

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

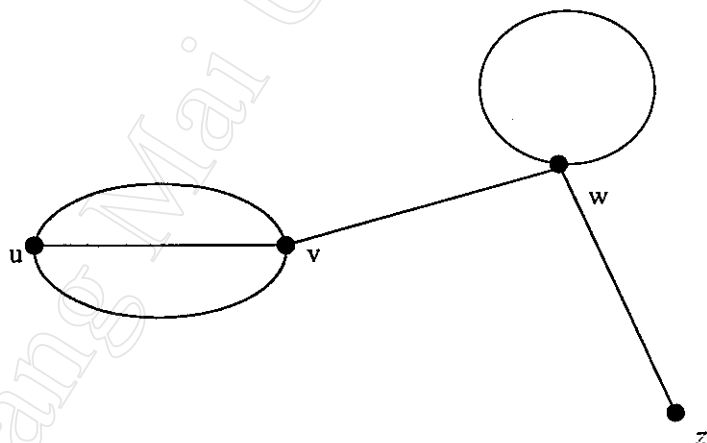
ในบทนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติทั่วไปของกราฟที่จำเป็นต้องนำไปใช้ในบทที่ 3 โดยจะกล่าวถึง นิยาม ทฤษฎีบท และการพิสูจน์ที่สำคัญพอสังเขป

นิยาม 2.1 กราฟ G คือ คู่อันดับ $(V(G), E(G))$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างของสมาชิกที่เรียกว่าจุด (vertex) และ $E(G)$ เป็นแฟมิลีจำกัดของคู่อันดับ (unordered pair) ของสมาชิกใน $V(G)$ ซึ่งเรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่าเส้น (edge)

โดยทั่วไปแล้วจะแทนกราฟ G ใดๆ ด้วยแผนภาพ (diagram) ซึ่งประกอบด้วยจุดและเส้น โดยที่จุดของแผนภาพคือสมาชิกของ $V(G)$ และเส้นของแผนภาพคือสมาชิกของ $E(G)$ และเส้น $e = \{u, v\}$ ใดๆ ใน $E(G)$ จะเป็นเส้นเชื่อมระหว่างจุด u และ v

ตัวอย่าง 2.1

G :



รูป 2.1

จากรูปที่ 2.1 $V(G) = \{u, v, w, z\}$ และ $E(G) = \{\{u, v\}, \{u, v\}, \{v, w\}, \{w, w\}, \{w, z\}\}$

หมายเหตุ

1. เพื่อความสะดวกจะเขียน uv แทนเส้น $\{u, v\}$
2. เนื่องจาก $E(G)$ เป็นแฟมิลีของคู่อันดับของจุดใน $V(G)$ ดังนั้นเส้น uv และเส้น vu จึงเป็นเส้นเดียวกัน

นิยาม 2.2 มัลติเฟดจ์ (multiple edge) คือเส้นกราฟที่มีมากกว่า 1 เส้น ซึ่งเชื่อมจุดคู่เดียวกัน

ตัวอย่าง 2.2 จากรูป 2.1 จะเรียก uv ว่ามัลติเพิลเอตจ์

นิยาม 2.3 จะเรียกจุด u และ v ว่าเป็นจุดประชิดกัน (adjacent vertices) ถ้ามีเส้นเชื่อมระหว่างจุด u และ v

ตัวอย่าง 2.3 จากรูป 2.1 จะเรียก u ว่าประชิดกับ v (หรือ u, v เป็น adjacent vertices)

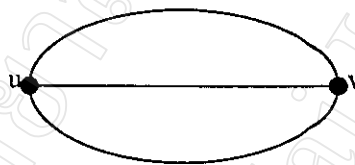
นิยาม 2.4 ลูป (loop) คือเส้นที่ลากเข้าหาตัวมันเอง

ตัวอย่าง 2.4 เส้น ww ในรูป 2.1 จะเป็นลูป

นิยาม 2.5 ถ้าจุด u และ v ของกราฟมีเส้น uv เชื่อมแล้วจะเรียก u หรือ v ของกราฟว่าเป็นจุดอินซิดেন্টกับเส้น uv

