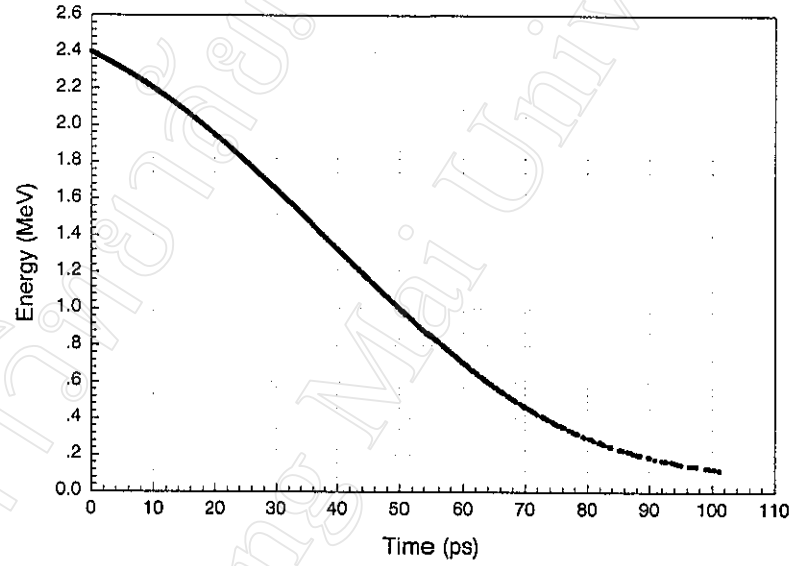
บทที่ 2
ทฤษฎี

ลำอิเล็กตรอนที่ถูกผลิตมาจาก rf-gun เป็นแบบห้วงซึ่งอิเล็กตรอนมีค่าพลังงานไม่เท่ากัน โดยลักษณะของการกระจายของอิเล็กตรอนที่ผลิตออกมาแสดงดังรูปที่ 2.1 ลักษณะพิเศษของการกระจาย คือ อิเล็กตรอนที่มีพลังงานสูงกว่าจะออกมาจาก rf-gun ก่อนอิเล็กตรอนที่พลังงานต่ำกว่า

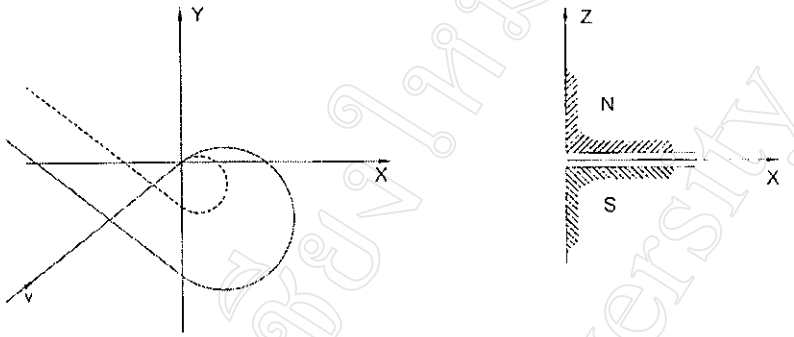


รูปที่ 2.1 แสดงการกระจายของอิเล็กตรอนที่ผลิตออกมาจาก rf-gun (Rimjaem et al.,2001)

การบีบลำอิเล็กตรอนให้มีห้วงสั้น (หรือ bunch compression) สามารถทำได้โดยการใช้สนามแม่เหล็กเข้ามาช่วย โดยสนามแม่เหล็กดังกล่าวจะต้องไม่ทำให้เกิดการกระจายของลำอิเล็กตรอน หลักการบีบลำอิเล็กตรอนให้ bunch length มีค่าน้อยคือ การทำให้อิเล็กตรอนตัวที่มีพลังงานสูงกว่าเคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กด้วยระยะทางที่มากกว่าอิเล็กตรอนพลังงานต่ำ เพื่อที่จะทำให้อิเล็กตรอนตัวที่มีพลังงานต่ำกว่าเคลื่อนที่ได้ทันหรือล้ำหน้าอิเล็กตรอนพลังงานสูง

พิจารณากรณีของการใช้แม่เหล็กสองขั้ว (dipole magnet) ที่สนามแม่เหล็กมีค่าสม่ำเสมอ เมื่อให้อิเล็กตรอนที่มีพลังงานต่างกันเคลื่อนที่เข้าไปในสนามแม่เหล็ก ณ ตำแหน่งเดียวกัน แน่นอนว่าอิเล็กตรอนที่มีพลังงานสูงกว่าจะเคลื่อนที่ด้วยระยะทางที่มากกว่าอิเล็กตรอนที่มีพลังงานต่ำกว่า

