภูมิที่อยู่ตรงกลาง พลังงานรวม (พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์) ของมวล m ของก๊าซที่กำลังโคจร คือ

$$E = -G \frac{M_1 m}{2r} \quad (2.93)$$

ขณะก๊าซควบเข้า พลังงานรวม E ของมันจะคิดลบมากขึ้น พลังงานที่หายไปจะเป็นตัวรักษาอุณหภูมิของดิสก์ให้คงตัวและสุดท้ายเปล่งออกมาในรูปรังสีของวัตถุดำ

พิจารณาวงแหวนกลม รัศมี r , กว้าง dr ในดิสก์ ดังรูปที่ 2-30 ถ้าอัตราการถ่วงมวลจากดาวฤกษ์ไปสู่อาวปฐมภูมิมีค่าคงที่ $\dot{M}$ ดังนั้น ในช่วงเวลา t ปริมาณมวลที่ผ่านขอบนอกของวงแหวนเข้าไปมีค่าเท่ากับ $\dot{M}t$ สมมติ ดิสก์สถานะนิ่ง (steady-state disk) ไม่เปลี่ยนแปลงกับเวลา ทำให้ไม่มีการสะสมมวลภายในวงแหวน เพราะฉะนั้น ในช่วงเวลานี้ต้องมีมวลขนาด $\dot{M}t$ ผ่านขอบในของวงแหวนออกไปด้วย



รูปที่ 2-30 วงแหวน (จินตนาการ) วงหนึ่งในแอกครีชันดิสก์

การอนุรักษ์พลังงานบังคับว่า พลังงาน dE ที่แผ่รังสีออกมาโดยวงแหวนในช่วงเวลา t มีค่าเท่ากับผลต่างในพลังงานที่ผ่านขอบนอกและในของวงแหวน คือ

$$dE = \frac{dE}{dr} dr = \frac{d}{dr} \left(-G \frac{M_1 m}{2r} \right) dr = G \frac{M_1 \dot{M} t}{2r^2} dr \quad (2.94)$$

เมื่อให้ $m = \dot{M}t$ เป็นมวลที่กำลังวงโคจรเข้าและออกจากวงแหวน ถ้ากำลังความส่องสว่างของวงแหวนคือ dL_{ring} ดังนั้น พลังงานที่แผ่รังสีออกมาจากวงแหวนในช่วงเวลา t สัมพันธ์กับ dL_{ring} คือ

$$dL_{ring} t = dE = G \frac{M_1 \dot{M} t}{2r^2} dr \quad (2.95)$$

t หักล้างกันไปและใช้กฎของสเตฟาน-โบลทซ์มานน์ สมการ(2.23) ด้วย $A = 2(2\pi r dr)$ เป็นพื้นที่ผิวของวงแหวนทั้งสองด้าน จะได้

$$dL_{ring} = 4\pi \sigma T^4 dr \quad (2.96)$$

$$= G \frac{M_1 \dot{M}}{2r^2} dr \quad (2.97)$$

สำหรับกำลังความส่องสว่างของวงแหวน แก๊สการหา T ซึ่งเป็นอุณหภูมิของดิสก์ (disk temperature) ที่ตำแหน่งรัศมี r จะได้

$$T = \left(\frac{GMM}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4} \quad (2.98)$$

เอาตัวห้อย 1 ออกไปโดยให้เข้าใจว่า M และ R เป็นมวลและรัศมีของดาวปฐมภูมิ และ $\dot{M}$ เป็นอัตราการถ่ายมวลสำหรับระบบดาวคู่แบบกึ่งแยกกัน

ชั้นขอบเทอร์บูเลนต์บาง (thin turbulent boundary layer) ถูกสร้างขึ้นเมื่อก๊าซของดิสก์ที่กำลังโคจรอย่างรวดเร็วปะทะกับพื้นผิวดาวปฐมภูมิ และเมื่อรวมผลลัพธ์นี้ทำให้ประมาณอุณหภูมิของดิสก์ได้คือ