ตัวอย่าง 2.5

G:



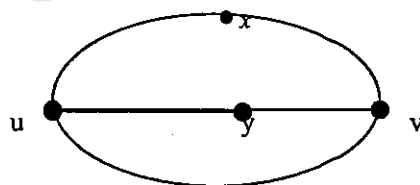
รูป 2.2

จากรูป 2.2 จะเรียกจุด u และ v ว่าเป็นจุดที่อินซิดেন্টกับเส้น uv

นิยาม 2.6 จะเรียกจำนวนเส้นของกราฟที่อินซิดেন্টกับจุด a ใดๆ ว่าดีกรี (degree) ของจุด a

ตัวอย่าง 2.6

G:



รูป 2.3

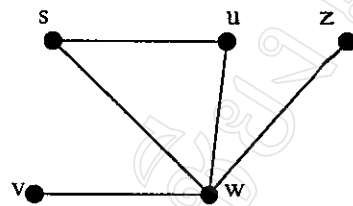
จากรูป 2.3 จุด u มีดีกรีเท่ากับ 3

จุด v มีดีกรีเท่ากับ 3

จุด x มีดีกรีเท่ากับ 2

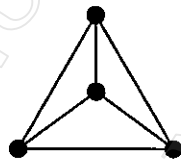
จุด y มีดีกรีเท่ากับ 2

นิยาม 2.7 ซิมเปิลกราฟ (simple graph) คือกราฟที่ไม่มีมัลติเพิลเอดจ์และไม่มีลูป



รูป 2.4

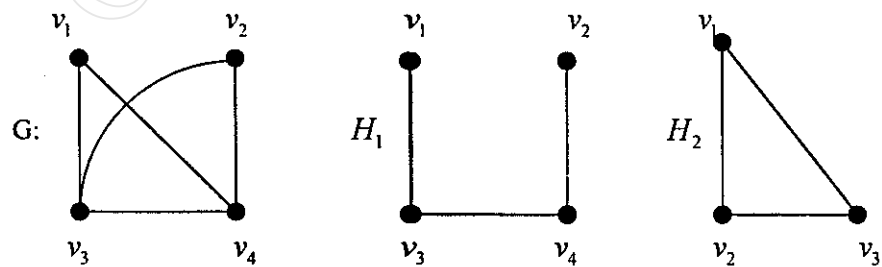
นิยาม 2.8 จะเรียกซิมเปิลกราฟว่าคอมพลีทกราฟ (complete graph) ถ้าทุกคู่ของจุดในซิมเปิลกราฟนี้มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดและใช้สัญลักษณ์ K_p แทนคอมพลีทกราฟ ที่มีจุด p จุด



รูป 2.5

นิยาม 2.9 จะเรียก H ว่าเป็นสับกราฟ (subgraph) ของกราฟ G ถ้าทุกจุดของ H เป็นจุดของ G และทุกเส้นของ H เป็นเส้นของ G

ตัวอย่าง 2.7



รูป 2.6

จากรูป 2.6 จะเห็นว่า H_1, H_2 เป็นสับกราฟของ G

นิยาม 2.10 ถ้า G เป็นซิมเมตริกกราฟแล้ว คอมพลีเมนต์ (complement) ของ G คือซิมเมตริกกราฟ $\bar{G}$ ซึ่งมีเซตของจุดคือ $V(G)$ และ จุด 2 จุดใด ๆ จะเป็นจุดประชิดกันใน $\bar{G}$ ก็ต่อเมื่อ 2 จุดนั้นไม่ประชิดกันใน G

นิยาม 2.11 ให้ F_1 และ F_2 เป็นกราฟ 2 กราฟ ใดๆ จำนวนแรมเซย์ (Ramsey number) $R(F_1, F_2)$ คือ จำนวนเต็มคี่น้อยที่สุด P ซึ่งสำหรับทุกๆ กราฟ G ที่มี P จุด กราฟ G จะมี F_1 เป็นสับกราฟหรือกราฟ $\bar{G}$ (คอมพลีเมนต์ของกราฟ G) จะมี F_2 เป็นสับกราฟ