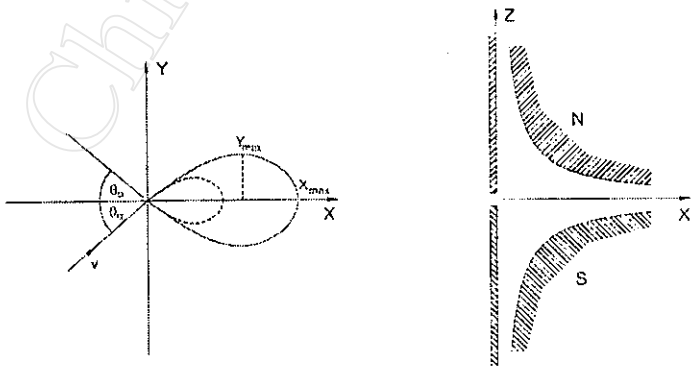
แต่เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ออกจากแม่เหล็กจะออกมาในตำแหน่งที่แตกต่างกัน ซึ่งเป็นผลทำให้เกิดการกระจายของลำอิเล็กตรอนขึ้นดังแสดงในรูปที่ 2.2



(ก) (ข)

รูปที่ 2.2 (ก) แสดงการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานต่างกันในสนามแม่เหล็กคงที่
(ข)แสดงขั้วแม่เหล็กที่ให้ค่าสนามแม่เหล็กคงที่

ส่วนในกรณีที่สนามแม่เหล็กมีค่าไม่คงที่ แต่ความเข้มแปรผันกับระยะทางในแนวแกน x เหมือนสนามของแม่เหล็กสี่ขั้ว ดังแสดงในรูปที่ 2.3 เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ลึกเข้าไปในสนามแม่เหล็กก็จะทำให้รัศมีของวงโคจรลดลง จึงมีโอกาสเป็นไปได้ว่าถ้าเลือกมุม θ_α ให้เหมาะสม อิเล็กตรอนก็สามารถเคลื่อนที่ออกจากสนามแม่เหล็ก ณ จุดเดียวกับจุดที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าไปในสนามแม่เหล็กและระยะทางที่ใช้ในการเคลื่อนที่ก็จะขึ้นกับพลังงานของอิเล็กตรอน ซึ่งรายละเอียดเกี่ยวกับการพิสูจน์จะได้กล่าวต่อไป สำหรับแม่เหล็กที่มีค่าสนามแม่เหล็กดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า "แม่เหล็กแบบอัลฟา" (Enge,1963)



(ก) (ข)

รูปที่ 2.3 (ก) แสดงการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานต่างกันภายในสนามของแม่เหล็กสี่ขั้ว
(ข) แสดงขั้วแม่เหล็กที่ให้ค่าสนามแม่เหล็กเหมือนกับแม่เหล็กสี่ขั้ว

2.1 สมการการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนภายในแม่เหล็กแบบอัลฟา

สำหรับการหาสมการการเคลื่อนของอิเล็กตรอนในแม่เหล็กแบบอัลฟาที่จะได้กล่าวต่อไปนั้น ได้เรียบเรียงและเพิ่มเติมจากงานวิจัยของ Enge (1963)

แม่เหล็กอัลฟามีลักษณะเป็นครึ่งหนึ่งของแม่เหล็กสี่ขั้วและมีค่าสนามแม่เหล็กเหมือนครึ่งหนึ่งของแม่เหล็กสี่ขั้ว กล่าวคือ

$$\vec{B} = -g\,(z\hat{i} + x\hat{k})$$

เมื่อ g คือค่า gradient ของแม่เหล็ก

จากสมการการเคลื่อนที่ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ โดยที่

$$\vec{F} = -\frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{2.1}$$

สำหรับกรณีของ relativistic จะได้

$$\frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt} = -\frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B})$$

โดยที่ภายใต้สนามแม่เหล็ก γ มีค่าคงที่ และ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

$$\therefore \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{mc\gamma}(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{2.2}$$

จากสมการที่ 2.2

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ -gz & 0 & -gx \end{vmatrix}$$

$$= -gx\frac{dy}{dt}\hat{i} + \left(x\frac{dx}{dt} - z\frac{dz}{dt}\right)\hat{j} + gz\frac{dy}{dt}\hat{k} \tag{2.3}$$

แทนค่าลงในสมการที่ 2.2 จะได้

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{eg}{m\gamma c}\left[x\frac{dy}{dt}\hat{i} - \left(x\frac{dx}{dt} - z\frac{dz}{dt}\right)\hat{j} - z\frac{dy}{dt}\hat{k}\right] \tag{2.4}$$

ดังนั้นสมการที่ 2.4 เขียนเป็นสมการย่อยในแนวแกน x แนวแกน y และแนวแกน z ได้เป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{eg}{mc\gamma}x\frac{dy}{dt} \tag{2.5}$$

$$\frac{d^2y}{dt} = \frac{eg}{mc\gamma}\left(z\frac{dz}{dt} - x\frac{dx}{dt}\right) \tag{2.6}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{eg}{mc\gamma}z\frac{dy}{dt} \tag{2.7}$$