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{3GMM}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4} (1 - \sqrt{R/r})^{1/4} \\ &= T_{disk} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4} (1 - \sqrt{R/r})^{1/4} \end{aligned} \quad (2.99)$$

เมื่อ

$$T_{disk} \equiv \left(\frac{3GMM}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} \quad (2.100)$$

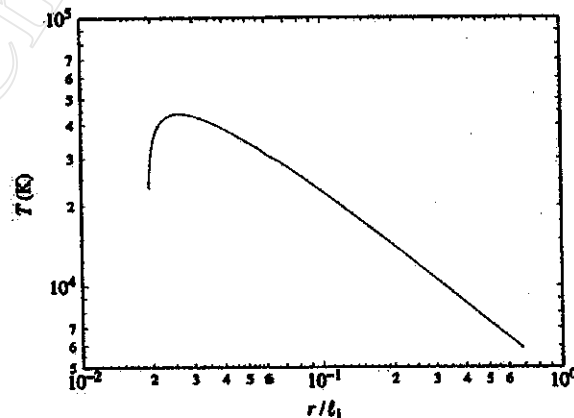
เป็นอุณหภูมิลักษณะเฉพาะ (characteristic temperature) ของดิสก์ แท้จริง T_{disk} มีค่าประมาณเป็น 2 เท่าของอุณหภูมิของดิสก์สูงสุด (maximum disk temperature) นั่นคือ

$$T_{max} = 0.488 \left(\frac{3GMM}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} = 0.488 T_{disk} \quad (2.101)$$

เกิดขึ้นที่ $r = (49/36)R$ จากรูปที่ 2-31 เมื่อ $r \gg R$ เทอมสุดท้ายด้านขวาสมการ(2.99) อาจละทิ้งได้ จะได้

$$T = \left(\frac{3GMM}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4} = T_{disk} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4} \quad (r \gg R) \quad (2.102)$$

รูปแบบของสมการนี้ต่างกับการประมาณอย่างง่ายของสมการ(2.98) ด้วยแฟกเตอร์ $3^{1/4} = 1.32$



รูปที่ 2-31 อุณหภูมิของแอคครีชันดิสก์ ที่คำนวณจาก dwarf nova Z Chamaeleontis รัศมี r อยู่ในหน่วย l_1 ซึ่งเป็นระยะทางจากดาวแคระขาวถึงจุดลากรางเจียนชั้นใน อุณหภูมิตกลงทันทีบริเวณใกล้กับผิวดาวปฐมภูมิ ซึ่งเป็นดาวแคระขาว โดยเป็นวัตถุจากการสมมติขึ้น [Carroll and Ostlie, 1996]

อินทิเกรตสมการ(2.97) สำหรับกำลังความส่องสว่างของวงแหวนแต่ละวงจาก $r = R$ ถึง $r = \infty$ ได้ผลลัพธ์ในนิพจน์กำลังความส่องสว่างของดิสก์ คือ

$$L_{disk} = G \frac{M\dot{M}}{2R} \quad (2.103)$$

ถ้าไม่มีแอกครีชันดิสก์ จะได้กำลังความส่องสว่างของการแอกครีชัน (accretion luminosity เป็นอัตราพลังงานของสสารที่กำลังตกส่งต่อพลังงานจลน์ให้แก่ดาวปฐมภูมิ) มีค่ามากเป็น 2 เท่าของ L_{disk} คือ

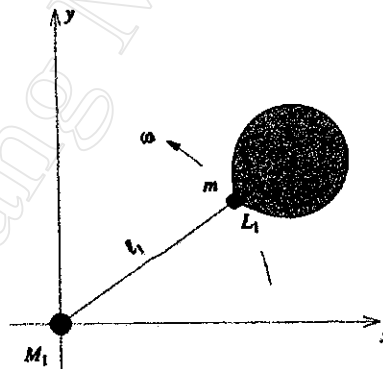
$$L_{acc} = G \frac{M\dot{M}}{R} \quad (2.104)$$

