

บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 ดาวคู่ (Binary stars)

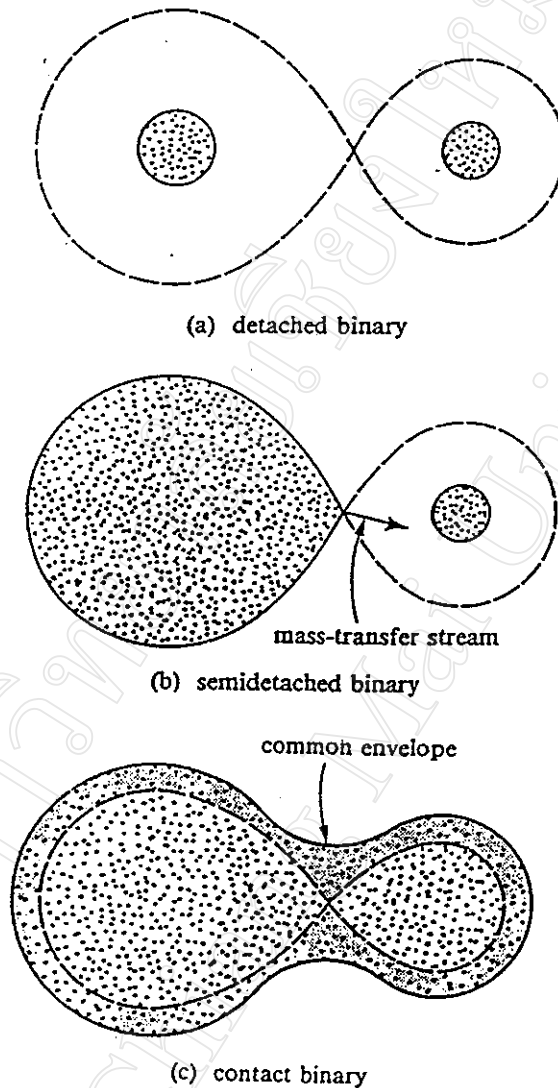
ดาวคู่ คือ ระบบที่ประกอบไปด้วยสมาชิก 2 ดวง โคจรรอบจุดศูนย์กลางเนื่องจากแรงโน้มถ่วงร่วมกัน ดาวบนท้องฟ้ามากกว่า 50 เปอร์เซ็นต์เป็นระบบดาวคู่ ดังนั้นเมื่อทำการสังเกตการณ์ระบบดาวคู่ สามารถแยกประเภทของดาวคู่ ตามลักษณะปรากฏได้ 4 ประเภท ดังนี้

1. ระบบดาวคู่ที่มองเห็นได้ (Visual binary System) เป็นระบบดาวคู่ที่สามารถมองเห็นสมาชิกแต่ละดวงได้ เมื่อสังเกตการณ์ผ่านกล้องดูดาวโดยปกติแล้ว มุมที่แยกดาวทั้งสองดวงจะมากกว่า 0.1 พิลิปดา
2. ระบบดาวคู่โดยการวัดทางดาราศาสตร์ (Astrometric Binary System) เป็นระบบดาวคู่ที่สามารถสังเกตเห็นได้เพียงดวงเดียวเท่านั้น คือ ดวงที่สว่างกว่าแต่จากการสังเกตการณ์ จะเห็นการโคจรของสมาชิกดวงสว่าง รอบจุดศูนย์กลางมวลในลักษณะการส่าย (Wobble) บนวงโคจรของระบบดาวคู่
3. ระบบดาวคู่สเปกโตรสโคปิก (Spectroscopic Binary System) เป็นระบบดาวคู่ที่อยู่ใกล้กันมากของระบบดาวคู่ประเภทนี้ อาจจะเห็นเส้นสเปกตรัมแยกออกเป็น 2 เส้น (Double – lined) หรือ เห็นเส้นสเปกตรัมเส้นเดี่ยว (Single – lined) แต่เส้นสเปกตรัมจะมีการเลื่อนตำแหน่งกลับไปกลับมาในทางสีน้ำเงิน (Blue shift) หรือสีแดง (Red shift) อันเนื่องจากการเคลื่อนที่ในแนวสายตา
4. ระบบดาวคู่อุปราคา (Eclipsing Binary System) เป็นระบบดาวคู่ที่อยู่ใกล้กันมาก จนไม่สามารถมองเห็นสมาชิกแยกออกเป็น 2 ดวงได้ แต่เมื่อวัดความเข้มแสงของระบบดาวคู่อุปราคา จะพบว่าความเข้มแสงจะมีการเปลี่ยนแปลงเป็นคาบ อันเนื่องมาจากดาวแต่ละดวงมีการเคลื่อนที่บังกันระบบดาวคู่ บี วี อิริดानी เป็นระบบดาวคู่อุปราคาแบบใกล้ชิด ที่มีการวิวัฒนาการที่น่าสนใจหลายประการ ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป

2.1.1 ระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด (Close Binary System)

ระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด แบ่งออกได้เป็น 3 ประเภท คือ

- 1) ประเภท Algol หรือเรียกว่าชั้น EA เป็นระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดที่มีจำนวนมากที่สุด ประกอบด้วยสมาชิก 2 ดวงที่อยู่ห่างกันพอสมควร เป็นระบบดาวคู่แบบแยกกัน (Detached Binaries) มีอุปราคาปฐมภูมิ (Primary Eclipse) ลึกแต่อุปราคาทุติยภูมิ (Secondary Eclipse) ตื้น แสดงว่าดาวปฐมภูมิสว่างกว่าดาวทุติยภูมิมาก กราฟแสงบริเวณนอกอุปราคา (Outside Eclipse) ก่อนข้างสม่ำเสมอ



รูปที่ 2.1 ชนิดของดาวคู่อุปราคาตามแบบจำลองของโรซซ์

2) ประเภท Beta Lyrae หรือเรียกว่าชั้น EB ระบบดาวคู่ประเภทนี้มีสมาชิกเป็นดาวยักษ์ (Giants) และดาวยักษ์ใหญ่ (Supergiants) ที่มีความหนาแน่นต่ำ และมีขนาดไม่เท่ากันสมาชิกอยู่ใกล้กัน จึงทำให้มีแรงดึงดูดระหว่างกันมากจนทำให้ดาวมีรูปร่างรี (oval shape) เมื่อพิจารณากาแฟแสงจะมีความโค้งสม่ำเสมอและอุปราคาทุติยภูมิเห็นชัดกว่าประเภท Algol มาก ในระบบดาวคู่ประเภทนี้

จะมีสมาชิกดวงหนึ่งที่มีมวลเต็มผิวของโรซซ์ ส่วนอีกดวงไม่เต็ม ดังนั้นจะมีการถ่ายเทมวลสาร (Mass transfer) ระหว่างสมาชิกในระบบซึ่งเกิดจากการที่ดาวดวงหนึ่งมีวิวัฒนาการถึงขั้นที่เกิดสถานะไม่สมดุล เมื่อแรงดันภายในดาวมีค่ามากกว่าแรงโน้มถ่วง จะส่งผลทำให้ชั้นบรรยากาศของดาวดวงนั้นขยายตัวขึ้น เมื่อขยายถึงจุดลากรางจ์ภายใน (Inner lagrangian point, L_1) ด้วย แรงลัพท์ไม่เป็นศูนย์จะทำให้เกิดการถ่ายเทมวลระหว่างสมาชิกในระบบดาวคู่ได้ เรียกดาวคู่ประเภทนี้ ตามแบบจำลองของโรซซ์ว่า “ระบบดาวคู่แบบกึ่งติดกัน” (Semi - Detached Binary System) (รูปที่ 2.1b)