สำหรับกรณีของ ideal trajectory จะมีการเคลื่อนที่เฉพาะในระนาบ xy (z = 0) และความเร็วในแนวแกน z เป็นศูนย์ $\left(\frac{dz}{dt} = 0\right)$ จากสมการที่ 2.5 ถึง 2.7 เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{eg}{mc\gamma}x\frac{dy}{dt} \tag{2.8}$$

$$\frac{d^2y}{dt} = -\frac{eg}{mc\gamma}x\frac{dx}{dt} \tag{2.9}$$

จากสมการที่ 2.9 สามารถทำการอินทิเกรตได้เป็น

$$\frac{dy}{dt} = v_0 - \frac{eg}{mc\gamma}\frac{x^2}{2} \tag{2.10}$$

เมื่อ $v_0 = v\sin\theta_\alpha$ ซึ่งเป็นความเร็วต้นในแนวแกน y

นอกจากนั้นแล้วสามารถหาค่า $\frac{dx}{dt}$ ได้จากความสัมพันธ์

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

แต่เนื่องจาก $v_z = 0$ จะได้ว่า

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{2.11}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dt}$ จากสมการที่ 2.10 ลงในสมการที่ 2.11จะได้

$$v^2 = \left(v_0 - \frac{eg}{mc\gamma}\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 - \left(v_0 - \frac{eg}{mc\gamma}\frac{x^2}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \left[v^2 - \left(v_0 - \frac{eg}{mc\gamma}\frac{x^2}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

จากสมการที่ 2.10 ตำแหน่งในแนวแกน x (x_1) ที่ค่า y สูงสุด (y_{max}) คือตำแหน่งที่ความเร็วในแนวแกน y มีค่าเป็น $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$v_0 = \frac{eg}{mc\gamma}\frac{x_1^2}{2}$$

$$x_1 = \left(\frac{2\gamma cmv_0}{eg}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

แทนค่า $v_0 = v\sin\theta_\alpha$ ลงในสมการที่ 2.13 จะได้

$$x_1 = \left(\frac{2\gamma cmv\sin\theta_\alpha}{eg}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.14}$$

และจากสมการความสัมพันธ์ $p = \gamma mv$ และ $\gamma^2 m^2 c^4 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ จะได้ $mv = mc\beta$ แทนลงในสมการที่ 2.14 จะได้

$$x_1 = \left(\frac{2mc^2\beta\gamma\sin\theta_\alpha}{eg}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.15}$$

ในทำนองเดียวกันตำแหน่งที่ไกลสุดในแนวแกน x (x_{max}) ที่อิเล็กตรอนสามารถเคลื่อนที่ไปได้คือ ตำแหน่งที่ความเร็วในแนวแกน x มีค่าเป็นศูนย์ $\left(\frac{dx}{dt} = 0\right)$ ดังนั้นจากสมการที่ 2.12 จะได้

$$0 = \left[v^2 - \left(v_0 - \frac{eg}{mc\gamma}\frac{x_{max}^2}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad v^2 = \left(v_0 - \frac{eg}{mc\gamma}\frac{x_{max}^2}{2}\right)^2$$

และ

$$v = \left|\frac{eg}{mc\gamma}\frac{x_{max}^2}{2} - v_0\right|$$

$$\therefore \quad x_{max} = \left[\frac{2\gamma cmv}{eg}\left(1+\sin\theta_\alpha\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.16}$$

เมื่อ $v_0 = v\sin\theta_\alpha$ และแทนค่า $mv = mc\beta$ ลงในสมการที่ 2.16 จะได้

$$x_{max} = \left[\frac{2mc^2\left(1+\sin\theta_\alpha\right)}{e}\frac{\beta\gamma}{g}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

จากสมการที่ 2.10 และสมการที่ 2.12 สามารถหาสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับวงโคจรของอิเล็กตรอนภายในแม่เหล็กแบบอัลฟาได้คือ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\gamma cmv\sin\theta_\alpha-\frac{eg}{2}x^2}{\left[(\gamma cmv)^2-\left(\gamma cmv\sin\theta_\alpha-\frac{eg}{2}x^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{2.18}$$

แทนค่า $mv=mc\beta$ ลงในสมการที่ 2.18 จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mc^2\beta\gamma\sin\theta_\alpha-\frac{eg}{2}x^2}{\left[(mc^2\beta\gamma)^2-\left(mc^2\beta\gamma\sin\theta_\alpha-\frac{eg}{2}x^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{2.19}$$

เพื่อที่จะให้ได้เส้นทางในการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนต้องทำการอินทิเกรตสมการที่ 2.19 โดยจะทำการจัดรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ใหม่เพื่อความสะดวกในการอินทิเกรต จากสมการที่ 2.19 หารตลอดด้วย $mc^2\beta\gamma$ จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta_\alpha-Ax^2}{\sqrt{1-\left(\sin\theta_\alpha-Ax^2\right)^2}} \tag{2.20}$$

เมื่อ $A=\dfrac{eg}{2mc^2\beta\gamma}$

ให้ $k^2=\dfrac{1+\sin\theta_\alpha}{2}$ ดังนั้น $\sin\theta_\alpha=2k^2-1$ แทนลงในสมการที่ 2.20 จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(2k^2-1\right)-Ax^2}{\sqrt{1-\left(\left(2k^2-1\right)-Ax^2\right)^2}} \tag{2.21}$$

