

บทที่ 3

การศึกษาขอบเขตของจำนวนแรมเซย์บางจำนวน

ในบทนี้เราจะหาค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์บางจำนวนซึ่งจะศึกษาดังนี้

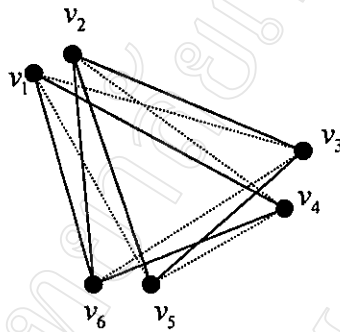
$$1. 9 \leq R_{\parallel}(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 15$$

$$2. 8 \leq R_{\parallel}(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 16$$

$$3. R_{\parallel}(K_{4,4}, K_{4,4}) \geq 34$$

ทฤษฎีบท 3.1 $9 \leq R_{\parallel}(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 15$

พิสูจน์ พิจารณา 2 สี ในรูป 3.1 ให้เส้นที่เชื่อมด้วยเส้นสีน้ำเงินและเส้นที่เชื่อมด้วยเส้นสีแดง



รูป 3.1

ดังนั้น $R_{\parallel}(K_{2,2}, K_{2,2}) > 6$ นั่นคือ

$$R_{\parallel}(K_{2,2}, K_{2,2}) \geq 9 \quad (1.1)$$

ต่อไปจะพิจารณา $R_{\parallel}(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 15$

ให้พิจารณา 2 สีในทั้งหมด 15 จุดใน 3 กลุ่มนี้

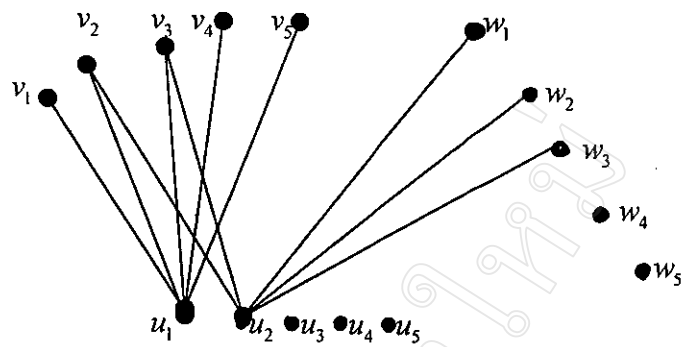
$$V_1(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$

$$V_2(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$V_3(G) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$$

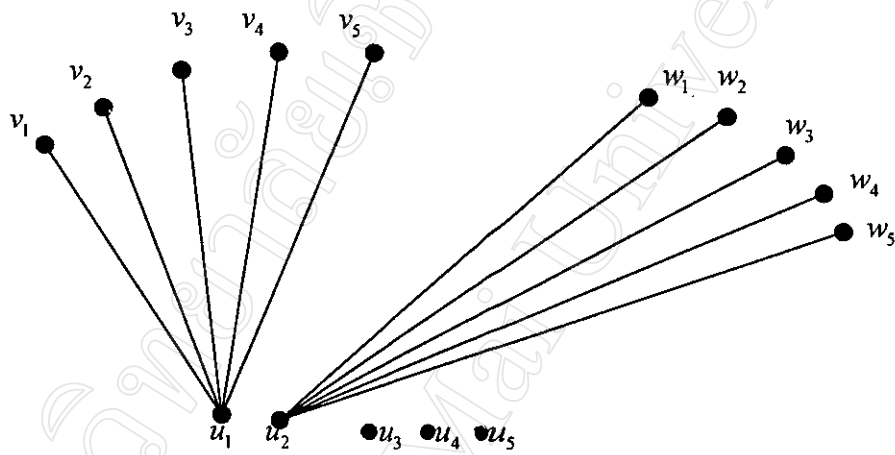
เนื่องจากแต่ละ $u_i (i=1,2,3,4,5)$ มีดีกรี $d(u_i) = 10$ ดังนั้นแต่ละ u_i จะมีเส้นสีน้ำเงินอย่างน้อย 5 เส้นหรือไม่ก็เส้นสีแดงอย่างน้อย 5 เส้นและเนื่องจากมี 5 จุด ดังนั้นจะต้องมีอย่างน้อย 3 จุดที่แต่ละจุดจะมีเส้นสีน้ำเงินอย่างน้อย 5 เส้นหรือไม่ก็มี 3 จุดที่มีเส้นสีแดงอย่างน้อย 5 เส้น เราสามารถสรุปได้ว่าโดยทั่วไปแต่ละจุดใน 3 จุดนี้ u_1, u_2, u_3 ต่างมีเส้นสีน้ำเงินอย่างน้อย 5 เส้น

สมมติว่า u_1 เป็นจุดที่ถูกเชื่อมโดยเส้นสีน้ำเงิน 5 เส้นและประชิดกับ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ถ้า u_2 ถูกเชื่อมโดยเส้นสีน้ำเงินซึ่งประชิดอย่างน้อย 2 จุดระหว่าง v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ดังนั้นจะเกิด $K_{2,2}$ สีน้ำเงินดังตัวอย่างรูป 3.2



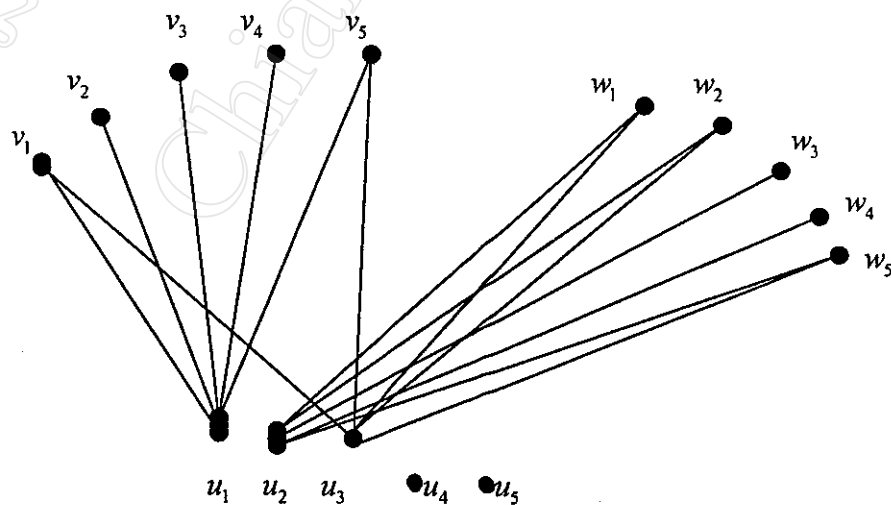
รูป 3.2

ถ้าไม่ใช่กรณีที่กำลังกล่าวมาข้างต้นดังนั้นให้ u_2 ไม่มีจุดเชื่อมกับกลุ่ม $V_2(G)$ ดังตัวอย่างรูป 3.3