ดังนั้น ถ้าครึ่งหนึ่งของพลังงานของการแอกครีชันแผ่รังสีออกมาขณะที่ก๊าซตกลงผ่านดิสก์ ดังนั้น ครึ่งที่เหลือต้องไปสะสมอยู่ที่พื้นผิวดาว (หรือในชั้นขอบเทอร์โมเลนที่ระหว่างดิสก์ที่กำลังหมุนอย่างรวดเร็ว และดาวปฐมภูมิที่กำลังหมุนอย่างช้ามาก)

ขนาดในแนวรัศมีของแอกครีชันดิสก์สามารถประมาณได้โดยการหาว่า $r = r_{circ}$ เมื่อกระแสไหลแบบต่อเนื่องผ่านจุด L_1 จะตกลงสู่วงโคจรแบบวงกลมรอบดาวปฐมภูมิ โดยพิจารณาโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคมวล m โคจรรอบดาวปฐมภูมิ รูปที่ 2-32 สมมติว่า การเคลื่อนที่ของมวลที่จุดลากรางเจียนชั้นใน เป็นผลเนื่องมาจากการเคลื่อนที่แบบวงโคจรของระบบดาวคู่เพียงอย่างเดียว ซึ่งโมเมนตัมเชิงมุม L ของมวลที่ตำแหน่งนั้น คือ

$$L = m\omega \cdot l_1^2 = ml_1^2 \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}} \quad (2.105)$$

เมื่อ ω เป็นความถี่เชิงมุมของการโคจร จากสมการ(2.89) และ l_1 ได้จากสมการ(2.91)



รูปที่ 2-32 อนุภาคมวล m เคลื่อนที่ผ่านจุดลากรางเจียนชั้นใน L_1 เมื่อมองจากกรอบอ้างอิงที่ดาวปฐมภูมิอยู่นิ่งที่จุดกำเนิด

มวล m ไม่เข้าสู่วงโคจรแบบวงกลมอย่างทันที แต่กระแสไหลที่มวล m เป็นส่วนหนึ่งจะไหลวนรอบดาวปฐมภูมิแล้วย้อนกลับมาชนตัวมันเอง ดังนั้น วงโคจรของอนุภาคเป็นวงกลมรอบดาวปฐมภูมิได้ โดยการชนกัน ซึ่งทำให้พลังงานสูญเสียขณะที่โมเมนตัมเชิงมุมถูกทำให้อนุรักษ์ เมื่ออนุภาคมวลตกสู่วงโคจรแบบวงกลมรัศมี r_{circ} รอบมวล M_1 จะได้โมเมนตัมเชิงมุมของมัน คือ

$$L = m\sqrt{GM_1 r_{circ}} \quad (2.106)$$

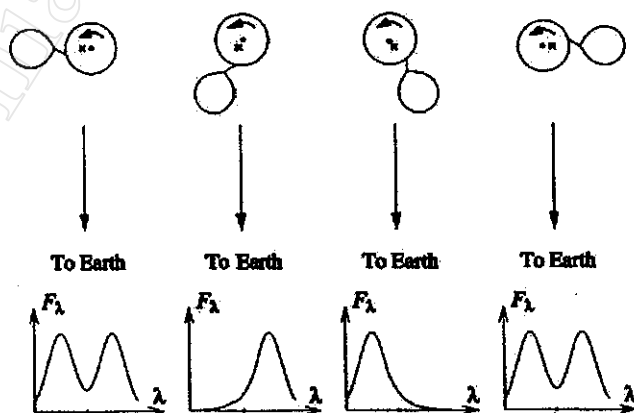
เมื่อใช้ $L = \mu r_p v_p = \mu \sqrt{GMa(1-e^2)}$, p ย่อมาจาก perihelion สำหรับกรณีวงโคจรแบบวงกลมและ $\mu = mM_1/(m + M_1) \approx m$ สมการ(2.105) และ(2.106) เท่ากันสำหรับโมเมนตัมเชิงมุม จะได้

$$r_{circ} = a \left(\frac{l_1}{a} \right)^4 \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right) = a \left[0.500 - 0.227 \log_{10} \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \right]^4 \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right) \quad (2.107)$$