กำหนดให้ $\cos\phi=\sqrt{\dfrac{A}{2k^2}}x$ ดังนั้น $Ax^2=2k^2\cos^2\phi$ และ $-\sin\phi d\phi=\sqrt{\dfrac{A}{2k^2}}dx$ แทนค่าลงในสมการที่ 2.21 จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{2k^2-1-2k^2\cos^2\phi}{\sqrt{1-\left(2k^2-1-2k^2\cos^2\phi\right)^2}}\\&=\frac{2k^2\sin^2\phi-1}{\sqrt{1-\left(2k^2\sin^2\phi-1\right)^2}}\end{aligned} \tag{2.22}$$

พิจารณาส่วนของสมการที่ 2.22 คือ

$$1-\left(2k^2\sin^2\phi-1\right)^2=\left(1-2k^2\sin^2\phi+1\right)\left(1-2k^2\sin^2\phi-1\right)$$
$$=2k^2\sin^2\phi\left(2-2k^2\sin^2\phi\right)$$
$$\therefore\quad\sqrt{1-\left(2k^2\sin^2\phi-1\right)^2}=2k\sin\phi\sqrt{1-k^2\sin^2\phi} \tag{2.23}$$

ดังนั้นสมการที่ 2.22 จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2k^2\sin^2\phi-1}{2k\sin\phi\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$
$$=-\frac{2\left(1-k^2\sin^2\phi\right)-1}{2k\sin\phi\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$
$$\therefore\quad dy=-\frac{2\left(1-k^2\sin^2\phi\right)-1}{2k\sin\phi\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}dx \tag{2.24}$$

แทนค่า $dx=-\sqrt{\frac{2k^2}{A}}\sin\phi\,d\phi$ ลงในสมการที่ 2.24 จะได้

$$dy=\sqrt{\frac{2}{A}}\frac{2\left(1-k^2\sin^2\phi\right)-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}d\phi$$
$$=\sqrt{\frac{mc^2\beta\gamma}{eg}}\left(2\sqrt{1-k^2\sin\phi}-\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\right)d\phi \tag{2.25}$$

อินทิเกรตสมการที่ 2.25 จะได้

$$y=\sqrt{\frac{mc^2\beta\gamma}{eg}}\left[2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\right] \tag{2.26}$$

จากสมการที่ 2.26 รูปแบบของสมการจะเป็นรูปแบบของ elliptic integrals ซึ่งจากสมการสามารถหามุม θ_α ที่ทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าและออกจากแม่เหล็ก ณ ตำแหน่งเดียวกันคือที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $y=0$ โดยที่จะพิจารณาเงื่อนไขที่ตำแหน่ง $x=x_{\max}$ ซึ่งตำแหน่งนี้ก็จะให้ค่า $y=0$ เช่นกัน จากความสัมพันธ์ $\cos\phi=\frac{x}{x_{\max}}$ จะได้ว่าที่ตำแหน่ง $x=x_{\max}$ ค่า $y=0$ และค่า $\phi=0$ แทนค่าลงในสมการที่ 2.26 เพื่อหาค่า θ_α จะได้ว่า

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{2.27}$$

หรือ

$$2E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) \tag{2.28}$$

เมื่อ $2E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$ และ $F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$ คือ complete elliptic integrals of first and second kind ตามลำดับ ซึ่งคำตอบของสมการที่ 2.28 ก็คือ $k=0.90888$ (Enge,1963) ซึ่งจากความสัมพันธ์ $k^2=\frac{1+\sin\theta_\alpha}{2}$ จะทำให้ได้ค่า $\theta_\alpha=40.71^\circ$ และนอกจากนั้นแล้วด้วยการแก้สมการที่ 2.26 ด้วยวิธี numerical integration (Borland,1991) ทำให้ได้ค่าตัวแปรต่างๆดังนี้

$$\theta_\alpha=40.71^\circ$$

$$x_{\max}(cm)=75.051\sqrt{\frac{\beta\gamma}{g(G/cm)}} \tag{2.29}$$

$$y_{\max}(cm)=24.620\sqrt{\frac{\beta\gamma}{g(G/cm)}} \tag{2.30}$$

$$S_{\max}(cm)=191.655\sqrt{\frac{\beta\gamma}{g(G/cm)}} \tag{2.31}$$

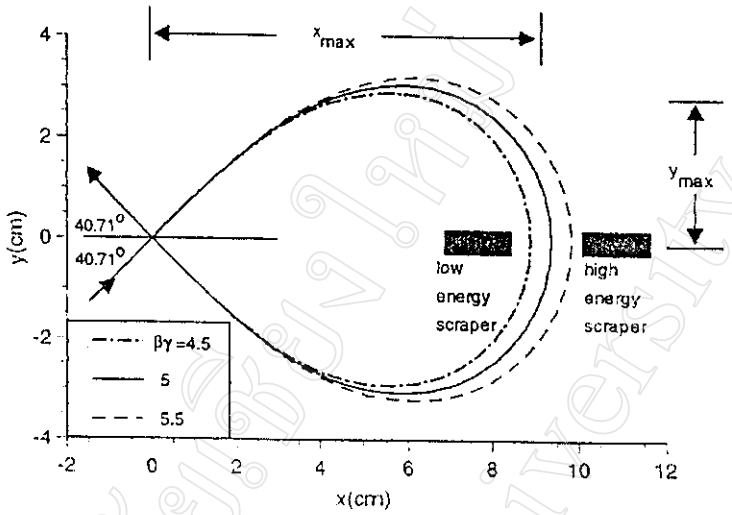
เมื่อ θ_α คือมุมที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าและออกจากแม่เหล็ก ณ ตำแหน่งเดียวกัน