3) ประเภท W Uma หรือเรียกว่าชั้น EW เป็นระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดที่มีสมาชิกทั้งสองดวงเป็นดาวแคระ (Dwarfs) มีขนาดและความสว่างใกล้เคียงกันมากสมาชิกทั้งสองอยู่ใกล้กันมากจนบางครั้งเป็นระบบดาวคู่แบบติดกัน (Contact Binaries) รูปร่างของดาวทั้งสองจึงบิดเบี้ยวมาก เมื่อพิจารณากราฟแสงจะโค้งสม่ำเสมอและความลึกของอุปราคาปฐมภูมิกับอุปราคาทุติยภูมิมีค่าใกล้เคียงกัน แต่จากการสังเกตการณ์จะพบความไม่สมมาตรของกราฟแสงในระบบดาวประเภทนี้มาก ทั้งนี้เนื่องจาก ดาวทั้งสองมีชั้นบรรยากาศร่วมกัน และระบบไม่อยู่ในสมดุลความร้อนจึงส่งผลให้ระบบต้องปรับสภาพเพื่อเข้าสู่สมดุล เหตุนี้จึงเกิดการถ่ายเทมวลสารระหว่างดาวสมาชิก ทำให้อุณหภูมิที่ผิวของดาวทั้งสองไม่เท่ากัน และอีกหลายปรากฏการณ์ที่จะได้ทำการศึกษาต่อไป

2.1.2 องค์ประกอบของวงโคจร และคุณสมบัติทางกายภาพของระบบดาวคู่

ในการวิเคราะห์ องค์ประกอบวงโคจร และคุณสมบัติทางกายภาพของระบบดาวคู่อุปราคาแบบใกล้ชิดนั้น วิลสันและเดวินนี่ (Wilson and Devinney, 1971) ได้พัฒนาเทคนิคการวิเคราะห์กราฟแสง ซึ่งทำให้สามารถคำนวณองค์ประกอบวงโคจรและองค์ประกอบทางกายภาพของระบบดาวคู่ โดยจะนำข้อมูลที่คำนวณได้มาเป็นข้อมูลเพื่อสร้างกราฟแสงสังเคราะห์ (Synthetic Light Curves) ที่สอดคล้องกับกราฟแสงจากการสังเกตการณ์ (Observational Light Curves)

ค่าองค์ประกอบวงโคจรและพารามิเตอร์ทางกายภาพของระบบดาวคู่อุปราคาแบบใกล้ชิดที่สำคัญ เพื่อใช้ในการสร้างแบบจำลอง มีดังต่อไปนี้

1. ค่าอัตราส่วนมวล (Mass Ratio, q) เป็นค่าสัดส่วนมวลของดาวทุติยภูมิ (m_2) ต่อมวลของดาวปฐมภูมิ (m_1)

$$q = \frac{m_2}{m_1} \quad (2.1)$$

ในระบบดาวคู่ที่มีการถ่ายเทมวลระหว่างสมาชิก จะทำให้อัตราส่วนมวลมีการเปลี่ยนแปลงไป ส่งผลให้คาบการโคจรของระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดมีการเปลี่ยนแปลงไปด้วย

2. ค่า Modified Equipotential , Ω เป็นค่าศักย์โน้มถ่วง (Gravitational potential) ณ จุด (X, y, z) ที่อยู่ห่างจากดาวแต่ละดวงเป็นระยะ r_1 และ r_2 ตามลำดับ ซึ่ง

$$\Omega = -GM \left[\frac{1-f}{r_1} + \frac{f}{r_2} + \frac{x^2 + y^2}{2a^3} \right] \quad (2.2)$$

โดย M คือ มวลรวมของระบบดาว (Total Mass, M) มีรัศมี a

f คือ ค่า fractional mass

และ Ω จะมีค่าคงที่ตามผิวสมศักย์ (Equipotential surface) เรียกว่า Lagrangian Surface

รายละเอียดเกี่ยวกับเรื่องนี้จะกล่าวใน หัวข้อแบบจำลองของโรช (Roche Model) ต่อไป

3. ค่ามุมเอียงของระนาบวงโคจร (Inclination, i) เป็นค่ามุมมีหน่วยเป็น “องศา” โดยเป็นมุมที่แกนการหมุนของระนาบวงโคจร (Axis of Revolution) ทำกับแนวสายตาโดยมีเงื่อนไขดังนี้

(ก) กรณี i เข้าใกล้ 0 องศา ระนาบวงโคจรจะตั้งฉากกับแนวสายตาจะสังเกตเห็นดาวทั้งสองดวงเคลื่อนที่โดยไม่เกิดการบังกัน (Non – Eclipsing)

(ข) กรณี i เข้าใกล้ 90 องศา ระนาบวงโคจรจะขนานกับแนวสายตาจะสังเกตเห็นดาวทั้งสองดวงเคลื่อนที่บังกัน (Eclipsing Binaries)

4. ค่าเฟสของวงโคจร (Orbital phase, ϕ) เป็นค่าที่ใช้ระบุสัดส่วนของคาบ (Fractional Period) ในการโคจรรอบกันของระบบดาวคู่ โดยกำหนดดังนี้

ค่าเฟสเท่ากับ 0.00 เป็นช่วงกึ่งกลางของอุปราคาปฐมภูมิ

ค่าเฟสเท่ากับ 0.50 เป็นช่วงกึ่งกลางของอุปราคาทุติภูมิ

ค่าเฟสเท่ากับ 0.25 , 0.75 เป็นช่วงที่แสงของระบบดาวคู่มากที่สุด

การคำนวณค่าเฟส แบ่งออกได้ 2 กรณี คือ

- (ก) เมื่อค่าวันจูเลียนศูนย์กลางสุริยะ (Heliocentric Julian Date, HJD) น้อยกว่าค่า Epoch (ค่าเวลาที่เกิดอุปราคาปฐมภูมิเมื่อระบบดาวคู่ถูกสังเกตการณ์เป็นครั้งแรก)

$$\text{Phase} = 1 - \text{Fractional Part of } (\text{HJD} - \text{Epoch}/\text{period})$$

- (ข) เมื่อค่าวันจูเลียนศูนย์กลางสุริยะมากกว่าค่า Epoch

$$\text{Phase} = \text{Fractional Part of } (\text{HJD} - \text{Epoch}/\text{Period})$$

5. ค่า Gravity Darkening Exponent (α) เป็นค่าที่เสนอโดย Von Zeipel (1924) ซึ่งพบว่าค่าฟลักซ์ที่ผิวของดาวฤกษ์ (F) แปรผันเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วง (g) ที่ผิวดาว ณ ค่า Gravity Darkening Exponent ใด ๆ ดังนี้

$$F = \sigma T^4 \alpha g^\alpha \quad (2.3)$$

โดย $\alpha = 1.00$ (สำหรับ Radiative star)

$= 0.32$ (สำหรับ Convective star) (Lucy, 1967)

นอกจากนี้ยังพบว่า ค่าอุณหภูมิ ณ บริเวณใด ๆ ภายในดาวฤกษ์ (T_{local}) สัมพันธ์กับค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง (g) ณ บริเวณนั้น ดังนี้

$$T_{\text{local}} = T_{\text{eff}} \left[\left(\frac{g}{g_{\text{eff}}} \right)^\alpha \right]^{0.25} \quad (2.4)$$

โดย T_{eff} เป็นค่าอุณหภูมิยังผล (Effective Temperature)

g_{eff} เป็นค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงยังผล (Effective Gravitational Acceleration)

6. ค่า Limb Darkening Coefficient(x)

ค่าความสว่างปรากฏที่ผิวดาว จะลดลงอย่างต่อเนื่อง เมื่อวัดความสว่างตั้งแต่ แนวศูนย์กลางของดาวออกมาสู่ขอบดาว (Limb) ทั้งนี้เนื่องจากแสงที่เคลื่อนที่ผ่านบรรยากาศของดาวมีทางเดินที่ยาวกว่า

ถ้า $I(0)$ เป็นค่าความเข้มของแสงดาว เมื่อสังเกตการณ์ บริเวณใจกลางดวง

ถ้า $I(\theta)$ เป็นค่าความเข้มของแสงดาว ณ มุม θ จากบริเวณศูนย์กลางของดาว พบว่า

$$I(\theta) = I(0) (1 - X + X \cos \theta) \quad (2.5)$$

ค่า Limb Darkening Coefficient ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ ค่าความโน้มถ่วงที่ผิวดาวและความยาวคลื่นของโฟตอนที่แผ่ออกมาจากดาวนั้นด้วย

7. ค่า Bolometric Albedo หรือ Reflection Coefficient (A) เป็นค่าเปอร์เซ็นต์ของแสงดาวที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการสะท้อนของแสงดาวจากดาวที่เป็นคู่ของระบบดาวคู่ดังกล่าว โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$A = 1.00$ สำหรับ Radiative star