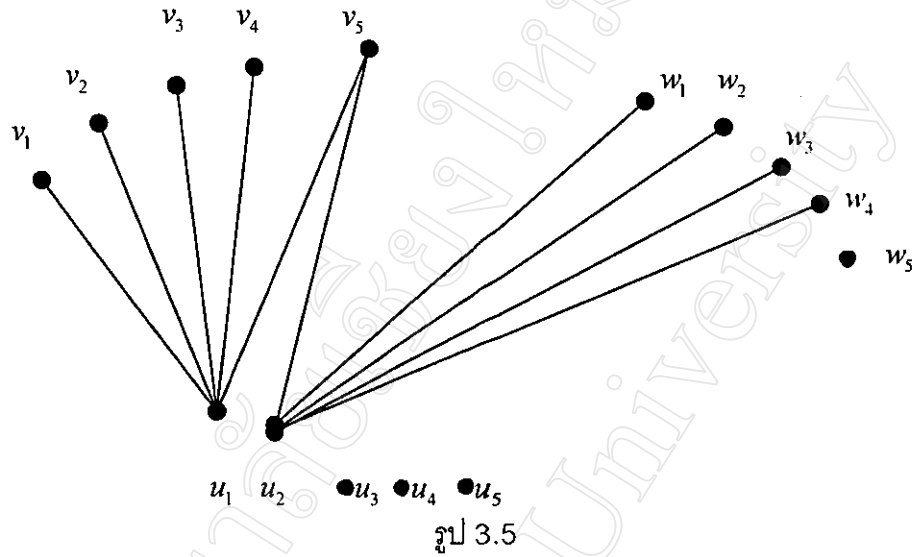
รูป 3.3

ให้พิจารณา 5 เส้นสีน้ำเงินของ u_3 ซึ่งต้องเชื่อมกับจุดในกลุ่ม $V_2(G)$ และ กลุ่ม $V_3(G)$ อย่างน้อย 2 จุดจะเกิด $K_{2,2}$ สีน้ำเงินดังตัวอย่างรูป 3.4

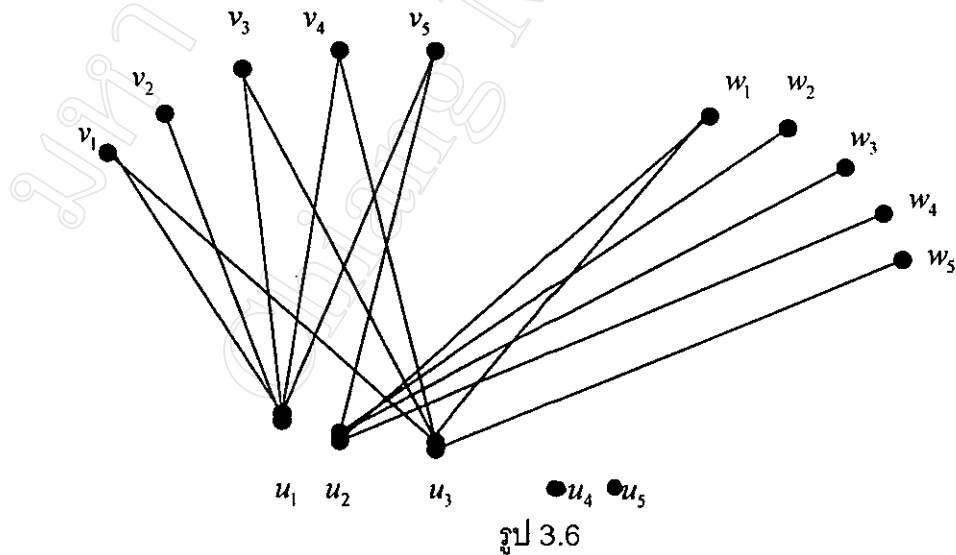


รูป 3.4

กรณีถ้า u_2 เชื่อมกับจุดเพียงจุดเดียวของกลุ่ม $V_2(G)$ หรือกลุ่ม $V_3(G)$ สมมติว่าเป็น v_5 พิจารณา
รูป 3.5



ให้พิจารณา 5 เส้นสีน้ำเงินของ u_3 ซึ่งต้องเชื่อมกับจุดใน $V_2(G)$ หรือกลุ่ม $V_3(G)$ อย่างน้อย 2 จุดจะเกิด $K_{2,2}$ สีน้ำเงินดังตัวอย่างรูป 3.6



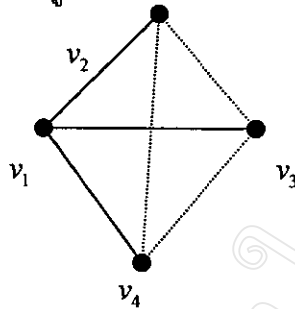
ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าเกิด $K_{2,2}$ เสมอ

เพราะฉะนั้น $R_{\alpha}(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 15$ (1.2)

จาก (1.1) และ (1.2) เราจะได้ $9 \leq R_{\alpha}(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 15$

ทฤษฎีบท 3.2 $8 \leq R_f(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 16$

พิสูจน์ พิจารณา 2 สี ในรูป 3.7 ให้เส้นที่บแทนด้วยสีน้ำเงินและเส้นประแทนด้วยสีแดง



รูป 3.7

ดังนั้น $R_f(K_{2,2}, K_{2,2}) > 4$ นั่นคือ

$$R_f(K_{2,2}, K_{2,2}) \geq 8 \quad (2.1)$$

ต่อไปจะพิจารณา $R_f(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 16$

ให้พิจารณา 2 สีในทั้งหมด 16 จุดใน 4 กลุ่มนี้

$$V_1(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

$$V_2(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$V_3(G) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$V_4(G) = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

มีทั้งหมด 4 กลุ่มและแต่ละกลุ่มมีทั้งหมด 4 จุด โดยจะแบ่งสีออกเป็น 2 สี ให้เส้นที่บแทนด้วยสีน้ำเงินและเส้นประแทนด้วยสีแดง

ให้ r หมายถึง จุดที่เชื่อมด้วยจำนวนเส้นสีแดงมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนเส้นสีน้ำเงิน

ให้ b หมายถึง จุดที่เชื่อมด้วยจำนวนเส้นสีน้ำเงินมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนเส้นสีแดง

ให้ R หมายถึง กลุ่มที่มี r มากกว่าหรือเท่ากับ b

ให้ B หมายถึง กลุ่มที่มี b มากกว่าหรือเท่ากับ r

ซึ่งจะอธิบายได้ว่าในแต่ละจุดมีดีกรีเท่ากับ 12 ดังนั้นจะมีอย่างน้อย 6 เส้นที่เป็นสีเดียวกันและในแต่ละกลุ่มจะมี 4 จุด ดังนั้นจะมีอย่างน้อย 2 จุดที่แต่ละจุดจะมีเส้นสีน้ำเงินอย่างน้อย 6 เส้นหรือ

ไม่กี่ 2 จุดที่มีเส้นสีแดงอย่างน้อย 6 เส้น เราสามารถสรุปได้ว่าโดยทั่วไปแต่ละจุดใน 2 จุด u_1, u_2

ต่างมีเส้นเชื่อมสีน้ำเงินอย่างน้อย 6 เส้น จะแบ่งสีของกลุ่มทั้ง 4 กลุ่มออกเป็นทั้งหมด 5 กรณี

ดังตารางต่อไปนี้

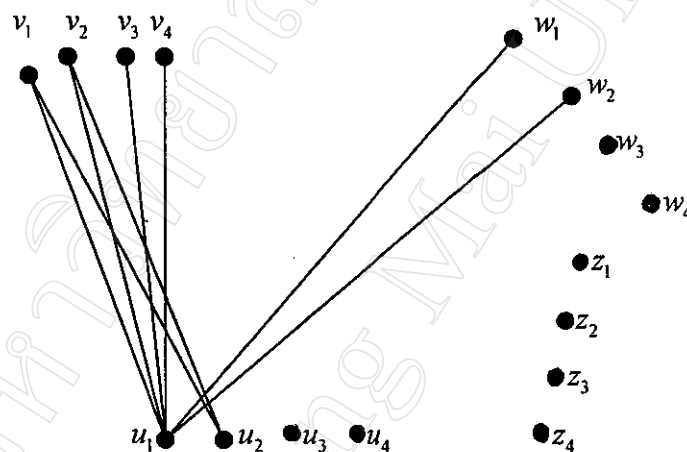
	กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2	กลุ่มที่ 3	กลุ่มที่ 4
กรณีที่ 1	R	R	R	R
กรณีที่ 2	R	R	R	B
กรณีที่ 3	R	R	B	B
กรณีที่ 4	R	B	B	B
กรณีที่ 5	B	B	B	B