$x_{\max}$ คือระยะทางที่มากที่สุดในแนวแกน x ที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปถึง

$y_{\max}$ คือระยะทางที่มากที่สุดในแนวแกน y ที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปถึง

$S_{\max}$ คือระยะทางที่อิเล็กตรอนใช้ในการเคลื่อนที่ในแม่เหล็กแบบอัลฟา

เส้นทางการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานต่างกันตามสมการที่ 3.32 แสดงดังรูปที่2.4 จากรูปจะสังเกตเห็นได้ว่าที่มุม $\theta_\alpha=40.71^\circ$ อิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่เข้าและออกจากแม่เหล็ก ณ ตำแหน่งเดียวกัน นอกจากนั้นอิเล็กตรอนที่มีพลังงานต่างกันก็จะเคลื่อนที่ภายในแม่เหล็กด้วยระยะทางที่ต่างกัน แต่รูปร่างของเส้นทางการเคลื่อนที่นั้นจะมีลักษณะคล้ายคลึงกันและลักษณะคล้ายตัวอัลฟา (α) ดังนั้นจึงเรียกแม่เหล็กดังกล่าวว่า "แม่เหล็กแบบอัลฟา"



รูปที่ 2.4 แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนภายในแม่เหล็กแบบอัลฟา (Borland,1991)

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ Chiang Mai University

2.2 การคำนวณ bunch length ของลำอิเล็กตรอน

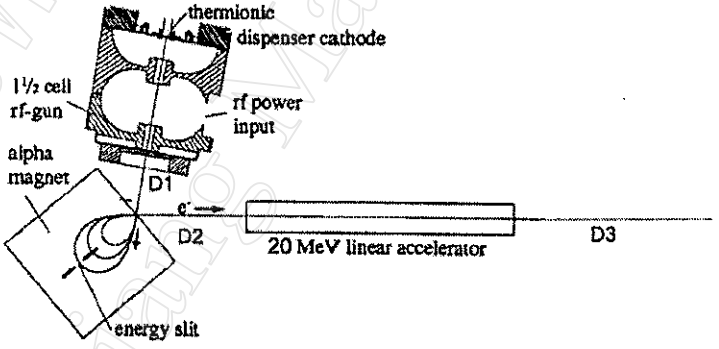
การกำหนดค่าเกรเดียนสูงสุดของแม่เหล็กแบบอัลฟาก่อนทำการออกแบบจะอาศัยการคำนวณ bunch length ของลำอิเล็กตรอนเข้ามาช่วย ซึ่งการคำนวณ bunch length นั้นก็คือ การคำนวณเวลาที่อิเล็กตรอนใช้ในการเคลื่อนที่ภายใน beam line เพื่อดูว่าสามารถบีบลำอิเล็กตรอนให้มีห้วงสั้นได้มากน้อยเพียงใดตรงตำแหน่งที่ต้องการ โดยการคำนวณในที่นี้จะพิจารณาแค่ first order เท่านั้น กล่าวคือจะไม่ได้คำนึงถึง transverse motion ของลำอิเล็กตรอน ส่วนประกอบหลักของ beam line ที่สำคัญแสดงในรูปที่ 2.5 ซึ่งประกอบด้วย rf-gun drift space (D1) แม่เหล็กแบบอัลฟา drift space (D2) linac 20 MeV และ drift space (D3) โดยที่

D1 = 68 เซนติเมตร

D2 = 110 เซนติเมตร

D3 = 300 เซนติเมตร

Linac ยาว 200 เซนติเมตร และเร่งอิเล็กตรอนให้มีพลังงานเพิ่มขึ้น 20 MeV



รูปที่ 2.5 แสดงส่วนประกอบหลักของ beam line

โดยอาศัยข้อมูลการกระจายของพลังงานกับเวลาของอิเล็กตรอนที่ผลิตออกมาจาก rf-gun สามารถที่จะคำนวณเวลาที่อิเล็กตรอนใช้ในการเคลื่อนที่ที่บริเวณต่างๆของ beam line โดยมีรายละเอียดดังนี้

(i) rf-gun exit

จากข้อมูลการกระจายของ E_0 และ t_0 สามารถคำนวณหาค่า β_1 และ γ_1 ได้โดย

$$\gamma_1 = 1 + \frac{E_0}{m_e c^2} \qquad \text{และ} \qquad \beta_1 = \frac{v_1}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_1^2}}$$

(ii) drift space (D1)

$$t_{D1} = \frac{D1}{v_1} \qquad \text{โดยที่ } v_1 = \beta_1 c \text{ และมีค่าคงที่}$$

(iii) แม่เหล็กแบบอัลฟา

จาก $S = 191.655\sqrt{\frac{\beta_1\gamma_1}{g(G/cm)}}$ จะคำนวณเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ภายในแม่เหล็กได้คือ

$$t_S = \frac{S}{v_1}$$

(iv) Linac (20 MeV)