$A = 0.50$ สำหรับ Convective star

8. กำลังส่องสว่าง (Luminosity, L) เป็นค่าพลังงานที่แผ่ออกมาจากผิวดาวแต่ละดวงในระบบดาวคู่ โดย

$$L_1 = 4\pi R_1^2 \sigma T_1^4 \quad \text{สำหรับดาวปฐมภูมิ}$$

$$L_2 = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \quad \text{สำหรับดาวทุติยภูมิ}$$

โดยปกติในการคำนวณแบบจำลองของระบบดาวคู่ มักจะนอร์มัลไรซ์ (Normalized) ค่าการส่องสว่างรวมของระบบดังนี้

$$L_1 + L_2 = 1.00 \quad (2.6)$$

ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้น จะเป็นตัวกำหนดลักษณะของกราฟแสงที่สังเกตการณ์ได้ของระบบดาวคู่อุปราคาแบบใกล้เคียง ซึ่งวิธีการคำนวณพารามิเตอร์เหล่านี้จะกล่าวโดยละเอียดในบทที่ 4 ต่อไป

2.2 แบบจำลองของโรช (Roch Model)

2.2.1 The potential in Rotating system

ดาวสองดวงมีมวล M_1, M_2 มีรัศมี R_1 และ R_2 ตามลำดับ ระยะห่างระหว่างดาวทั้งสองเท่ากับ A ถือว่าเป็นรัศมีการโคจรของระบบ ที่มีการโคจรไปลักษณะเดียวกัน (Synchronous rotation) ด้วย อัตราเร็วเชิงมุม (Ω) ในทิศทางเข็มนาฬิกา และ m คือ infinitesimal mass แรงที่กระทำต่อมวล m เมื่อผู้สังเกตอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลของระบบดาวคู่ ซึ่งหมุนไปด้วยกับระบบ คือ

$$\vec{F}_m = \vec{F}_{m1} + \vec{F}_{m2} + \vec{F}_{centrifugal} + \vec{F}_{coriolis} \quad (2.7)$$

ใน Initial frame $\vec{F}_{centrifugal} = 0$ และ $\vec{F}_{Coriolis} = 0$ ดังนั้น สามารถหา Modified potential ณ จุด $P(x, y, z)$ ได้ ๆ จาก

$$V = \frac{-GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{\omega^2 s^2}{2} \quad (2.8)$$

เทอมสุดท้ายเกิดจากการหมุนของระบบดาวคู่ ให้ระนาบการโคจรของระบบอยู่ใน $xy - plane$ โดยมวล M_1, M_2 และจุดศูนย์กลางมวล อยู่ในแนวแกน x ตามรูปที่ (2.2)

ใน Inertial frame หา modified potential ตามสมการ

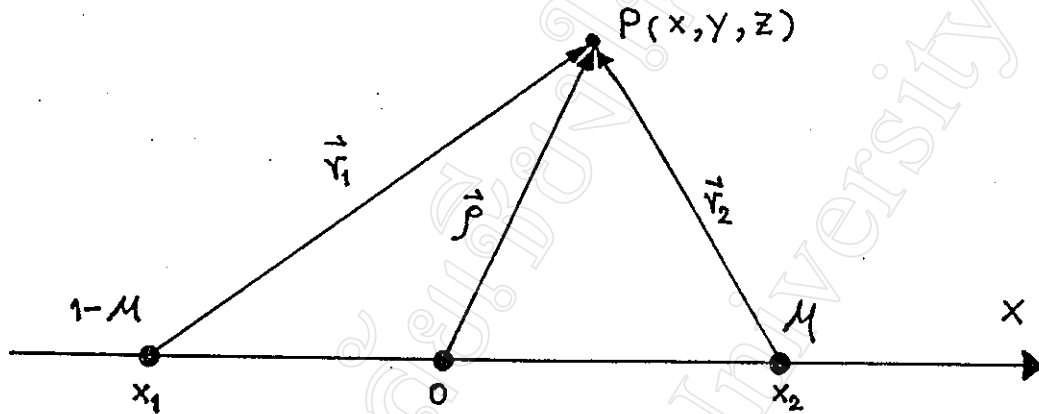
$$V - \frac{\omega^2 \rho^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \text{ค่าคงที่} \quad (2.9)$$

เมื่อ

V คือ พลังงานศักย์ของระบบดาวคู่

v คือ ความเร็วของ Infinitesimal mass

ρ คือ ระยะทางจากจุด C.M. ของระบบไปยัง infinitesimal mass



รูปที่ 2.2 Three Body Problem Diagram

ให้ Infinitesimal mass อยู่ที่จุด (X, Y, Z) ใด ๆ จะได้

$$r_1^2 = (X - X_1)^2 + Y^2 + Z^2$$

และ

$$r_2^2 = (X - X_2)^2 + Y^2 + Z^2$$

(2.10)

ความเร็วของ Infinitesimal mass เทียบกับแกนการหมุน คือ

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

(2.11)

จากสมการ (2.9) และ (2.11) โดยให้ $\omega \cong 1$ จะได้

$$v^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2}$$

(2.12)

สมการ (2.12) เรียกว่า Jacobi's Integral จากสมการ (2.12) ในการที่จะหาผิวที่ความเร็วสัมพัทธ์ของ infinitesimal mass มีค่าเป็นศูนย์ (Surface of zero relative velocity) หาได้โดยให้ $U=0$ จะได้

$$X^2 + Y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C \quad (2.13)$$

เมื่อ μ คือ Fraction mass

C คือ ค่าคงที่ หาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น โดยจะทำให้หาสมการการเคลื่อนที่ของจุดได้

สมการ (2.13) จะแสดงผิวที่เรียกว่า Zero Relative Velocity Surface หรือ Roche Surface เมื่อพิจารณาบริเวณที่ใกล้จุดศูนย์กลางมวลของดาวอาจถือได้ว่า ผิวสมสัคย์มีรูปทรงเกือบเป็นทรงกลม และยิ่งห่างจากจุดศูนย์กลางมาก รูปร่างก็จะบิดเบี้ยวมาก ตำแหน่งจุดตัดของผิวสมสัคย์ที่อยู่ระหว่างดาวสมาชิก เรียกว่า Inner point of Lagrange, L_1 หรือ Critical Roche Surface และเรียกผิวสมสัคย์ที่ห่อหุ้มดาวแต่ละดวงไว้ว่า "Roche Lobe" ตามสมการ (2.13) จะมีจุดวิกฤต 3 จุด ที่วางตัวในแนวเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลทั้งสอง โดยจะอยู่ระหว่างดาวทั้งสอง คือ L_1 และอีก 2 จุด คือ L_2 และ L_3 จะอยู่ด้านนอก เรียกจุด L_2 และ L_3 ว่า Outer Contact Surface ดังรูปที่ (2.3) ส่วนอีก 2 จุด คือ L_4 และ L_5 เป็นจุดยอดของ Equilateral Triangle Solution ดังนั้นในระบบ จะมีจุดลากรางจ์ทั้งหมด 5 จุด

2.2.2 การหา Roche Radius ใน 1 มิติ

การหา Roche radius โดยพิจารณาใน 1 มิติ สมมติให้บริเวณใกล้ศูนย์กลางของดาวผิวสมสัคย์เกือบเป็นทรงกลม และบิดเบี้ยวมากขึ้นตามตำแหน่งที่ห่างจากจุดศูนย์กลางดาวออกมา รัศมีของ Roche Lobe ประมาณได้จาก