ทฤษฎีบท 2.1 สำหรับทุกๆ 2 กราฟ F_1 และ F_2 จะได้ว่า $R(F_1, F_2) = R(F_2, F_1)$

พิสูจน์ ให้ $R(F_1, F_2) = P$ และ $R(F_2, F_1) = P_0$

จะแสดงว่า $P = P_0$

ให้ H เป็นกราฟใดๆ ที่มี P จุด

จะได้ $\bar{H}$ มี P จุดด้วย

เนื่องจาก $R(F_1, F_2) = P$ ดังนั้น $\bar{H}$ จะมี F_1 เป็นสับกราฟ

หรือ $\bar{H} = H$ จะมี F_2 เป็นสับกราฟ

ดังนั้นสำหรับทุกๆ กราฟ H ที่มี P จุดจะได้ว่า H จะมี F_2 เป็นสับกราฟหรือ $\bar{H}$ จะมี F_1 เป็นสับกราฟ

เพราะว่า $R(F_2, F_1) = P_0$ ดังนั้น $P \geq P_0$

สมมติว่า G เป็นกราฟที่มี P_0 จุด จะได้ว่า $\bar{G}$ จะเป็นกราฟที่มี P_0 จุดด้วย

เนื่องจาก $R(F_2, F_1) = P_0$ ดังนั้น $\bar{G}$ จะมี F_2 เป็นสับกราฟ

หรือ $\bar{G} = G$ จะมี F_1 เป็นสับกราฟ

ดังนั้นสำหรับทุกๆ กราฟ H ที่มี P_0 จุดจะได้ว่า H จะมี F_1 เป็นสับกราฟหรือ $\bar{H}$ จะมี F_2 เป็นสับกราฟ

เพราะว่า $R(F_1, F_2) = P$ ดังนั้น $P_0 \geq P$

จาก $P \geq P_0$ และ $P_0 \geq P$ จะได้ว่า $P = P_0$

นิยาม 2.12 ไบพาร์ติตกราฟ (bipartite graph) คือกราฟ G ซึ่ง $V(G)$ สามารถถูกแบ่งออกเป็น 2 เซต คือ V_1 และ V_2 โดยที่ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ และทุกเส้นของ G จะมีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่ใน V_1 และจุดปลายอีกข้างหนึ่งอยู่ใน V_2 และใช้สัญลักษณ์ $G(V_1, V_2)$ แทนไบพาร์ติตกราฟ

นิยาม 2.13 จะเรียก $G(V_1, V_2)$ ว่าคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ (complete bipartite graph) ถ้า $G(V_1, V_2)$ เป็นคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟและแต่ละจุดใน V_1 จะมีเส้นเชื่อมกับทุก ๆ จุดใน V_2 จะใช้สัญลักษณ์ $K_{m,n}$ แทนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟซึ่งมีจำนวนจุดใน V_1 เท่ากับ m และจำนวนจุดใน V_2 เท่ากับ n

นิยาม 2.14 จะเรียก $G(V_1, V_2)$ ว่าเป็นคอมพลีทซิมเมตริกไบพาร์ไทต์กราฟ (completesymmetric bipartite graph) ถ้า $n(V_1) = n(V_2)$

นิยาม 2.15 3-คอมพลีทพาร์ไทต์กราฟ (3-complete partite graph) คือกราฟ G ซึ่ง $V(G)$ แบ่งออกเป็น 3 สับเซต คือ V_1, V_2 และ V_3 และมีคุณสมบัติว่าสำหรับ $i \neq j$ และ $V_i \cap V_j = \emptyset$ โดยที่ $i=1,2,3$ และ $j=1,2,3$ ซึ่งมีจุดปลายทั้ง 2 ของแต่ละเส้นใด ๆ ใน G จะต้องไม่อยู่ในเซตเดียวกัน และใช้สัญลักษณ์ $G(V_1, V_2, V_3)$ ซึ่งแต่ละจุดใน V_i จะมีเส้นเชื่อมกับทุก ๆ จุดใน V_j