เมื่อโมเมนตัมเชิงมุมรวมต้องอนุรักษ์ ดังนั้น จะมีเฉพาะแรงภายในและแรงสู่ศูนย์กลาง แต่ถ้าโมเมนตัมเชิงมุมสูญเสียโดยมวลสารที่กำลังตกขมควงผ่านแอคครีชันดิสก์ อยู่ในรูปวงแหวนแคบเริ่มที่ $r = r_{circ}$ จะแผ่ขยายทั้งในทิศเข้าและออกจากดาวปฐมภูมิมีระยะเวลาเป็นวันถึงสัปดาห์ สสารส่วนใหญ่จะเข้าสู่ขณะที่ส่วนน้อยพาโมเมนตัมเชิงมุมออกสู่ขอบนอกของดิสก์ อาจรวมถึงสูญเสียมวลในรูปลมอนุภาค ถ้าแอคครีชันดิสก์ขยายออก 80% ถึง 90% ของขนาดถึงจุดลากรางเจียนชั้นในทำให้โมเมนตัมเชิงมุมอาจย้อนสู่การเคลื่อนที่แบบวงโคจรของดาว 2 ดวง โดยไทดัลในดิสก์เนื่องจากดาวทุติยภูมิ เนื่องจากมวลขยาย ดังนั้น จะให้ค่าประมาณของรัศมีขอบนอกของแอคครีชันดิสก์ เท่ากับ

$$R_{disk} \approx 2r_{circ} \quad (2.108)$$

Cataclysmic variable เป็นดาวคู่ที่แปรแสงเนื่องจากการระเบิดที่ผิวดาวแคระขาว หรือเป็นดาวคู่แบบกึ่งแยกกันที่ดาวปฐมภูมิเป็นดาวแคระขาวและดาวทุติยภูมิเป็นดาวบนแถบขบวนหลักชนิดหลัง แสดงคุณลักษณะด้วยการระเบิดเป็นจังหวะสลับกับช่วงเวลาสงบยาวนาน ให้ความสว่างของระบบเพิ่มขึ้นรวดเร็ว เชื่อว่าการระเบิดเกิดจากการเพิ่มขึ้นทันทีในอัตราการถ่ายมวลให้กับดิสก์ เส้นสว่างกว้างและแรงของไฮโดรเจนและฮีเลียมใน cataclysmic variables ในช่วงเวลาสงบ ปกติเหล่านี้เป็นเส้นคู่ ดังรูปที่ 2-33 อย่างไรก็ตาม ในช่วงบั้งจะเห็นเส้นสว่างเส้นเดียว เส้นใดเส้นหนึ่งระหว่างเส้นที่เลื่อนไปทางสีแดง (redshifted) หรือเส้นที่เลื่อนไปทางสีน้ำเงิน (blueshifted) คาดหมายจากดิสก์ของ optically thin gas ที่กำลังหมุน นั่นคือเส้นสว่างของการเลื่อนคอปเพลอร์สร้างจากด้านไม่ถูกบังเมื่ออีกด้านถูกบังอยู่หลังดาวทุติยภูมิ

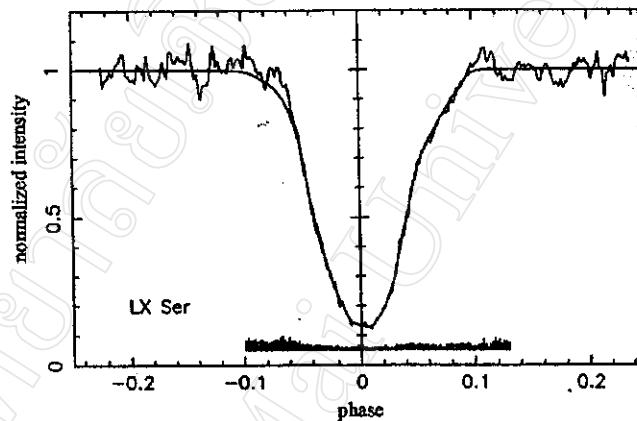


รูปที่ 2-33 เส้นสว่างของการเลื่อนคอปเพลอร์ที่ลำดับต่างกันของการบังแอคครีชันดิสก์ ระบบดาวคู่โคจรรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบ (x) และมีทิศการหมุนตามทิศลูกศร