$$\frac{4\pi R_R^3}{3} = \text{Volume of Roche Lobe} \quad (2.14)$$

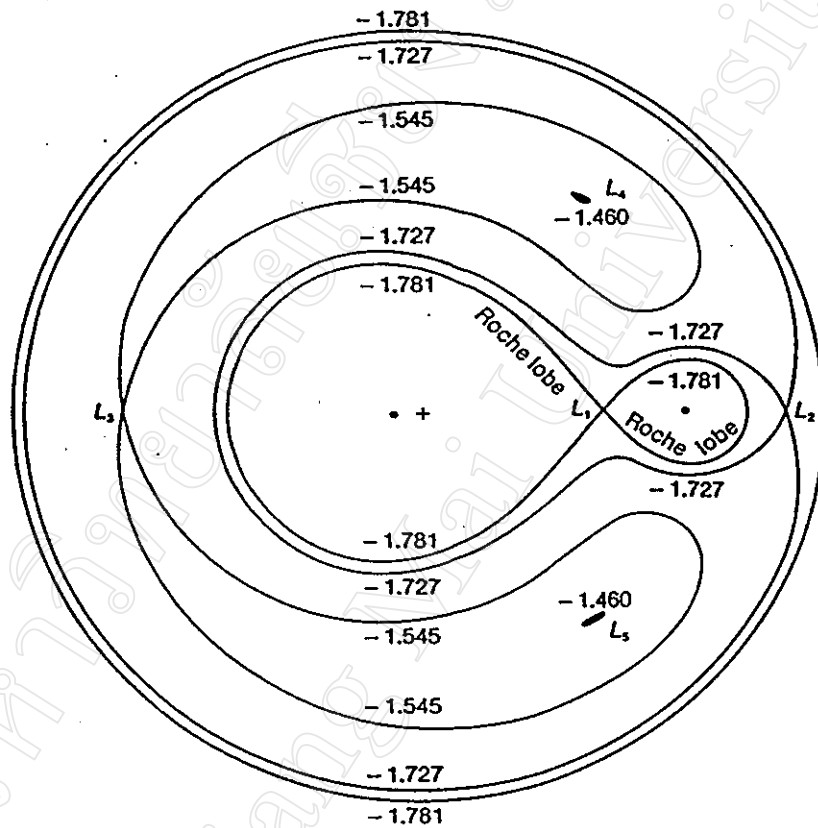
เมื่อ R_R คือ Roche Radius

ค่า Roche radius จะขึ้นกับ อัตราส่วนมวล $[q = \frac{m_2}{m_1}]$ และระยะทางระหว่างดาวทั้งสอง

ในปี ค.ศ. 1971, Paczynski ได้ทำการประมาณค่า Roche Radius ซึ่งหาได้จากสมการ

$$\frac{R_R}{A} = 0.38 + 0.2 \log q \quad \text{สำหรับ } 0.3 > q > 20 \quad (2.15)$$

$$\frac{R_R}{A} = 0.46224 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{สำหรับ } q \leq 0.8 \quad (2.16)$$



รูปที่ 2.3 แสดงพื้นผิวสมศักย์(Equipotential Surface)ที่ค่า C ต่างๆกัน

และสามารถหาได้ละเอียดขึ้นจาก

$$\frac{R_R}{A} = 0.37771 + 0.20247 \log q - 0.01838 (\log q)^2 + 0.02275 (\log q)^3$$

สำหรับ $q > 0.1$ (2.17)

$$\frac{R_R}{A} = 0.37710 + 0.21310 \log q - 0.00800 (\log q)^2 + 0.00660 (\log q)^3$$

สำหรับ $q \leq 0.1$ (2.18)

และสำหรับการหา Roche radius ในกรณีของดาวทวิคูณ โดยการแทนค่า $1/q$ ด้วยค่า q แทนลงในสมการ(2.16)

อย่างไรก็ตามรูปร่างของผิวสัมผัสที่หุ้มดาวแต่ละดวงไว้จะทำให้ดาวทั้งสองดวงแยกจากกัน ในกรณีที่ระบบไม่อยู่ในสภาวะสมดุลความร้อน อาจมีการถ่ายเทมวลสารในระบบทำให้เกิดเป็นดาวคู่แบบกึ่งติดกันหรือระบบดาวคู่แบบติดกันได้

เงื่อนไขของระบบดาวคู่ที่ต้องยอมรับมีดังนี้

1. ระบบดาวคู่แบบใกล้ชิดต้องอยู่ในสมดุล Radiative Equilibrium
2. การประมาณมวลของดาวประมาณได้ว่าเป็นจุด
3. ดาวมีการโคจรเป็นวงกลม
4. การหมุนของดาวจะต้อง Synchronous กับการโคจรรอบจุดศูนย์กลางโน้มถ่วง
5. แกนหมุนของดาวต้องตั้งฉากกับระนาบวงโคจร

2.2.3 Mass transfer and Orbital evolution

เมื่อดาววิวัฒนาการจนเต็มผิวโรซซ์ แต่ปริมาณของผิวโรซซ์ยังคงเท่าเดิม ดังนั้น ดาวจะต้องสูญเสียมวลออกไปเพื่อที่จะทำให้สามารถวิวัฒนาการต่อไปภายในปริมาณจำกัดของ Roche lobe ได้

โมเมนตัมเชิงมุมของการโคจร (Orbital angular momentum) ของระบบดาวคู่ หาได้จาก

$$J_{orb} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \Omega A^2 \quad (2.19)$$

เมื่อ

J_{orb}	คือ	โมเมนตัมเชิงมุมของการโคจร
Ω	คือ	ความเร็วเชิงมุม
A	คือ	ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางมวลของดาวทั้งสอง

สมมติให้ การเปลี่ยนแปลงขนาดของวงโคจร (Orbital Separation) ขึ้นกับมวลที่สูญเสียออกจากระบบ ดังนั้น

$$\frac{\dot{A}}{A} = -2 \left\{ 1 + \frac{(\alpha - 1)M_1}{M_2} - \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2} \right) \right\} \frac{\dot{M}_1}{M_1} + 2 \frac{\dot{J}_{orb}}{J_{orb}} \quad (2.20)$$

ในกรณีมีการอนุรักษ์ มวลภายในระบบ จะได้

$$\frac{\dot{A}}{A} = -2 \left[1 - \frac{M_1}{M_2} \right] \frac{\dot{M}_1}{M_1} \quad (2.21)$$

จากสมการ (2.21) ถ้า อัตราการถ่ายเทมวล $\dot{M} < 0$ และ $\frac{M_1}{M_2} < 1$ จะทำให้วงโคจรของระบบขยายออก แต่ถ้า $\frac{M_1}{M_2} > 1$ วงโคจรจะหดเล็กลง (De Loore 1992)

ดังนั้นพอจะสรุปได้ว่า เมื่อดาววิวัฒนาการจนเต็มผิวห่อหุ้มของโรช (Roche Lobe) ก็จะเกิดการถ่ายมวลระหว่างคู่สมาชิก ซึ่งมวลดังกล่าวจะโคจรรอบดาวที่รับมวลโดยหมุนไปในทิศทางเดียวกันกับทิศการหมุนของระบบดาว ลักษณะการหมุนของมวลสารที่วนรอบดาวเรียกว่า “Accretion disk” สสารบางส่วนที่มีความเร็วสูงพอจะสามารถหลุดหนีออกจากระบบผ่าน Outer Lagrangian Point, L_2 ได้ โดยมวลที่สูญหายออกไปจะทำให้มวลรวมทั้งระบบและโมเมนตัมเชิงมุมของระบบลดลง รวมทั้งรัศมีวงโคจรของระบบก็ลดลงด้วยเช่นกัน สำหรับมวลที่อยู่ใน Accretion disk จะค่อย ๆ ตกลงสู่ผิวดาวที่มวลวนรอบอยู่ ถ้าอัตราเร็วของการตกสู่ผิวดาวสูงพอจะทำให้เกิดโนวา (Novae) หรือ Compact X – ray source ได้

2.3 ปรากฏการณ์ O’Connell effect

จากการเปรียบเทียบกราฟแสงสว่างเคราะห์กับกราฟแสงจากการสังเกตของระบบดาวคู่แบบติดกันหรือใกล้ติดกัน พบว่า ค่าแอมพลิจูด ของความสว่างสูงสุดของกราฟแสงที่ตำแหน่งปฐมภูมิ (Primary) และตำแหน่งทุติยภูมิ (Secondary) ไม่เท่ากัน

ในปี 1951 นักดาราศาสตร์ คือ O’Connell ได้ทำการสังเกตการณ์ทางแสง ของระบบดาวคู่อุปราคา RX Cas และพบว่า ความสว่าง ณ ตำแหน่งการบังกันครั้งแรก (Primary Eclipse) ไม่เท่ากับ ความสว่าง ณ ตำแหน่งบังกันครั้งที่ 2 (Secondary Eclipse) ซึ่งต่อมา Abhyankar (1959) ก็พบ ปรากฏการณ์เช่นนี้ในระบบดาวคู่ AO Cas ในปี ค.ศ 1969 Milone เป็นคนแรกที่เรียกปรากฏการณ์เช่นนี้ว่า O’Connell effect และเขาได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับ ปรากฏการณ์นี้ ซึ่งมักพบว่าเกิดขึ้นเฉพาะในระบบดาวคู่ แบบติดกันหรือใกล้ติดกัน (near – contact) ที่มีคาบสั้น โดยเรียกกรณีนี้