ซึ่งกรณีที่ 1 และ 5 จะเหมือนกัน และกรณีที่ 2 และ 4 เหมือนกันเราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ 3

เพราะถ้ากรณีที่ 3 เกิด $K_{2,2}$ จะสรุปได้ว่าอีกทั้ง 4 กรณีจะเกิด $K_{2,2}$ ด้วย

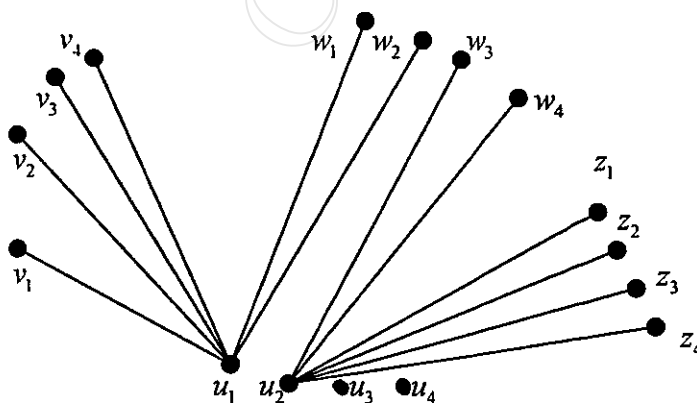
กรณีที่ 3 จะพิจารณาเส้นสีน้ำเงินซึ่งแทนด้วยเส้นที่บ

สมมติว่า u_1 เป็นจุดที่ถูกเชื่อมโดยเส้นสีน้ำเงิน 6 เส้นและประชิดกับ $v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2$ ถ้า u_2 ถูกเชื่อมโดยเส้นสีน้ำเงินซึ่งประชิดอย่างน้อย 2 จุดระหว่าง $v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2$ ดังนั้นจะเกิด $K_{2,2}$ สีน้ำเงินดังตัวอย่างรูป 3.8



รูป 3.8

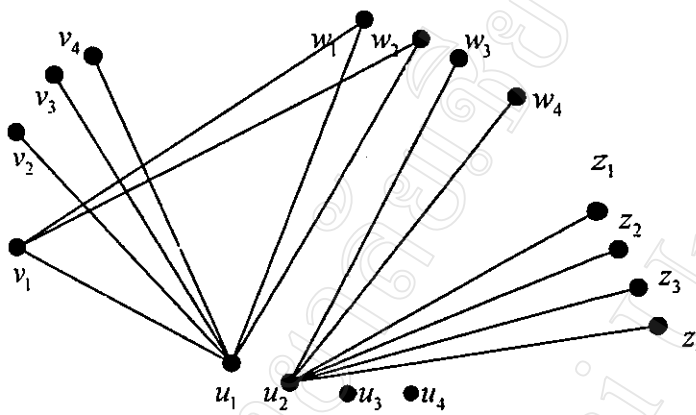
ถ้าไม่ใช่กรณีข้างต้นดังนั้นให้ u_2 ถูกเชื่อมโดยเส้นสีน้ำเงินไปยังจุดที่ไม่มีจุดเชื่อมกับ u_1 ดังตัวอย่างรูป 3.9



รูป 3.9

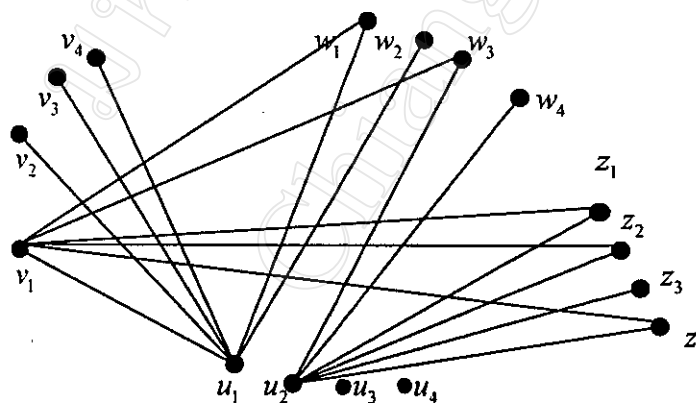
ให้พิจารณาอีก 2 จุดในกลุ่มที่เหลือซึ่งอาจจะเป็นกลุ่ม $V_2(G), V_3(G)$ หรือ $V_4(G)$ กลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง สมมติใช้จุด v_1, v_2

สมมติจุด v_1 มีเส้นที่เป็นสีน้ำเงินเชื่อมออกไปอีก 5 เส้นโดยมีเงื่อนไขในตอนแรกว่าไม่ให้เชื่อมไปยังกลุ่ม $V_1(G)$ คือจุด u_2, u_3 และ u_4 ดังนั้นอีก 5 เส้นจะเชื่อมไปยังจุดใดก็ได้ ในกลุ่ม $V_3(G), V_4(G)$ สมมติให้มี 1 เส้นเชื่อมไปยังจุด w_1 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยังจุด w_2 ไม่ได้เพราะจะทำให้จุดประชิดของจุด w_1 และจุด w_2 ซ้ำกันอย่างน้อย 2 จุดขึ้นไปจะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ดังตัวอย่างรูป 3.10



รูป 3.10

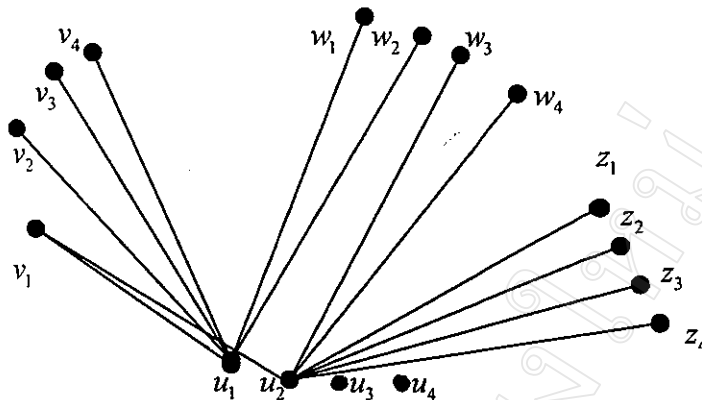
ดังนั้นจะเหลืออีก 4 เส้นและสมมติให้อีก 1 เส้น ไปยังจุดที่เหลือจุดใดก็ได้สมมติให้ไปยังจุด w_3 และเส้นที่เหลืออีก 3 เส้นจะเชื่อมไปยังจุดที่เหลือจุดใดก็ได้คือ จุด w_4, z_1, z_2, z_3, z_4 จะเกิด $K_{2,2}$ เพราะจะทำให้จุดประชิดในจุดที่เหลือซ้ำกันอย่างน้อย 2 จุดขึ้นไปดังตัวอย่างรูป 3.11



รูป 3.11

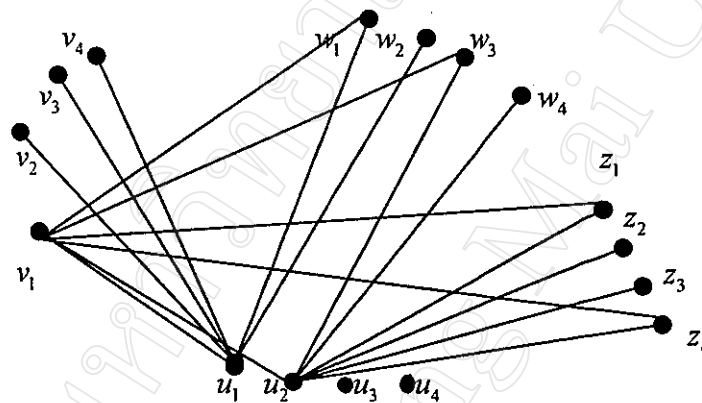
ต่อไปถ้ามีเงื่อนไขว่าไม่ให้เชื่อมไปยังจุด u_3, u_4 ดังนั้นจะมี 1 เส้นที่เชื่อมไปยัง u_2 ดังตัวอย่างรูป 3.12