Liac สามารถเร่งอิเล็กตรอนให้มีพลังงานเพิ่มขึ้น 20 MeV ดังนั้นพลังงานของอิเล็กตรอนที่ตำแหน่งต่างๆภายใน linac สามารถหาได้จาก

$$E_k = E_0 + A * L$$

โดยที่ A คือพลังงานต่อหน่วยความยาวของ linac ที่ใช้ในการเร่งอิเล็กตรอน ($A = 10\ \frac{MeV}{m}$)

L = ความยาวของ linac (m)

จะได้ว่า

$$\gamma_2 = 1 + \frac{E_k}{m_e c^2} \qquad \text{และ} \qquad \beta_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_2^2}}$$

โดยที่

$$v_2 = \beta_2 c$$

จากข้อมูลข้างต้นสามารถคำนวณเวลาที่อิเล็กตรอนใช้ในการเคลื่อนที่ภายใน linac ได้คือ

$$t_L = \int_0^L \frac{ds}{v_2(s)} = \frac{m_e c^2}{cA}\left(\beta_2\gamma_2 - \beta_1\gamma_1\right)$$

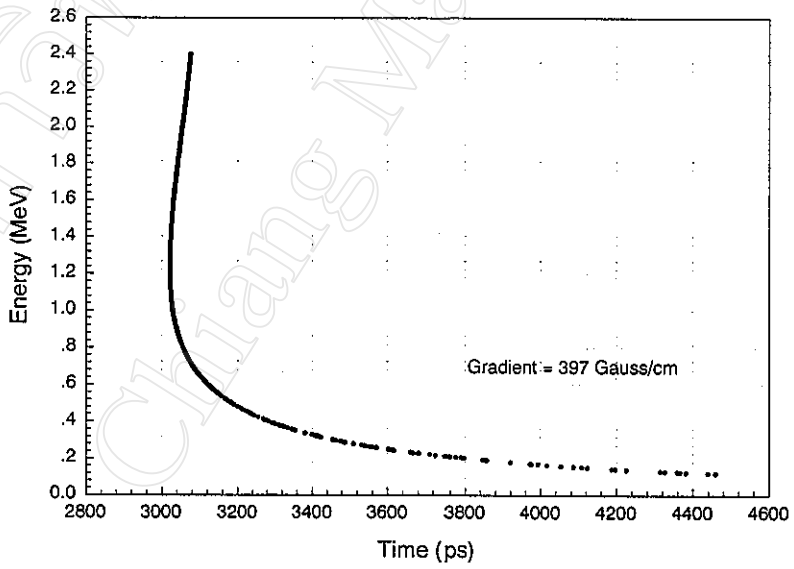
drift space (D3)

$$t_{D3} = \frac{D_3}{v_2} \quad \text{โดยที่ } v_2 \text{ มีค่าคงที่}$$

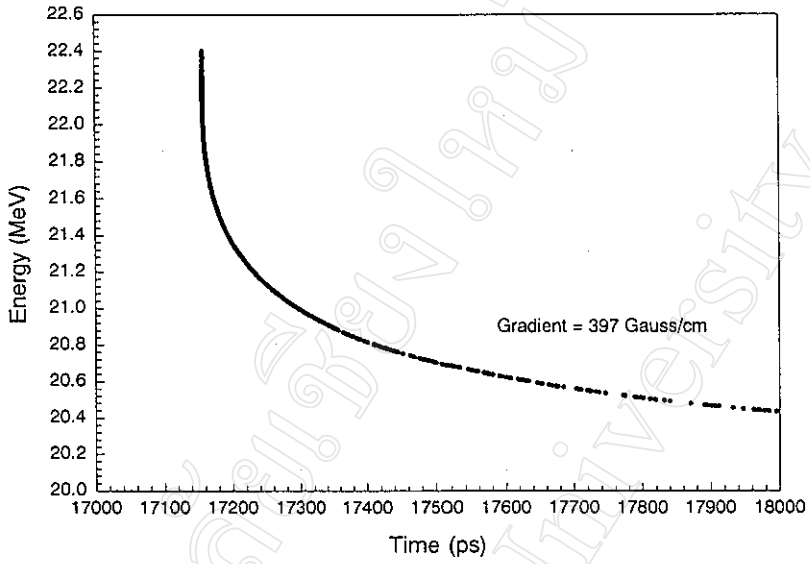
ดังนั้นเวลาทั้งหมดที่อิเล็กตรอนใช้ในการเคลื่อนที่ภายใน beam line คือ

$$T = t_0 + t_{D1} + t_S + t_{D2} + t_L + t_{D3} \tag{3.32}$$

โดยอาศัยสูตรข้างต้นที่กล่าวมาสามารถคำนาณการกระจายของพลังงานกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนที่ตำแหน่งต่างๆได้และการกระจายดังกล่าวขึ้นอยู่กับค่าเกรเดียนของแม่เหล็กแบบอัลฟา สำหรับค่าเกรเดียนที่ทำให้ได้ bunch length น้อยที่สุดตรงตำแหน่งสุดท้ายของ beam line พบว่า ต้องใช้ค่าเกรเดียนเท่ากับ 397 Gauss/cm และลักษณะการกระจายของพลังงานกับเวลาที่ตำแหน่งต่างๆแสดงในรูปที่ 2.1 และ2.6-2.7