$\max I > \max II$ เรียกว่า Positive O’Connell effect และ

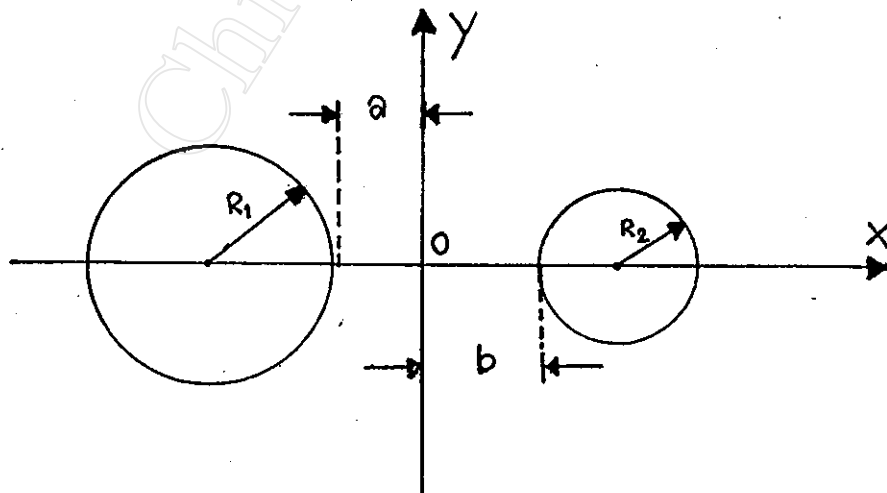
$\max I < \max II$ เรียกว่า negative O’Connell effect

ในระบบดาวคู่แบบติดกันหรือใกล้ติดกัน หลาย ๆ ระบบ พบว่า มีบางระบบที่กราฟแสงสามารถเปลี่ยนจาก Positive O’Connell effect ไปเป็น Negative O’Connell effect หรือเปลี่ยนแปลงใน

ลักษณะตรงข้ามก็มี ทั้งนี้เนื่องจากในระบบดาวคู่ ยังอยู่ในช่วงการวิวัฒนาการและระบบก็ยังไม่อยู่ในสภาวะสมดุลทางความร้อน (Thermal Equilibrium) และยังมีกลไกหลายอย่างเกิดขึ้น อาทิเช่น การถ่ายเทมวล (Mass transfer) ในระบบ การเกิดจุดร้อน (hot spot) บริเวณผิวดาว เป็นต้น เหล่านี้ล้วนแต่เป็นสาเหตุให้เกิดความอสมมาตรของกราฟแสงทั้งสิ้นในการอธิบาย O'Connell effect มีแนวทาง 3 ประการ คือ 1) เกิดจากผลของแรงโคริโอลิส 2) เกิดจากมีจุดบนผิวดาว และ 3) เกิดจากการถ่ายมวล (mass exchange) ในระบบ

ในปี ค.ศ 1993 Zhou และ Leung เสนอแนวความคิดว่า O'Connell effect ในระบบดาวคู่แบบติดกันเกิดจากแรงโคริโอลิส ที่เกิดเนื่องจากการหมุนและการโคจรของระบบดาวคู่ ต่อมาในปี ค.ศ 1960 Binnendijk เป็นคนแรกที่ใช้โมเดลของจุด (Spot model) ในการอธิบายการเกิด O'Connell effect ของกราฟแสงในระบบดาวคู่ AH Vir ซึ่งได้การยอมรับแนวคิดดังกล่าวมาใช้เป็นแนวทางในการอธิบายความอสมมาตรของกราฟแสง มากขึ้น ในปี ค.ศ 1994 Shaw ได้เสนอว่า จุดร้อนที่เกิดบนผิวดาวในระบบดาวคู่ เป็นผลจากการถ่ายเทมวล (Mass transfer) ระหว่างสมาชิกของดาวคู่ซึ่งจากสมมติฐานนี้ จะได้มีการอธิบายรายละเอียดต่อไป

ในระบบดาวคู่แบบใกล้ชิด ปรากฏการณ์ O'Connell effect สมมติให้เกิดจากผลของอันตรกิริยาระหว่างสมาชิกและการถ่ายมวลภายในระบบ กำหนดให้มวลที่หมุนรอบดาวมีความเร็วเฉลี่ยเท่ากับศูนย์เมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางมวลของระบบ ρ คือ ความหนาแน่นเฉลี่ยของมวลสาร และเมื่อมวลถูกดาวที่มวลวนรอบจับไว้ให้ถือว่าพลังงานจลน์ของมวลสารเปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อน (Thermal Energy) ทั้งหมด ซึ่งความร้อนนี้จะทำให้บรรยากาศของดาวบริเวณที่มวลตกลงไปร้อนขึ้นเป็นเหตุให้ผิวดาวดวงเดียวกันมีอุณหภูมิพื้นผิวด่างกัน ซึ่งเป็นสาเหตุของความอสมมาตรของกราฟแสง คือมีความสว่างที่เฟส 0.25 และ 0.75 ไม่เท่ากัน



รูปที่ 2.4 A moving coordinate System

พิจารณารูปที่ (2.4) กำหนดให้ดาวทั้งสองดวงในระบบดาวคู่เป็นทรงกลมมีการโคจรแบบ Synchronous กันทั้งระบบ โดยที่ความเร็วของการโคจรมีทิศทางกับแกนหมุนของระบบดาวคู่ และมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่จุด 0 ดาวปฐมภูมิและทุติยภูมิ วางตัวไปแนวแกน X โดยให้ทั้งระบบหมุนรอบแกน Y ให้ a และ b เป็นตำแหน่งที่ผิวดาว ปฐมภูมิและดาวทุติยภูมิ อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลตามแนวแกน X ดังนั้นพิกัดของจุดศูนย์กลางของดาวปฐมภูมิ คือ $[-(a + R_1), 0]$ และสำหรับดาวทุติยภูมิ คือ $[(b + R_2), 0]$ เมื่อ R_1 และ R_2 คือ รัศมีของดาวปฐมภูมิและดาวทุติยภูมิในหน่วยรัศมีของดวงอาทิตย์ตามลำดับ

จากนิยามของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ สามารถคำนวณหาค่า a และ b ได้จาก

$$a = \frac{Aq - R_1(1+q)}{1+q} \quad (2.22)$$

$$b = \frac{A - R_2(1+q)}{1+q} \quad (2.23)$$

เมื่อ A คือ ระยะทางระหว่าง จุดศูนย์กลางมวลของดาวทั้งสองในหน่วย solar radius

q คือ อัตราส่วนมวล (mass ratio , $q = m_2/m_1$)

ความเร็วของผิวดาวที่โคจรรอบจุดศูนย์กลางมวล $V(x)$ จาก

$$V(x) = \frac{2\pi x}{p} \quad (2.24)$$

เมื่อ p คือคาบการโคจรของระบบดาวคู่ในหน่วยวัน

กำหนดให้พื้นที่ผิวที่จับมวลไว้คือ $ds = 2ydx$ ดังนั้นมวลที่ถูกจับไว้คือ

$$\partial m = \frac{4\pi\rho y x dx}{p} \quad (2.25)$$

กรณีที่มวลดังกล่าวถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์ทั้งหมดจะได้

$$\begin{aligned} dE &= 0.5 \partial m V^2(x) \\ &= \frac{8\pi^3 \rho y x^3 dx}{p^3} \end{aligned} \quad (2.26)$$

จากรูปที่ (2.4) ถ้าเราฉาย (Projection) ผิวของดาวทั้งสองลงบนระนาบ xy ระยะทางของผิวดาวตามแกน y สำหรับดาวปฐมภูมิ จะได้

$$Y = \sqrt{R_1^2 - \left(X + \frac{Aq}{1+q}\right)^2} \quad (2.27)$$

และสำหรับดาวทุติยภูมิ

$$Y = \sqrt{R_2^2 - \left(X - \frac{A}{1+q}\right)^2} \quad (2.28)$$

จากการที่มวลถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานจนทั้งหมดทำให้ ความสว่าง (Luminosity) ของดาวปฐมภูมิ และดาวทุติยภูมิ เปลี่ยนแปลงดังนี้

$$\Delta L_1 = \frac{8\pi^3 \rho}{p^3} \int_a^{a+2R_1} \sqrt{R_1^2 - \left(x + \frac{Aq}{1+q}\right)^2} x^3 dx \quad (2.29)$$