3.12



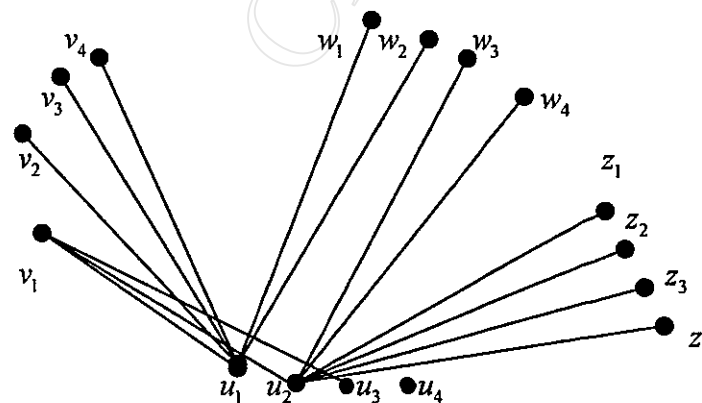
รูป 3.12

จะเหลืออีก 4 เส้นที่เชื่อมไปยังจุดใดก็ได้ในกลุ่ม $V_3(G), V_4(G)$ สมมุติให้มี 1 เส้นเชื่อมไปยังจุด w_1 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยังจุด w_2 ไม่ได้ ด้วยเหตุผลข้างต้น ดังนั้นจะเหลืออีก 3 เส้น สมมุติให้มี 1 เส้นเชื่อมไปยังจุด w_3 และเส้นที่เหลืออีก 2 เส้นเชื่อมไปยังจุดที่เหลือ 5 จุด คือ จุด w_4, z_1, z_2, z_3, z_4 จะเกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังตัวอย่าง รูป 3.13



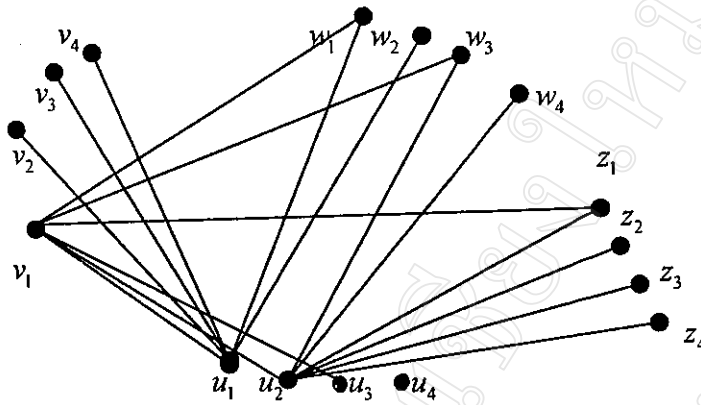
รูป 3.13

ต่อไปจะมีเงื่อนไขว่าไม่ให้เชื่อมไปยัง u_4 จุดเดียวดังนั้นให้มี 1 เส้นเชื่อมไปยัง u_2 และมีอีก 1 เส้นเชื่อมไปยัง u_3 ดังตัวอย่างรูป 3.14



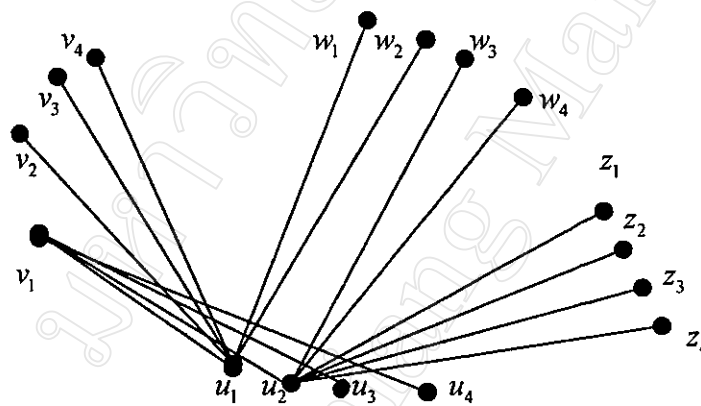
รูป 3.14

จะเหลืออีก 3 เส้นเชื่อมไปยังจุดใดก็ได้ในกลุ่ม $V_3(G), V_4(G)$ สมมติให้มี 1 เส้นเชื่อมไปยังจุด w_1 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยังจุด w_2 ไม่ได้ ด้วยเหตุผลข้างต้นและ 2 เส้นที่เหลือจึงต้องเชื่อมไปยัง 6 จุดที่เหลือคือจุด $w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4$ ซึ่งจะเกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังตัวอย่าง รูป 3.15



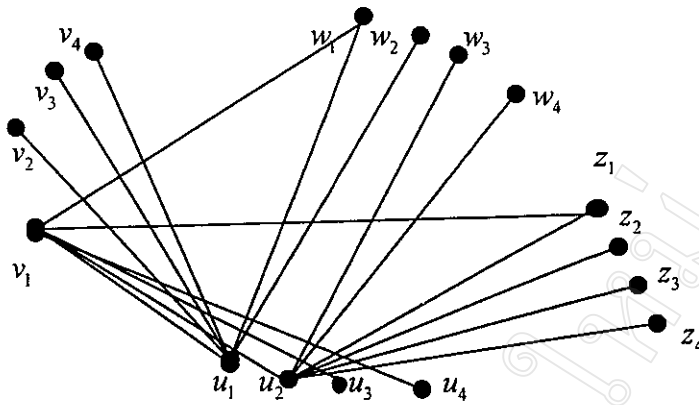
รูป 3.15

สุดท้ายไม่มีเงื่อนไขใดๆ คือ 5 เส้นสีน้ำเงินเชื่อมจากจุด v_1 ไปยังจุดใดก็ได้ดังนั้นให้มี 3 เส้นที่เชื่อมไปยังกลุ่ม $V_1(G)$ คือจุด u_2, u_3, u_4 ดังตัวอย่างรูป 3.16



รูป 3.16

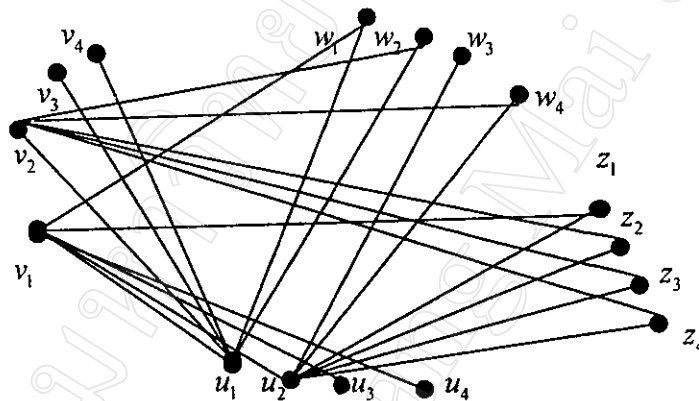
จะเหลืออีก 2 เส้นเชื่อมไปยังจุดใดก็ได้ในกลุ่ม $V_3(G), V_4(G)$ สมมติให้มี 1 เส้นเชื่อมไปยังจุด w_1 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยังจุด w_2 ไม่ได้ ด้วยเหตุผลข้างต้น แต่อีก 1 เส้นที่เหลือสามารถเชื่อมไปยัง 6 จุดที่เหลือคือจุด $w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4$ ได้โดยไม่ทำให้เกิด $K_{2,2}$ ดังตัวอย่างรูป 3.17