รูปที่ 2.6 แสดงการกระจายของพลังงานกับเวลาของอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ออกมาจากแม่เหล็กแบบอัลฟา

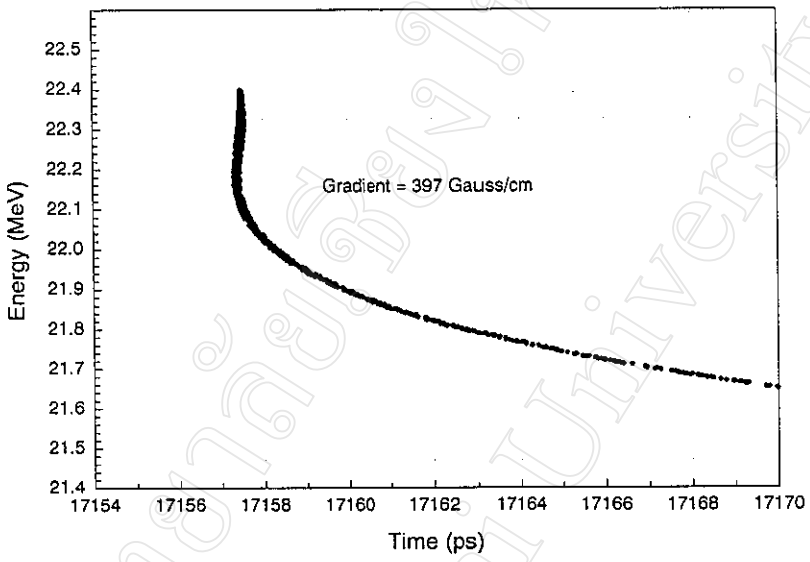


รูปที่ 2.7 แสดงการกระจายของพลังงานกับเวลาของอิเล็กตรอนที่ตำแหน่งสุดท้ายของ beam line

จากรูปที่ 2.1 และ 2.6 -2.7 แสดงให้เห็นว่าอิเล็กตรอนที่มีพลังงานสูงกว่าจะเคลื่อนที่ออกมาจาก rf-gun ก่อนและนำหน้าอิเล็กตรอนที่มีพลังงานต่ำกว่า แต่เมื่อเดินทางเข้าไปในแม่เหล็กแบบอัลฟาแล้ว อิเล็กตรอนตัวที่มีพลังงานต่ำกว่าจะเคลื่อนที่ด้วยระยะทางที่น้อยกว่าอิเล็กตรอนที่มีพลังงานสูงกว่า ทำให้อิเล็กตรอนพลังงานที่มีต่ำกว่าบางส่วนเคลื่อนที่ออกมาจากแม่เหล็กแบบอัลฟาได้ก่อน แต่เมื่อเคลื่อนที่ต่อไปเรื่อยๆอิเล็กตรอนที่มีพลังงานสูงก็สามารถที่จะเคลื่อนที่ได้ทันอิเล็กตรอนพลังงานต่ำกว่าได้ที่บริเวณจุดสุดท้ายของ beam line

จากผลการคำนวณค่าเกรเดียนที่ทำให้ได้ค่า bunch length ที่ดีที่สุดมีค่าเท่ากับ 397 Gauss/cm โดยที่การกระจายของพลังงานกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนแสดงดังรูปที่ 2.8 ซึ่งจะเห็นได้ว่าการกระจายของพลังงานในช่วง 22.0 MeV ถึง 22.4 MeV มีค่า bunch length น้อยกว่า 1 picosecond และจากค่าเกรเดียนที่ได้ดังกล่าวจะนำไปเป็นตัวกำหนดค่าสูงสุดของเกรเดียนของแม่เหล็กแบบอัลฟา โดยจะกำหนดให้ค่าเท่ากับ 450 Gauss/cm ซึ่งสาเหตุที่ต้องบวกค่าเกรเดียนเพิ่มเข้าไปอีกประมาณ 50 Gauss/cm เพราะว่าเพื่อป้องกันการผิดพลาดที่ต่างๆที่จะเกิดขึ้นมา เช่น เหล็กที่นำมาสร้างแม่เหล็กอาจจะมีค่า permeability ไม่ตรงกับการคำนวณซึ่งอาจเป็นผลให้

ค่าเกรเดียนมีค่าลดลงไปจากการคำนวณหรืออาจจะมีการปรับเปลี่ยนระยะใน beam line บางส่วนที่ต่างไปจากการคำนวณซึ่งอาจส่งผลให้ต้องใช่ค่าเกรเดียนที่สูงขึ้น เป็นต้น

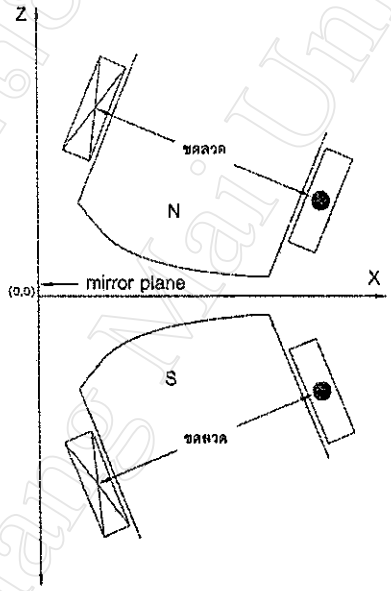


รูปที่ 2.8 แสดงการกระจายของพลังงานกับเวลาทั้งหมดของอิเล็กตรอนที่ใช้ในการเคลื่อนที่ใน beam line โดยที่เกรเดียนมีค่าเท่ากับ 397 Gauss/cm