นิยาม 2.16 จะเรียก $G(V_1, V_2, V_3)$ ว่าเป็นคอมพลีทซิมเมตริก 3-พาร์ไทต์กราฟ (completesymmetric 3-partite graph) ถ้า $n(V_1) = n(V_2) = n(V_3)$

นิยาม 2.17 4-คอมพลีทพาร์ไทต์กราฟ (4-complete partite graph) คือกราฟ G ซึ่ง $V(G)$ แบ่งออกเป็น 4 สับเซต คือ V_1, V_2, V_3 และ V_4 และมีคุณสมบัติว่าสำหรับ $i \neq j$ และ $V_i \cap V_j = \emptyset$ โดยที่ $i=1,2,3,4$ และ $j=1,2,3,4$ ซึ่งมีจุดปลายทั้ง 2 ของแต่ละเส้นใด ๆ ใน G จะต้องไม่อยู่ในเซตเดียวกัน และใช้สัญลักษณ์ $G(V_1, V_2, V_3, V_4)$ ซึ่งแต่ละจุดใน V_i จะมีเส้นเชื่อมกับทุก ๆ จุดใน V_j

นิยาม 2.18 จะเรียก $G(V_1, V_2, V_3, V_4)$ ว่าเป็นคอมพลีทซิมเมตริก 4-พาร์ไทต์กราฟ (completesymmetric 4-partite graph) ถ้า $n(V_1) = n(V_2) = n(V_3) = n(V_4)$

ข้อตกลง จะใช้สัญลักษณ์

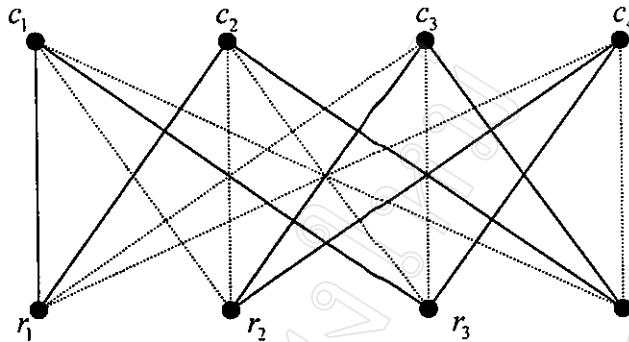
R_{bi} = จำนวนแรมเซย์ของคอมพลีทซิมเมตริกไบพาร์ไทต์กราฟ

R_{tr} = จำนวนแรมเซย์ของคอมพลีทซิมเมตริก 3-พาร์ไทต์กราฟ

R_{ft} = จำนวนแรมเซย์ของคอมพลีทซิมเมตริก 4-พาร์ไทต์กราฟ

ทฤษฎีบท 2.2 $R_{bi}(K_{2,2}, K_{2,2}) = 10$

พิสูจน์ พิจารณา 2 สี ใน $K_{4,4}$ ในรูป 2.7 ให้เส้นที่บแทนด้วยเส้นสีน้ำเงินและเส้นประแทนด้วยเส้นสีแดง



รูป 2.7

ดังนั้น $R_{bi}(K_{2,2}, K_{2,2}) > 8$ นั่นคือ

$$R_{bi}(K_{2,2}, K_{2,2}) \geq 10 \quad (1.1)$$

ให้พิจารณา 2 สี ของ $K_{5,5}$ โดยที่

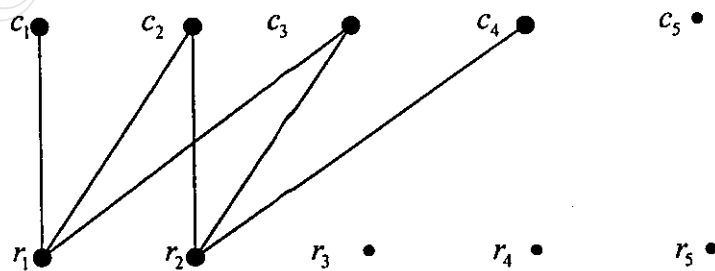
$$V(G_1) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$$

$$V(G_2) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$$

เนื่องจากแต่ละ $r_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ มีดีกรี $d(r_i) = 5$