รูป 3.17

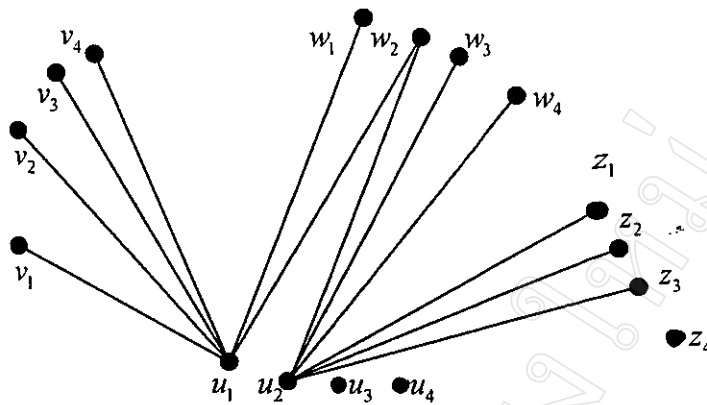
จึงสรุปได้ว่าเส้นสีน้ำเงินที่เชื่อมออกมาจากจุด v_1 ถ้าจะไม่ให้เกิด $K_{2,2}$ จะต้องมีส่วนเชื่อมอย่างน้อย 3 เส้นที่เชื่อมไปยังกลุ่ม $V_1(G)$ คือจุด u_2, u_3, u_4

อย่างไรก็ตามจะเหลืออีก 1 จุดในกลุ่ม $V(G_2)$ ซึ่งจะมีเส้นสีน้ำเงินเชื่อมออกมาอีก 6 เส้น สมมุติให้เป็นจุด v_2 จะมี 5 เส้นสีน้ำเงินที่เชื่อมออกมาโดยบังคับอยู่แล้วว่าจะเชื่อมไปยังจุด u_2, u_3, u_4, w_1, z_1 ไม่ได้เพราะจะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังนั้น 5 เส้นสีน้ำเงินจะเชื่อมไปยังจุดที่เหลือจุดใดก็ได้ซึ่งจะเกิด $K_{2,2}$ เสมอดังตัวอย่างรูป 3.18

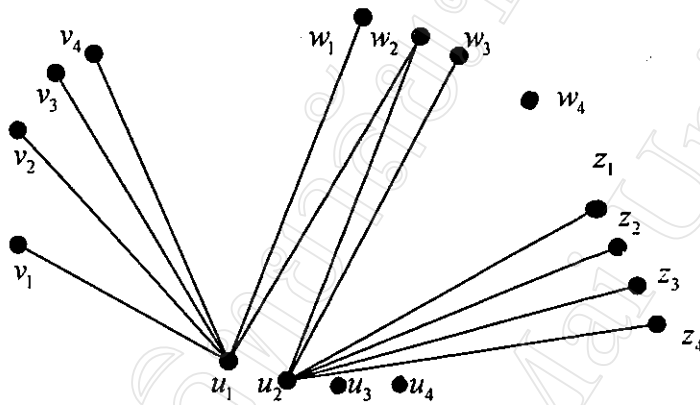


รูป 3.18

อีกกรณีหนึ่งคือถ้ามีจุดประชิดเหมือนกัน 1 จุดสมมุติให้จุด u_2 มีเส้นที่เป็นสีน้ำเงินเชื่อมกับจุดที่มีเส้นสีน้ำเงินของ u_1 ที่ลากออกไป 1 เส้น จะมีรูปแบบดีกรีของกลุ่มอื่นออกมาได้ 2 รูปแบบดังตัวอย่างรูป 3.19 และรูป 3.20



รูป 3.19



รูป 3.20

เราจะพิจารณาตัวอย่างดีกรีในรูปแบบที่ 1 โดยจะยกตัวอย่างรูป 3.19 จะใช้อีก 2 จุดในกลุ่มที่เหลือ ซึ่งจะแบ่งเป็นกรณีย่อยดังนี้

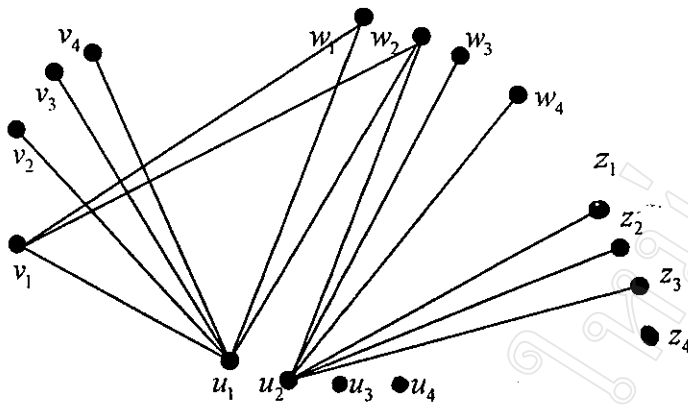
กรณี 1.1 ใช้ 2 จุดในกลุ่ม $V_2(G)$

กรณี 1.2 ใช้ 2 จุดในกลุ่ม $V_3(G)$

กรณี 1.3 ใช้ 2 จุดในกลุ่ม $V_4(G)$

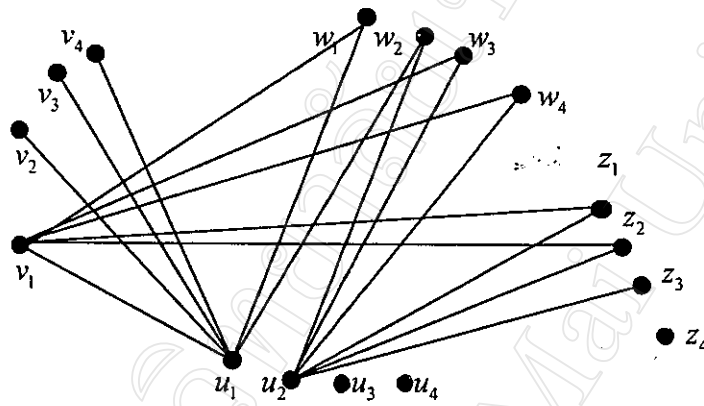
กรณี 1.1 ใช้ 2 จุดในกลุ่ม $V_2(G)$ สมมติให้เป็นจุด v_1, v_2 ต่างก็มีเส้นเชื่อมสีน้ำเงินอย่างน้อย 6 เส้น สมมุติจุด v_1 มีเส้นสีน้ำเงินเชื่อมออกไปอีก 5 เส้นบังคับอยู่แล้วว่าจะเชื่อมไปยังจุด u_2 ไม่ได้ เพราะจะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นและจะมีเงื่อนไขในตอนแรกว่าไม่ให้เชื่อมไปยังจุด u_3, u_4, z_4 ดังนั้นจุด v_1 จะเชื่อม 5 เส้นออกไปยังจุดที่เหลือคือกลุ่ม $V_3(G), V_4(G)$ (ยกเว้นจุด z_4 ตามเงื่อนไข)

สมมุติจุด v_1 เชื่อมไปยังจุด w_1 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยังจุด w_2 ไม่ได้ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังตัวอย่างรูป 3.21



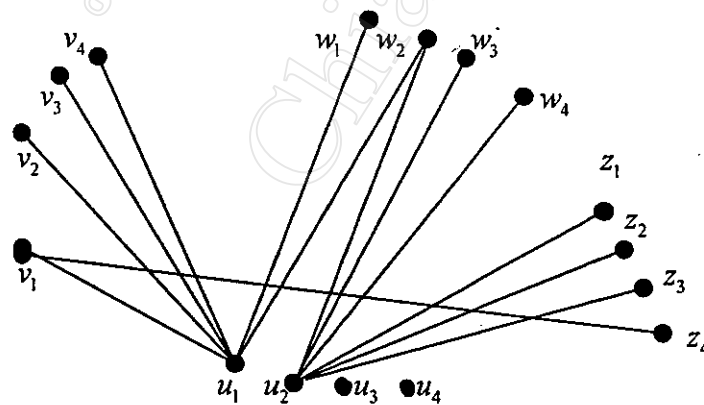
รูป 3.21

ดังนั้นจะเหลืออีก 4 เส้นที่เชื่อมจากจุด v_1 ไปยัง 5 จุดที่เหลือ คือจุด w_3, w_4, z_1, z_2, z_3 จะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังตัวอย่างรูป 3.22