และ

$$\Delta L_2 = \frac{8\pi^3 \rho}{p^3} \int_b^{b+2R_2} \sqrt{R_2^2 - \left(x - \frac{A}{1+q}\right)^2} x^3 dx \quad (2.30)$$

อินทิเกรต สมการ (2.29) และ (2.30) จะได้

$$\Delta L_1 = \frac{\pi^4 A q \rho R_1^2}{p^3 (1+q)} \left[3R_1^2 + \frac{4A^2 q^2}{(1+q)^2} \right] \quad (2.31)$$

$$\Delta L_2 = \frac{\pi^4 A \rho R_2^2}{p^3 (1+q)} \left[3R_2^2 + \frac{4A^2}{(1+q)^2} \right] \quad (2.32)$$

และจากความสว่างเนื่องจากการแผ่รังสี (Radiation Luminosity) ของดาวทั้งสองคือ

$$\begin{aligned} L_1 &= R_1^2 T_1^4 \\ L_2 &= R_2^2 T_2^4 \end{aligned} \quad (2.33)$$

สมมติให้การหมุนของระบบดาวคู่ทวนเข็มนาฬิกา ผลต่างโชติมาตรของตำแหน่ง Primary Eclipse และ Secondary Eclipse หาได้จาก ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\Delta m = -2.5 \log \frac{0.5(L_1 + L_2) + \Delta L_1}{0.5(L_1 + L_2) + \Delta L_2} \quad (2.34)$$

จากสมการ (2.34) กรณี $\Delta L_1 \neq \Delta L_2$ จะทำให้ $\Delta m \neq 0$ นั้นแสดงว่าเกิด O'Connell effect ในกราฟแสงของระบบดาวคู่

ในการทดสอบทฤษฎีข้างต้นที่จะใช้ในการอธิบายการเกิด O'Connell effect ในกราฟแสงของระบบดาวคู่แบบใกล้เคียง ได้มีนักดาราศาสตร์ 2 คน คือ Qingyao Liu และ Yulan Yang ได้ทำการศึกษาในระบบดาวคู่ อุปราคาแบบใกล้เคียง ในระบบ W Ursae Major รวม 6 ระบบ แบ่งเป็น W-subtype 3 ระบบ คือ YY Eri, BX per และ SW Lac และ A-Subtype อีก 3 ระบบ คือ CN And, FG Hya และ AU Ser ซึ่งก็ใช้เป็นโมเดลมาตรฐานในการเปรียบเทียบที่จะใช้ศึกษาการเกิด O'Connell effect ในระบบอื่น ๆ ที่เป็นระบบดาวคู่แบบใกล้เคียงต่อไป

พิจารณาระบบดาวคู่ที่มีการวิวัฒนาการในช่วงท้าย (Late type) หรือระบบดาวคู่ที่มีคาบสั้น เช่นในระบบดาวคู่อุปราคชนิด W Uma System ซึ่งมักจะพบความอสมมาตรของกราฟแสงจากการสังเกตการณ์ได้ง่าย โดยสามารถใช้ทฤษฎีข้างต้นอธิบายได้ และจากกฎของเคปเลอร์ (Kepler's law)

$$A^3 = 74.5 p^2 M_1 (1+q) \quad (2.35)$$

และหารัศมีสัมพัทธ์ (Relative radius) จาก

$$r_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{A} \quad (2.36)$$

แทนที่สมการ (2.31), (2.32), (2.33), (2.35) และ (2.36) ลงในสมการ (2.34) จะได้

$$\Delta m = -2.5 \log \frac{\frac{T_1^4}{M_1} p (1+q)^2 \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right) + 149 \pi^4 q \rho [3r_1^2 (1+q^2) + 4q^2]}{\frac{T_1^4}{M_1} p (1+q)^2 \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right) + 149 \pi^4 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \rho [3r_2^2 (1+q)^2 + 4]} \quad (2.37)$$

จากสมการ (2.37) แสดงให้เห็นว่าในระบบดาวคู่ที่มีคาบสั้นและอยู่ในช่วง Late - type จะพบ O'Connell effect ได้ง่าย เนื่องจาก เทอมที่มี T_1^4/M_1 และ p มีค่าน้อย จึงไม่ค่อยมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงโชติมาตรของดาวนักแต่เมื่อพิจารณาจากเทอมที่ 2 การเกิดอันตรกิริยาระหว่างมวลสารกับดาวทั้งสองดวงจะมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของโชติมาตร มากกว่าเทอมแรกจึงทำให้

$\Delta m \neq 0$ ซึ่งแสดงว่าเกิดความอสมมาตรในกราฟแสง (Asymmetric Light curve)

จากการที่ Qingyao Liu และ Yulan Yang (2000) ได้ทำการศึกษาระบบดาวคู่อุปราคา W Uma System รวม 6 ระบบคือ ชนิด W – Subtype คือ ดาวคู่ YY Eri , Ex Per และ SW Lac และได้ศึกษาระบบดาวคู่ในกลุ่ม A-Subtype อีก 3 ดวงคือ CN And , FG Hya และ AU Ser ซึ่งดาวคู่ทั้ง 6 ดาวต่างก็เป็นระบบแบบใกล้เคียงกัน จากการศึกษาพบว่ากราฟแสงที่ได้มีความสมมาตร และข้อมูลจากการคำนวณโดยทฤษฎีก็สอดคล้องกับข้อมูลจากการสังเกตการณ์

อย่างไรก็ตามก็มีข้อจำกัดในการใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับ O'Connell effect ที่เสนอมาข้างต้น ในการอธิบายความสมมาตรของกราฟแสง คือ

1. ระบบที่ทำการศึกษาดำเนินเป็นระบบดาวคู่แบบใกล้เคียงที่มีคาบการ โคจรสั้นและมีวิวัฒนาการในช่วงท้าย (Late type) โดยไม่จำกัดว่า ระบบดาวคู่ดวงนั้นจะมี spectral type อย่างไร

2. ในการศึกษา O'Connell effect ในกลุ่มดาวอื่น ๆ ที่เป็นเซตย่อยของ W Uma System ทั้ง A – type และ W-type ต้องเปรียบเทียบกับโมเดลของความมาตรฐานทั้ง 6 ดวงข้างต้น กับกราฟแสงจากการสังเกต

จะพบว่าทฤษฎีข้างต้นก็มีข้อจำกัดในการอธิบายปรากฏการณ์ O'Connell effect ในระบบดาวคู่ ดังนั้นเพื่อลดข้อจำกัดและเพิ่มความน่าเชื่อถือ ในการวิเคราะห์ข้อมูลที่ละเอียดขึ้น จะต้องมีการศึกษาวิจัยสาเหตุต่าง ๆ ที่มีผลต่อการเกิด O'Connell effect เพื่อที่เราจะได้เข้าใจวิวัฒนาการในระบบดาวคู่แบบใกล้เคียงได้ดียิ่งขึ้น

2.4 Thermal Relaxation Oscillation Theory (TRO theory)

ในช่วง 30 ปีที่ผ่านมา นักดาราศาสตร์พยายามอธิบายวิวัฒนาการในระบบดาวคู่แบบติดกัน (Contact binaries) โดยใช้โครงสร้างทางกายภาพของโรช (Roche Geometry) เป็นเกณฑ์และถือว่า สมาชิกทั้งสองควรมีอุณหภูมิสัมฤทธิ์เท่ากัน (Mochmacki, 1981) แต่จากการสังเกตการณ์วิธีการข้างต้นไม่สามารถอธิบายกราฟแสงในระบบดาวคู่แบบติดกันได้ เช่นกรณี อสมมาตรของกราฟแสง (kahler, 1989) ในปี ค.ศ. 1968 Lucy ได้สร้างโมเดลเพื่อใช้อธิบายระบบดาวคู่ในกลุ่ม W Ursae major โดยให้ระบบอยู่ภายใต้สมดุลเชิงความร้อน (Thermal Equilibrium) และได้ศึกษาต่อเนื่อง จนปี ค.ศ 1976 Lucy และ Flannery และปี ค.ศ 1977 Robertson และ Eggleton ได้เสนอว่า ระบบดาวคู่อุปราคาชนิด W UMa System เป็นระบบที่มีการวิวัฒนาการในบริเวณขอบดวง (marginal) เกิดสถานะที่เรียกว่า Thermal relaxation Oscillation ทั้งนี้เนื่องจากระบบขณะอยู่ในสมดุลความร้อนแต่อัตราส่วนมวลมีการเปลี่ยนแปลง เนื่องจากการส่งถ่ายมวลระหว่างสมาชิก (Lucy & Wilson 1979; Hazlehurst 1985)