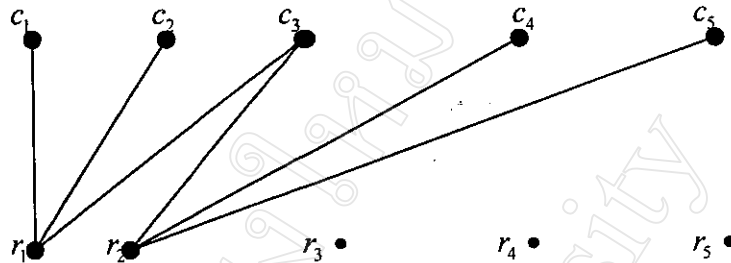
ดังนั้น แต่ละ r_i จะมีเส้นสีน้ำเงินอย่างน้อย 3 เส้นหรือไม่ก็เป็นเส้นสีแดงอย่างน้อย 3 เส้น และเนื่องจากมี 5 จุด ของ r_i ดังนั้นจะต้องมี 3 จุด ที่แต่ละจุดจะมีเส้นสีน้ำเงินอย่างน้อย 3 เส้นหรือไม่ก็มี 3 จุด ที่มีสีแดงอย่างน้อย 3 เส้น เราสามารถสรุปได้ว่า โดยทั่วไปแต่ละจุดใน 3 จุดนี้ r_1, r_2, r_3 จะมีเส้นสีน้ำเงินอย่างน้อย 3 เส้น เชื่อมติดกัน

สมมุติว่า r_1 เป็นจุดที่ถูกเชื่อมโดยเส้นสีน้ำเงิน 3 เส้น และประชิดกับ c_1, c_2 และ c_3 ถ้า r_2 ถูกเชื่อมโดยเส้นสีน้ำเงินซึ่งประชิดกันอย่างน้อย 2 จุด ระหว่าง c_1, c_2 และ c_3 ดังนั้น $K_{2,2}$ สีน้ำเงินจะถูกบรรจุใน $K_{5,5}$ ดังตัวอย่างรูป 2.8



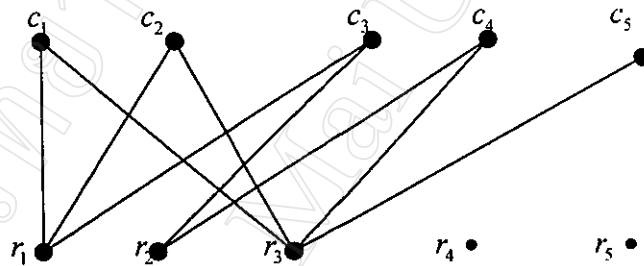
รูป 2.8

ถ้าไม่ใช่กรณีที่กล่าวมาข้างต้น ดังนั้น r_2 จะถูกเชื่อมกับจุดเพียงจุดเดียวสมมติว่าเป็น c_3 พิจารณา
รูปที่ 2.9



รูป 2.9

ให้พิจารณา 3 เส้น สีน้ำเงินซึ่งมีผลต่อ r_3 อย่างน้อยมี 2 เส้น ซึ่งต่อกับจุดระหว่าง c_1, c_2 และ c_3
หรือไม่ก็มียังน้อย 2 เส้นที่เชื่อมระหว่าง c_3, c_4, c_5 ในกรณีใดกรณีหนึ่ง $K_{2,2}$ สีน้ำเงิน จะบรรจุใน
 $K_{5,5}$ ตัวอย่างดังรูป 2.10



รูป 2.10

ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่ามี 2 สี ใน $K_{5,5}$ เพราะฉะนั้น

$$R_{bt}(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 10 \quad (1.2)$$

จาก (1.1) และ (1.2) เราจะได้ $R_{bt}(K_{2,2}, K_{2,2}) = 10$