รูป 3.22

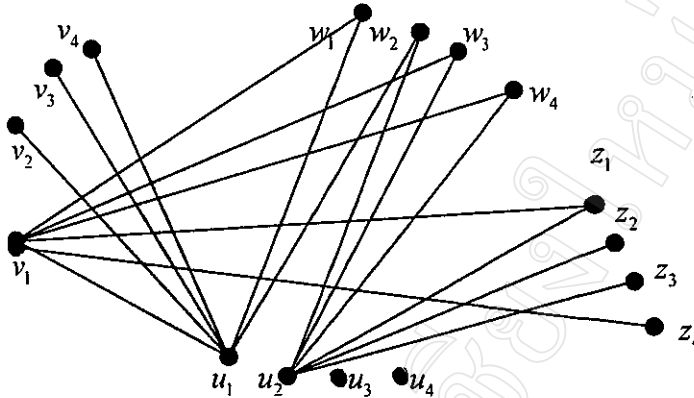
ต่อไปถ้ามีเงื่อนไขว่าไม่ให้เชื่อมไปยังจุด u_3, u_4 ดังนั้นจุด v_1 มีเส้นสีน้ำเงินเชื่อมออกไปอีก 5 เส้นไปยังกลุ่ม $V_3(G), V_4(G)$ ให้ 1 เส้นเชื่อมไปยังจุด z_4 ดังตัวอย่างรูป 3.23



รูป 3.23

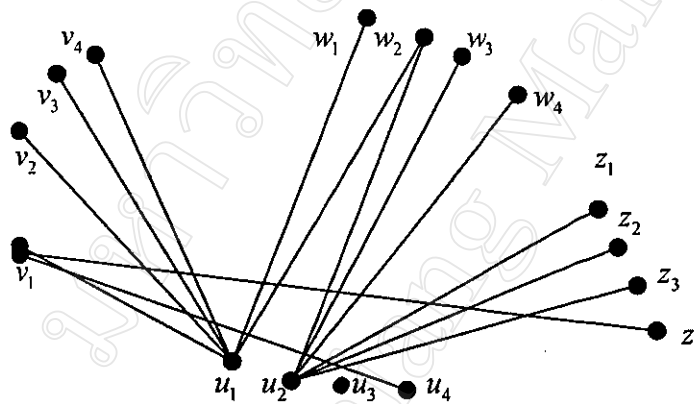
จะเหลืออีก 4 เส้นสีน้ำเงินเชื่อมออกไปจุดใดก็ได้ในกลุ่ม $V_3(G), V_4(G)$ สมมติให้ 1 เส้นเชื่อมไปยังจุด w_1 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยังจุด w_2 ไม่ได้ ด้วยเหตุผลข้างต้น

จะเหลืออีก 3 เส้นที่จะต้องเชื่อมไปยังจุด 5 จุดที่เหลือคือจุด w_3, w_4, z_1, z_2, z_3 จะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังตัวอย่างรูป 3.24



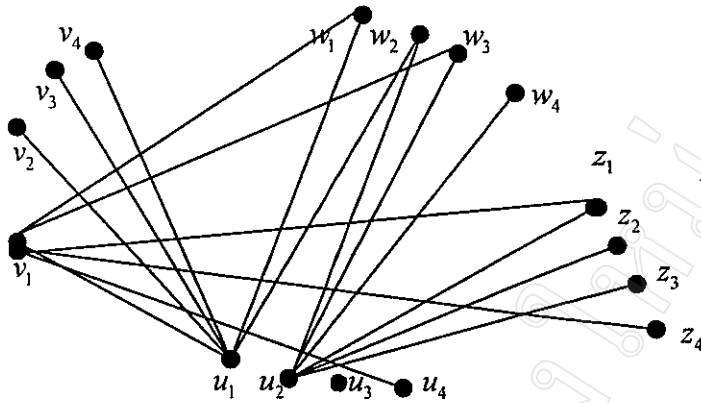
รูป 3.24

ต่อไปเงื่อนไขคือไม่ให้เชื่อมไปยังจุด u_3 จุดเดียวดังนั้นจุด v_1 มีเส้นสีน้ำเงินเชื่อมออกไปอีก 5 เส้น จะมี 1 เส้นที่เชื่อมไปยังจุด u_4 และอีก 1 เส้นเชื่อมไปยัง z_4 ดังตัวอย่างรูป 3.25



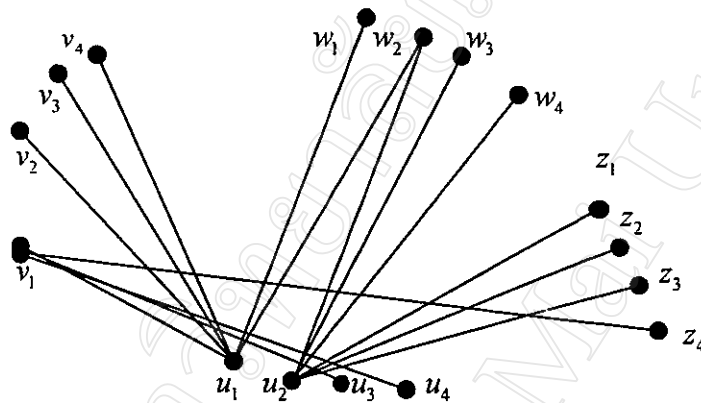
รูป 3.25

จะเหลือเส้นสีน้ำเงินอีก 3 เส้นไปยังจุดใดก็ได้ที่เหลือในกลุ่ม $V_3(G), V_4(G)$ สมมติให้ 1 เส้นไปยังจุด w_1 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยังจุด w_2 ไม่ได้ ด้วยเหตุผลข้างต้นจะเหลืออีก 2 เส้นไปยัง 5 จุดที่เหลือคือ w_3, w_4, z_1, z_2, z_3 จะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังตัวอย่างรูป 3.26



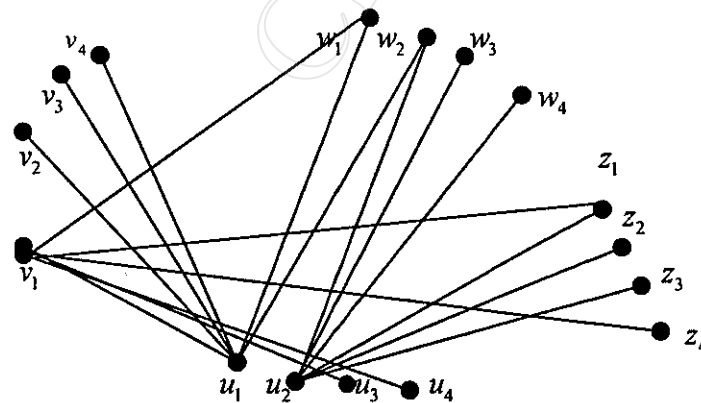
รูป 3.26

สุดท้ายไม่มีเส้นไหนใดๆ คือลาก 5 เส้นจาก v_1 ไปยังจุดใดก็ได้ดังนั้นให้มี 3 เส้นไปยังจุด u_3, u_4, z_1 ดังตัวอย่างรูป 3.27