เมื่อเกิดการถ่ายมวลระบบจะออกจากสมดุลทางความร้อน เช่นกรณีที่มีมวลถูกถ่ายเทจากดาวปฐมภูมิไปสู่ดาวทุติยภูมิ การที่ดาวทุติยภูมิจะกลับสู่สมดุลอีกครั้งต้องขยายขนาดเพิ่มขึ้น สมมติให้มวลในระบบและโมเมนตัมเชิงมุมในระบบคงที่ การถ่ายมวลที่เกิดขึ้นจะทำให้ สมาชิกในระบบดาวคู่แบบติดกัน ค่อยๆ แยกจากกัน (Broken contact phase) และแยกกันอย่างชัดเจน ทำให้ไม่มีการถ่ายเทมวลและพลังงานระหว่างคู่สมาชิก โดยแต่ละดวงก็เหมือนดาวเดี่ยว (single star) แต่แตกต่างจากดาวเดี่ยวทั่วไป คือ มักพบว่า ดาวทุติยภูมิ จะมีการยุบตัวเพื่อทำให้รัศมีเข้าใกล้ รัศมีของดาวใน ZAMS ในขณะที่ดาวปฐมภูมิจะขยายขนาดเมื่อเข้าสู่ Zero – Age – Main – Sequence (ZAMS) สถานะดังกล่าวสามารถทำให้เกิดการถ่ายมวลในระบบได้อีก คือ จากดาวปฐมภูมิไปยังดาวทุติยภูมิและดำเนินต่อไปจนสมาชิกทั้งสองกลับมาติดกันอีก เมื่อดาวทุติยภูมิได้รับมวล เพิ่มขึ้นก็จะขยายตัวเพื่อให้เกิดสมดุลความร้อน เมื่อขยายตัวเต็มผิวห่อหุ้มของโรชระบบก็สามารถเกิดการถ่ายมวลย้อนกลับเป็นวัฏจักรต่อไปได้ การศึกษาสถานะดังกล่าวในระบบดาวคู่แบบติดกันเรียกว่า สถานะ Thermal relaxation Oscillation

Binnendijk (1970) ได้เสนอให้แบ่งระบบดาวคู่อุปราคา W UMa system ออกเป็น 2 กลุ่ม คือ A – subtype และ W – subtype โดยที่ A – subtype สมาชิกดวงที่มีมวลมากกว่าและใหญ่กว่าจะร้อนกว่าสมาชิกอีกดวง มักพบว่ามีชนิดสเปกตรัมชนิด A หรือ F ส่วน W – subtype สมาชิกดวงที่มีมวลมากกว่าและใหญ่กว่ามักจะเป็นดาวดวงที่เย็นกว่าสมาชิกอีกดวง โดยมากมักมี สเปกตรัมชนิดหลัง F5 ลงไป ในเซตย่อยของ W UMa system ทั้ง 2 เซตย่อยพบว่า อัตราส่วนมวล (mass ratio) ใน W- type system จะมากกว่าในระบบ A- type (Smith 1984) และอุณหภูมิพื้นผิวของดาวทุติยภูมิ จะสูงกว่าดาวปฐมภูมิ ในระบบ W – type

พิจารณาระบบดาวคู่แบบติดกันที่อยู่ในสถานะ Thermal relaxation oscillation ค่าความสว่างที่สูงขึ้นของดาวฤกษ์เกิดมาจากการแผ่รังสีของดาวฤกษ์เอง (Lucy 1968) สมมติให้ค่าการส่องสว่างที่ดาวฤกษ์ส่งให้กับดาวฤกษ์เกิดอย่างสมบูรณ์ให้เท่ากับ

δL_1 แยกเป็น 2 ส่วน คือ การส่องสว่างที่เกิดเนื่องจากการแผ่รังสีของดาวฤกษ์เอง เรียกว่า radiative luminosity, δL_2 และการส่องสว่างที่เกิดจากการดูดกลืนพลังงานจากอันตรกิริยาระหว่างดาวฤกษ์กับผิวห่อหุ้มร่วม (Common Convective Envelope, CCE) เรียกว่า Interaction Luminosity, δL_3 ซึ่งเทอมนี้มีผลต่อการวิวัฒนาการของดาวฤกษ์ กล่าวคือ ดาวฤกษ์จะเกิดการขยายหรือยุบตัวก็ขึ้นกับค่า δL_3 โดยถ้า δL_3 เป็นค่าบวกดาวฤกษ์จะดูดกลืนพลังงานที่ถ่ายเทมาจากดาวฤกษ์ทำให้ดาวฤกษ์ขยายตัวและถ้า δL_3 เป็นค่าลบดาวฤกษ์จะมีการสูญเสียพลังงานศักย์โน้มถ่วงไปทำให้ดาวเกิดการยุบตัวลง

กำหนดให้

$$U_1 = \delta L_1 / L_1, \quad U_2 = \delta L_2 / L_1, \quad \gamma = \delta L_3 / L_1 \quad (2.38)$$

เมื่อ

$$\delta L_1 = L_{1i} - L_1, \quad \delta L_2 = L_2 - L_{2i} \quad (2.39)$$

L_1 และ L_2 คือ ค่าความสว่างจากการสังเกตดาวฤกษ์และดาวฤกษ์ตามลำดับ

L_{1i} และ L_{2i} คือ ความสว่างจริง (Intrinsic Luminosity) ของดาวฤกษ์และดาวฤกษ์

U_1, U_2 และ γ คือ อัตราส่วนการส่งถ่ายพลังงาน (The ratio of energy transfer)

อัตราส่วนการแผ่รังสีของดาวฤกษ์ (The reradiative ratio) และสัมประสิทธิ์ของการเกิดอันตรกิริยา (Interaction coefficient) ระหว่างดาวฤกษ์กับผิวห่อหุ้มร่วมตามลำดับ

จากสมมติฐานข้างต้น จะได้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\delta L_1 = \delta L_2 + \delta L_3 \quad \text{หรือ} \quad U_1 = U_2 + \gamma \quad (2.40)$$

จาก Mass – Luminosity relation, $L_1 \propto m^\alpha$ โดยที่ $\alpha = 4.0$ (Smith, 1983) และ Stefan – Boltzmann 's law จากสมการ (2.38) - (2.40) จะได้

$$U_1 = \frac{st^4 - q^\alpha + \gamma}{1 + q^\alpha} \quad \text{และ} \quad U_2 = U_1 - \gamma \quad (2.41)$$

เมื่อ $s = S_1 / S_2$ และ $t = T_{2\text{eff}} / T_{1\text{eff}}$
 $S_{1,2}$ คือ พื้นที่ผิวของดาวแต่ละดวง
 T_{eff} คือ อุณหภูมิพื้นผิวสัมฤทธิ์ของดาว

ในกรณีที่ $\delta L_3 = 0$ จะได้ว่า $U_1 = U_2 = U$ ดังนั้น

$$U = \frac{st^4 - q^\alpha}{1 + q^\alpha} \quad (2.42)$$

สมการ (2.42) คือ อัตราส่วนของการส่งถ่ายพลังงาน (The ratio of energy transfer) (Mochnicki, 1981)