แหล่งกำเนิดเส้นสว่างที่ปรากฏในระหว่างเฟสสงบของ cataclysmic variable ยังไม่มีความชัดเจน ในระหว่างการระเบิด เส้นเหล่านี้ปรากฏเป็นเส้นคู่กลืน คาดหมายจาก optically thick disk ที่กำเนิด

เส้นดูดกลืนในแบบเดียวกันกับบรรยากาศของดาวแบบ optically thick แต่ในช่วงเวลาสังเกตการถ่ายมวลดูดกลืนทำให้ดิสก์มีความหนาแน่นน้อยและเย็นกว่า ที่ตำแหน่งรัศมีใหญ่ๆ ของดิสก์อาจเป็น optically thin และให้แสงสว่าง หรือ อาจเกิดจากชั้นก๊าซร้อนบาง ที่อยู่เหนือดิสก์กำเนิดแสงสว่าง

การสังเกตกราฟแสงของดาวคู่แบบกึ่งแยกกันอุปราคาอื่นๆ เช่น รูปที่ 2-34 แสดงการปรากฏของ hot spot ซึ่งเป็นตำแหน่งที่กระแสมวลชนกับขอบนอกของแอครีชันดิสก์ กราฟแสงสามารถแสดงผลลัพธ์ของพื้นที่ย่อยต่อเนื่องของดิสก์ สาเหตุที่ hot spot อยู่ด้านหลังของดิสก์ในช่วงเวลาบังกัน (ดูรูปที่ 2-33) แสงปริมาณมากจึงวัดได้จากดิสก์บริเวณใกล้กับจุดเริ่มต้นของการบัง (เมื่อ hot spot ยังคงสามารถมองเห็นได้) มากกว่าบริเวณใกล้กับจุดสุดท้ายของการบัง (เมื่อ hot spot ยังคงถูกซ่อน) ผลลัพธ์นี้ทำให้แสงขาดหายไปที่ด้านขวามือของกราฟแสงในรูปที่ 2-34



รูปที่ 2-34 กราฟแสงของการบังแอครีชันดิสก์ในระบบดาวคู่ LX Serpentis เส้นหยักเป็นกราฟแสงที่สังเกตการณ์ได้ และเส้นเรียบเป็น fit curve ที่คำนวณได้ ของ Rutten และคณะ ในปี พ.ศ. 2535 [Carroll and Ostlie, 1996]

2.6.2 ระบบดาวคู่ที่มีสมาชิกดวงหนึ่งเป็นดาวแคระขาว

ในระบบดาวคู่ ดาวปกติที่ขนาดเต็มโรสโลบของมันจะถ่ายมวลไปสู่ดาวแคระขาวที่เป็นสมาชิก ทำให้ความสว่างเพิ่มขึ้นมากในช่วงเวลาสั้นๆ บางกรณีการระเบิดมีสาเหตุจากการปลดปล่อยพลังงานนิวเคลียร์อย่างรุนแรงและรวดเร็วบนพื้นผิวดาวแคระขาว (การระเบิดแบบโนวา) กรณีที่ระเบิดแบบแตกสลายอย่างรุนแรงเป็นผลมาจากการเผาไหม้ฉับพลันของเชื้อเพลิงทางนิวเคลียร์ที่หลงเหลือทั้งหมดภายในดาวแคระขาว (การระเบิดแบบซูเปอร์โนวาชนิด Ia)