รูป 3.27

จะเหลืออีก 2 เส้นจากจุด v_1 ไปจุดใดก็ได้ที่เหลือในกลุ่ม $V_3(G), V_4(G)$ สมมติให้ 1 เส้นเชื่อมไปยังจุด w_1 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยังจุด w_2 ไม่ได้ ด้วยเหตุผลข้างต้น แต่อีก 1 เส้นที่เหลือเชื่อมไปยัง 5 จุดที่เหลือคือจุด w_3, w_4, z_1, z_2, z_3 ได้โดยไม่ทำให้เกิด $K_{2,2}$ ดังตัวอย่างรูป 3.28



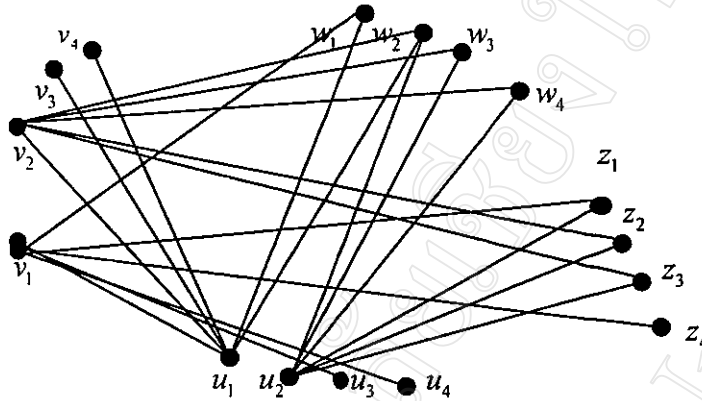
รูป 3.28

จึงสรุปได้ว่าถ้าจะไม่ให้เกิด $K_{2,2}$ จะต้องมียี่สิบห้าเส้นที่เชื่อมไปยังจุด

u_3, u_4, z_4

อย่างไรก็ตามจะเหลืออีก 1 จุดในกลุ่ม $V_2(G)$ ซึ่งมีเส้นสีน้ำเงินอย่างน้อย 6 เส้นสมมติให้ เป็นจุด v_2 จะมี 5 เส้นสีน้ำเงินที่เชื่อมออกมาซึ่งมีเส้นสีบักคับอยู่แล้วว่าจะไม่ให้เชื่อมไปยังจุด

$u_2, u_3, u_4, w_1, z_1, z_4$ เพราะจะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังนั้น 5 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยัง 5 จุดที่เหลือซึ่งจะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังตัวอย่าง 3.29



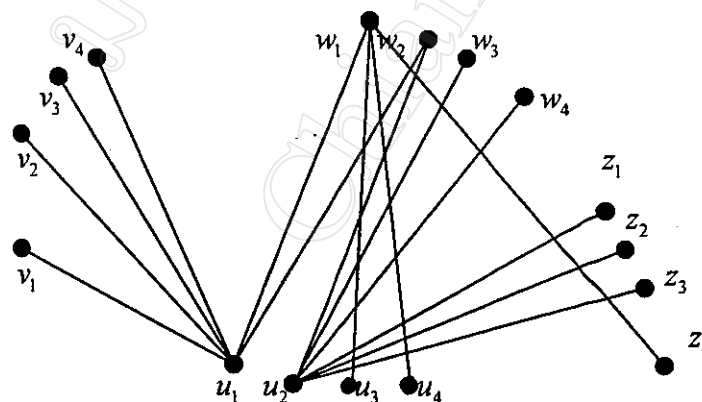
รูป 3.29

กรณี 1.2 ให้ 2 จุดในกลุ่ม $V_3(G)$ ซึ่งจะแบ่งเป็นกรณีย่อยๆ ดังนี้

1.2.1 สมมติใช้จุด w_1, w_2 ต่างก็มีเส้นเชื่อมสีน้ำเงินอย่างน้อย 6 เส้น

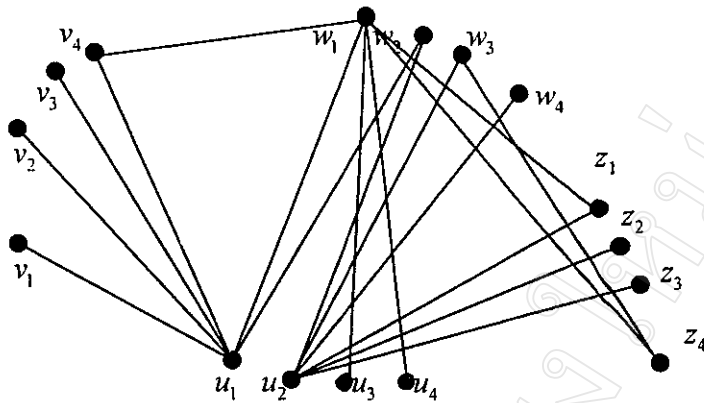
1.2.2 สมมติใช้จุด w_1, w_3 ต่างก็มีเส้นเชื่อมสีน้ำเงินอย่างน้อย 6 เส้น

ในกรณี 1.2.1 สมมติจุด w_1 มีเส้นเชื่อมออกไปอีก 5 เส้นซึ่งบักคับอยู่แล้วว่าจะไม่ให้เชื่อมไปยัง u_2 และจากการพิสูจน์แล้วข้างต้นจะต้องมียี่สิบห้าเส้นที่เชื่อมไปยังจุด u_3, u_4, z_4 ดังตัวอย่างรูป 3.30



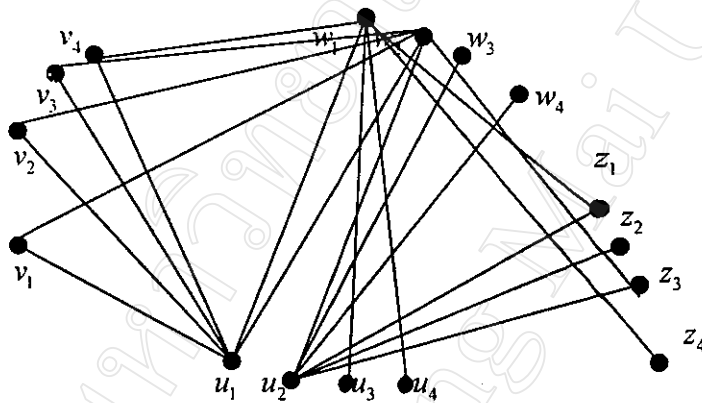
รูป 3.30

และจะเหลืออีก 2 เส้นเชื่อมไปยังจุดที่เหลือสมมติให้มี 1 เส้นเชื่อมไปยัง v_4 เส้นที่เหลืออีก 1 เส้นจะเชื่อมไปยังกลุ่ม $V_2(G)$ ไม่ได้เพราะจะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังนั้น 1 เส้นที่เหลือจึงต้องเชื่อมไปยังกลุ่มอื่นที่เหลือจุดใดก็ได้จะไม่เกิด $K_{2,2}$ ดังตัวอย่างรูป 3.31



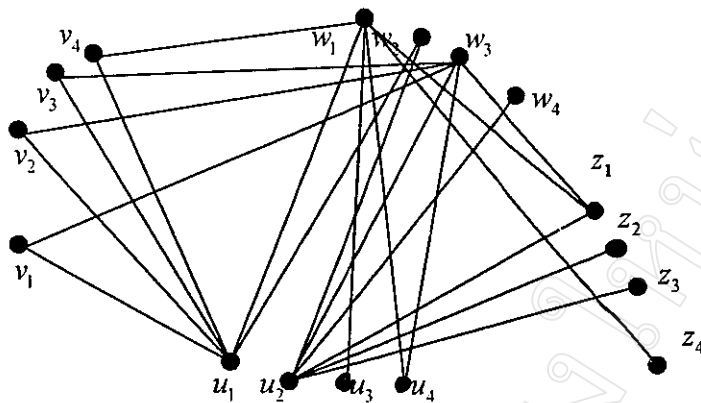
รูป 3.31

จากรูป 3.31 อย่างไรก็ดีตามจะเหลืออีก 1 จุดสมมุติให้เป็นจุด w_2 มีเส้นเชื่อมสีน้ำเงินออกไปอีก 4 เส้นซึ่งบังคับอยู่แล้วว่าเชื่อมไปยังจุด u_3, u_4, z_1, z_4 ไม่ได้จะเกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังนั้นจะเหลืออีก 4 เส้นจะต้องไป 6 จุดที่เหลือจะเกิด $K_{2,2}$ ดังตัวอย่าง 3.32