การหาค่าสัมประสิทธิ์ของการเกิดอันตรกิริยา (γ) โดยพัฒนาจากการที่ดาวทุติยภูมิจะยุบตัวได้ ค่าพลังงานศักย์โน้มถ่วงต้องต่ำกว่า δL_3 กำหนดให้ดาวทุติยภูมิมีลักษณะเป็นทรงกลมสมมาตร มีมวล M_2 รัศมี R_2 และหาค่าพลังงานศักย์โน้มถ่วงได้จาก (Kippenhahn & Weigert, 1990)

$$E_g = \frac{3GM_2^2}{(5-n)R_2} \quad (2.43)$$

โดยที่ $n=3$ สำหรับ A – type system และ $n=1.5$ สำหรับ W – type ค่าความสว่างจากอันตรกิริยาระหว่างดาวทุติยภูมิกับผิวห่อหุ้มร่วม (CCE) , δL_3 จะเป็นตัวแปรที่ทำให้รัศมีของดาวทุติยภูมิ เบี่ยงเบนจาก ZAMS radius ไปสู่ R_2 จะได้

$$\gamma = \frac{dE_g}{L_1 dt} = \frac{3GM_2^2}{(5-n)L_1 R_2^2} \beta \quad (2.44)$$

เมื่อ β คือ ความเร็วของการยุบหรือขยายตัวของดาวทุติยภูมิ ($\beta = dR_2/dt$)

จากสมการ (2.44) สัมประสิทธิ์ของการเกิดอันตรกิริยาระหว่างดาวทุติยภูมิกับผิวห่อหุ้มร่วม (γ) จะเปลี่ยนแปลงตามความเร็วของการยุบขยายตัว ตามแนวรัศมีของดาวทุติยภูมิ แทนสมการ (2.44) ใน (2.41) จะได้

$$U_1 = a + b\beta \quad (2.45)$$

เมื่อ

$$a = \frac{st^4 - q^\alpha}{1 + q^\alpha} \quad \text{และ} \quad b = \frac{3GM_2^2}{(5-n)R_2^2 L_1 (1 + q^\alpha)} \quad (2.46)$$

จากสมการ (2.42) และ (2.46) พบว่า $a = U$ แต่ a ไม่มีความหมายในทางฟิสิกส์ และใช้ในการคำนวณหา U_1 ไม่ได้ เนื่องจากความเร็วของการยุบหรือขยายตัวของดาวทุติยภูมิ จากการสังเกตการณ์หายากมาก แต่สามารถทำได้โดยถือว่าทั้งระบบยุบ หรือ ขยาย พร้อมกัน แล้วหาค่าเฉลี่ยความเร็วของการยุบหรือขยายตัว

กำหนด $U_{1i}^w, \beta_i^w, U_{1j}^A, \beta_j^A$ คือ อัตราส่วนของการส่งถ่ายพลังงานและความเร็วของการยุบหรือขยายตัวของดาวในระบบ W - type ดวงที่ i และ A - type ดวงที่ j ตามลำดับจะได้

$$U_{1i}^w = a_i^w + b_i^w \beta_i^w \quad \text{และ} \quad U_{1j}^A = a_j^A + b_j^A \beta_j^A \quad (2.47)$$

ให้ $U_1^w = 1/M \sum_{i=1}^M U_{1i}^w$ และ $U_1^A = 1/N \sum_{j=1}^N U_{1j}^A$ เป็นค่าอัตราส่วนของการส่งถ่ายพลังงานเฉลี่ย

ในระบบดาวคู่อุปราคาชนิด W - type และ A - type ตามลำดับ และ $\beta_i^w = \beta^w$

รวมทั้ง $\beta_j^A = \beta^A$ ทุกค่า i และ j ตามลำดับ

ในปี 1988 Hilditch และคณะได้คำนวณค่า (b_i^w, a_i^w) และ (b_j^A, a_j^A) โดยอาศัยข้อมูลจากการสังเกตการณ์ระบบดาวคู่แบบติดกันจำนวน 22 ระบบ ได้ข้อสรุปว่าในระบบดาวคู่แบบติดกันชนิด A - type system ระบบจะมีการขยายตัวและใน W - type system ระบบจะยุบตัวลง และได้ความสัมพันธ์ตามสมการ

$$U_{1i}^w = a_i^w + b_i^w \beta_i^w \quad \text{และ} \quad U_{1j}^A = a_j^A + b_j^A \beta_j^A \quad (2.48)$$

ความเร็วของการยุบตัวของระบบดาวคู่ชนิด W - type คำนวณโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้

$$\beta^w = \frac{M \sum_{i=1}^M a_i^w b_i^w - \sum_{i=1}^M b_i^w \sum_{i=1}^M a_i^w}{\left(\sum_{i=1}^M b_i^w \right)^2 - M \sum_{i=1}^M (b_i^w)^2} \quad (2.49)$$

และ

$$\beta^w = \frac{N \sum_{j=1}^N a_j^A b_j^A - \sum_{j=1}^N b_j^A \sum_{j=1}^N a_j^A}{\left(\sum_{j=1}^N b_j^A \right)^2 - N \sum_{j=1}^N (b_j^A)^2} \quad (2.50)$$

การหาค่าความเร็วของการยุบหรือขยายตัวสูงสุด ($\beta_{\max}^A$) ในระบบ A- type system พิจารณากรณีที่ ถ้าไม่มีการส่องสว่างที่เกิดจากการแผ่รังสีของดาวฤกษ์ ($\delta L_2 = 0$) จะได้ว่า ความเร็วของการขยายตัวของดาวฤกษ์ จะเกิดจากพลังงานที่ถ่ายเทจากดาวปฐมภูมิอย่างเดียว จะได้ความเร็วของการขยายตัวสูงสุด ($\beta_{\max}^A$) ใน A-type system ดังนี้

$$\beta_{i\max}^A = \frac{(5-n)(st^4 - q^\alpha)L_1 R_2^2}{3GM_2^2 q^\alpha} \quad (2.51)$$

ใน W - type system กำหนดให้ ภายในระบบไม่มีการส่งถ่ายพลังงานระหว่างสมาชิก ($\delta L_1 = 0$) นั่นคือการส่องสว่างของดาวฤกษ์ จะเกิดจากพลังงานศักย์โน้มถ่วงและพลังงานนิวเคลียร์ของดาวฤกษ์เอง จะได้

$$\beta_{i\max}^W = \frac{(5-n)(q^\alpha - st^4)L_1 R_2^2}{3GM_2^2} \quad (2.52)$$

ในปี ค.ศ 1994 Wang พบว่า ความเร็วสูงสุดของการยุบ - ขยายตัว ของดาวฤกษ์ในระบบ W- type มีค่าเป็นบวก ซึ่งแสดงว่าดาวกำลังยุบตัวลงอย่างช้า ๆ เข้าสู่ ZAMS และ A - type ดาวฤกษ์ กำลังขยายตัวเพื่อให้เกิดสภาวะสมดุลในระบบ ซึ่งทั้งสองถือว่าเป็นความแตกต่างของระบบดาวคู่ที่วิวัฒนาการภายใต้สภาวะ Thermal relaxation Oscillation ดาวคู่ ชนิด W- type มีการยุบตัวของดาวฤกษ์โดยการปล่อยพลังงานศักย์โน้มถ่วงบางส่วนออกมาทำให้อุณหภูมิ ที่ผิวดาวสูงกว่าอุณหภูมิพื้นผิวของดาวปฐมภูมิ (Wang 1994)

จากทฤษฎี Thermal relaxation oscillation ที่เสนอโดย Lucy (1976) Robertson และ Eggleton (1977) ทำให้สามารถอธิบาย และทำนายช่วงของการวิวัฒนาการของระบบดาวคู่แบบติดกัน ไปสู่การเกิดสภาวะ broken – contact phase ที่ทำให้สมาชิกในระบบสามารถแยกจากกันได้ รวมทั้งสามารถอธิบายสภาวะที่สมาชิกในระบบดาวคู่แบบติดกันชนิด poor thermal contact ซึ่งพวกเขาได้แบ่งเซตย่อยของระบบดาวคู่อุปราคาชนิด W Ursae Major ใหม่คือ B-type ซึ่งเป็นระบบดาวคู่แบบ ฟังแต่กัน (Poor thermal contact) และภายในระบบยังไม่อยู่ในสมดุลความร้อน จึงทำให้เกิดการถ่ายมวล และพลังงานในระบบ และจากการสังเกตการณ์ก็พบว่า ข้อมูลจากการสังเกตการณ์สอดคล้องกับทฤษฎีที่สามารถอธิบายการเกิด O’Connell effect จากกราฟแสงของระบบดาวคู่ได้

อย่างไรก็ตามทฤษฎีดังกล่าวก็ต้องมีการพัฒนาให้มีความน่าเชื่อถือยิ่งขึ้นซึ่งต้องทำการศึกษาค้นคว้าต่อไป