โนวาส์ (Novas) คือความสว่างชั่วขณะเวลาหนึ่งของระบบดาวคู่ (ชั่วโม่งหรือวัน) ที่ดาวปกติถ่ายมวลให้กับดาวสมาชิกของมันที่เป็นดาวแคระขาว และสะสมก๊าซบนพื้นผิวดาวแคระขาวและด้วยคาบเวลายาวนานก๊าซนี้รวมกันเป็น hydrogen-rich layer เมื่อดาวแคระขาวมีองค์ประกอบส่วนใหญ่เป็นคาร์บอนและออกซิเจน และการสะสมมวลเป็นไปค่อนข้างช้าจึงทำให้อุณหภูมิต่ำใน hydrogen-rich layer รวมถึงมวลสารที่เพิ่มเข้ามา จึงเกิดฮีเลียมเออเรท เมื่อชั้นไฮโดรเจนหนาและร้อนเพียงพอจะทำให้เริ่มเกิดปฏิกิริยาฟิวชันที่ด้านล่างของชั้น ซึ่งพลังงานที่ปลดปล่อยโดยปฏิกิริยาฟิวชันจะทำให้ก๊าซร้อนขึ้นแต่ไม่เพียงพอที่จะทำให้มันขยายตัวได้เพราะความดันในก๊าซที่เป็นฮีเลียมเออเรทไม่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ และเมื่อไฮโดรเจนถูกเผาไหม้

เร็วขึ้นทำให้อุณหภูมิเพิ่มขึ้นและอัตราการเกิดปฏิกิริยาฟิวชันก็เพิ่มสูงขึ้น ในที่สุด เกิดการเผาไหม้ไฮโดรเจนที่สะสมเกือบทั้งหมดโดยการระเบิดแบบ thermonuclear runaway ในชั้นพื้นผิวดาวแคระขาว พลังงานนิวเคลียร์ที่ปลดปล่อยจะผลักดันด้านนอกดาวแคระขาวหนีสู่อวกาศ และดาวแคระขาวดวงเดิมอาจสร้างระเบิดแบบ โนวา (nova explosion) ได้ทุกครั้งเมื่อการสะสมมวลสารใหม่มากเพียงพอ

ซูเปอร์โนวาชนิด Ia (Type Ia Supernovas) คือ การระเบิดแบบแตกสลาย (outburst) ที่รุนแรงกว่าการระเบิดแบบโนวา ถ้าการถ่ายมวลอยู่ในอัตราสูงจนทำให้ชั้นด้านนอกของดาวแคระขาวร้อนในระดับที่ไม่สามารถเป็นดีเจนเออเรท กรณีนี้จะเกิดปฏิกิริยาฟิวชันของไฮโดรเจนเป็นฮีเลียมที่ฐานของ hydrogen-rich layer และเนื่องจากไม่มีสสารที่ถูกขับออกไปโดยการระเบิดแบบโนวา ในที่สุดมวลของดาวแคระขาวเพิ่มขึ้นในระดับที่แกนกลางของดาวแคระขาวมีความหนาแน่นและร้อนเพียงพอสำหรับการเผาไหม้คาร์บอนและธาตุอื่นทันที พลังงานที่ปลดปล่อยโดยปฏิกิริยาฟิวชันจะทำให้ดาวแคระขาวเกิดการแตกสลาย

2.6.3 ระบบดาวคู่ที่มีสมาชิกดวงหนึ่งเป็นดาวนิวตรอน หรือหลุมดำ

แหล่งกำเนิดที่ให้แสงสว่างของรังสีเอกซ์ในกาแล็กซีของเรา คือ ระบบดาวคู่ที่มีสมาชิกเป็นดาวนิวตรอน หรือหลุมดำ อย่างไรก็ตาม สำหรับระบบดาวคู่ต่างกัน รังสีเอกซ์จะมีกำเนิดในวิธีต่างกัน การสะสมก๊าซบนดาวนิวตรอนสามารถระเบิดให้รังสีเอกซ์เมื่อพื้นผิวดาวนิวตรอนได้รับความร้อนจากปฏิกิริยา runaway fusion ในก๊าซที่สะสมได้ พัลส์ของรังสีเอกซ์สังเกตเห็นได้เมื่อขั้วแม่เหล็กที่กำลังแปลงรังสีเอกซ์ของดาวนิวตรอนกวาดผ่าน ระบบดาวคู่แบบรังสีเอกซ์บางระบบอาจมีสมาชิกเป็นหลุมดำมากกว่าเป็นดาวนิวตรอน เพราะว่า ส่วนใหญ่ compact object มีมวลมากเกินไปที่จะเป็นดาวนิวตรอน