รูป 3.32

ในกรณี 1.2.2 จากรูป 3.31 ถ้าสมมุติอีก 1 จุดคือ w_3 มีเส้นสีน้ำเงินเชื่อมออกไปอีก 5 เส้นมีเงื่อนไขบังคับอยู่แล้วว่าจะเชื่อมไปยังจุด u_1 ไม่ได้เพราะจะเกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นสมมุติให้มี 1 เส้นเชื่อมไปยัง z_1 เส้นที่เหลือจะไปยัง z_2, z_3, z_4 ไม่ได้เพราะจะเกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้น ดังนั้นอีก 4 เส้นที่เหลือให้ 1 เส้นเชื่อมไปที่จุด u_4 อีก 3 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยังจุด u_3 ไม่ได้เพราะจะเกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นดังนั้น 3 เส้นที่เหลือจะต้องเชื่อมไปยังจุดที่เหลือซึ่งจะทำให้เกิด $K_{2,2}$ ดังตัวอย่างรูป 3.33



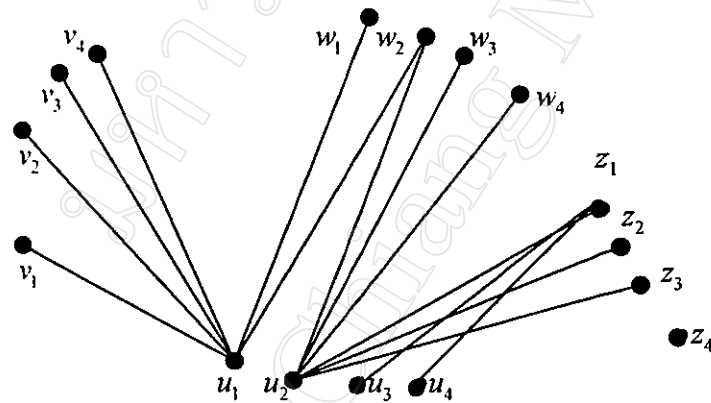
รูป 3.33

กรณี 1.3 2 จุดในกลุ่ม $V_4(G)$ ซึ่งจะแบ่งเป็นกรณีย่อย ๆ ดังนี้

1.3.1 สมมุติใช้จุด z_1, z_2 ต่างก็มีเส้นเชื่อมสีน้ำเงินอย่างน้อย 6 เส้น

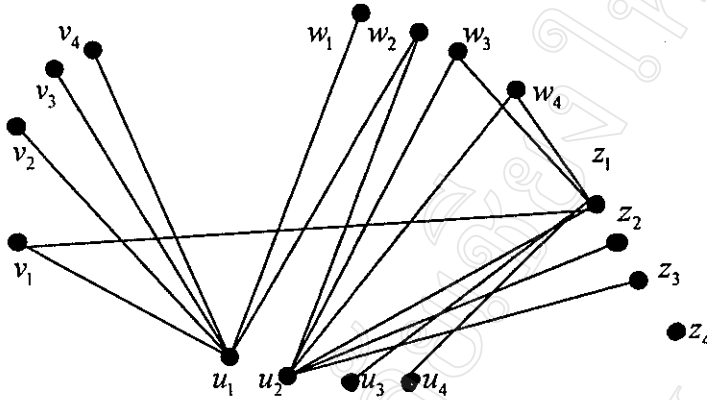
1.3.2 สมมุติใช้จุด z_1, z_4 ต่างก็มีเส้นเชื่อมสีน้ำเงินอย่างน้อย 6 เส้น

ทั้งสองกรณีย่อยนี้สมมุติจุด z_1 มีเส้นเชื่อมสีน้ำเงินออกไป 5 เส้น ซึ่งบังคับอยู่แล้วว่าจะเชื่อมไปยัง u_1 ไม่ได้เพราะจะเกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นสมมุติจุด z_1 มี 1 เส้นเชื่อมไปยัง u_3 และอีก 1 เส้นเชื่อมไปยัง u_4 ดังตัวอย่างรูป 3.34



รูป 3.34

จะเหลืออีก 3 เส้นสมมติ 1 เส้นเชื่อมไปยัง v_1 เส้นที่เหลือจะเชื่อมไปยัง v_2, v_3, v_4 ไม่ได้เพราะจะเกิด $K_{2,2}$ ด้วยเหตุผลข้างต้นจึงเหลืออีก 2 เส้นสมมติ 1 เส้นเชื่อมไปยัง w_3 จะเหลือเส้นสุดท้ายไม่ว่าจะเชื่อมไปยังจุดที่เหลือจุดใดจะเกิด $K_{2,2}$ เสมอดังตัวอย่างรูป 3.35



รูป 3.35

ส่วนรูปแบบดีกรีใน รูป 3.20 จะใช้อีก 2 จุดในกลุ่มที่เหลือซึ่งจะแบ่งเป็นกรณีย่อยดังนี้

กรณี 2.1 ให้ 2 จุดในกลุ่ม $V_2(G)$ สมมติใช้จุด v_1, v_2

กรณี 2.2 ให้ 2 จุดในกลุ่ม $V_3(G)$

2.2.1 สมมติใช้จุด w_1, w_2

2.2.2 สมมติใช้จุด w_1, w_4

กรณี 2.3 ให้ 2 จุดในกลุ่ม $V_4(G)$ สมมติใช้จุด z_1, z_4

ซึ่งการพิสูจน์จะทำนองเดียวกันกับรูปแบบ 3.19 ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าจะเกิด $K_{2,2}$ เสมอ

$$\therefore R_f(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 16 \quad (2.2)$$

จาก (2.1) และ (2.2) จึงสรุปได้ว่า $8 \leq R_f(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 16$

ทฤษฎีบท 1.3 $R_{br}(K_{4,4}, K_{4,4}) \geq 34$

พิสูจน์ จากรูป 3.36 พิจารณาเมทริกซ์ซึ่งแทนด้วยสี 2 สี ได้แก่ สีน้ำเงินและสีแดงซึ่งเป็น
คอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$ โดยให้สีน้ำเงินแทนด้วย 1 และสีแดงแทนด้วย 0

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
r_1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
r_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
r_3	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
r_4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
r_5	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
r_6	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
r_7	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
r_8	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
r_9	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0
r_{10}	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
r_{11}	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
r_{12}	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
r_{13}	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
r_{14}	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
r_{15}	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
r_{16}	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0

รูป 3.36

ดังนั้นเมทริกซ์ 4×4 ที่เราต้องการคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งก็คือ 2 สีใน $K_{16,16}$ จะบรรจุสีน้ำเงินหรือสีแดง $K_{4,4}$

จากรูป 3.36 เราสามารถหาได้ว่าไม่ปรากฏ เมทริกซ์ดังที่ต้องการ จึงสรุปว่ากราฟในรูป 3.36 ไม่
บรรจุทั้งสีน้ำเงินและสีแดง $K_{4,4}$ ดังนั้น

$$R_{br}(K_{4,4}, K_{4,4}) > 32 \quad \text{หรือ} \quad R_{br}(K_{4,4}, K_{4,4}) \geq 34$$