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Chiang Mai University

2.3 แม่เหล็กแบบอัลฟา

แม่เหล็กแบบอัลฟามีลักษณะเป็นครึ่งหนึ่งของแม่เหล็กสี่ขั้ว โดยมี mirror plane เป็นตัวแบ่งครึ่งแม่เหล็กสี่ขั้ว ซึ่งการสร้างแม่เหล็กแบบอัลฟาในทางปฏิบัติไม่สามารถที่จะทำให้ส่วนของ pole profile กว้างจนถึงอนันต์ (infinite hyperbola) ได้เนื่องจากแม่เหล็กต้องการพื้นที่สำหรับใส่ขดลวดเพื่อป้อนกระแสไฟฟ้าให้กับแม่เหล็กดังนั้นจึงต้องมีการตัดส่วนนอกของ pole ออกไปดังแสดงในรูปที่ 2.9 จากรูปจะเห็นลักษณะที่ไม่สมมาตร (asymmetric) ของแม่เหล็กที่เกิดขึ้น กล่าวคือส่วนของไฮเปอร์โบลา จะลึกเข้าไปในแนวนอนมากกว่าในแนวตั้ง ทั้งนี้เนื่องจากต้องการ **good field region หรือบริเวณที่ค่าเกรเดียนมีค่าผิดพลาดไม่เกิน ± 0.1 เปอร์เซ็นต์** ลึกเข้าไปในระนาบแนวนอน เพื่อต้องการบีบลำอิเล็กตรอน ให้มีห้วงสั้น ตามที่ได้กล่าวในหัวข้อที่ผ่านมา



รูปที่ 2.9 แสดงภาคตัดขวางของแม่เหล็กแบบอัลฟาที่ได้ทำการหั่นส่วนของ pole profile เพื่อใส่ขดลวด

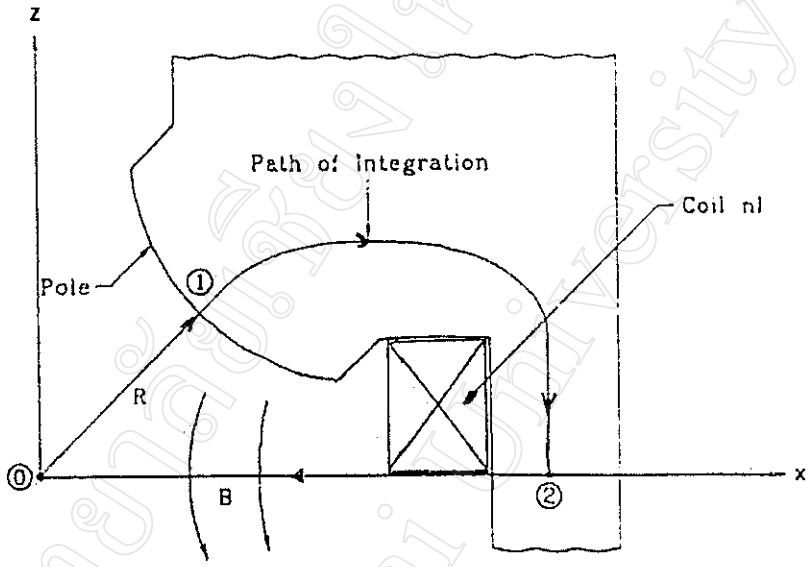
สำหรับค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านขดลวดนั้น คำนวณได้จากสมการ Maxwell คือ

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \tag{2.33}$$

โดยที่ $\bar{J}$ คือ current density หรือเขียนอยู่ในรูปของ อินทิเกรตได้เป็น

$$\oint \bar{H}.d\bar{l} = NI \tag{2.34}$$

จากการคำนวณค่ากระแสของกรณีแม่เหล็กแบบอัลฟา จะพิจารณาจากกรณีของแม่เหล็กสี่ขั้วเนื่องจากแม่เหล็กแบบอัลฟาเป็นครึ่งหนึ่งของแม่เหล็กสี่ขั้ว ดังนั้นจะทำการอินทิเกรตตามเส้นทาง $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 0$ ในรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 เส้นทางที่ใช้อินทิเกรตของแม่เหล็กสี่ขั้วในพิกัด x,y

แทนค่า $H = \frac{B}{\mu}$ ในสมการที่ 2.34

$$\begin{aligned} NI &= \int_0^1 \frac{\vec{B}(r)}{\mu_0} \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \frac{\vec{B}(r)}{\mu} \cdot d\vec{r} + \int_2^0 \frac{\vec{B}(r)}{\mu_0} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^1 \frac{\vec{B}(r)}{\mu_0} \cdot d\vec{r} + \{\text{ส่วนภายในแม่เหล็ก}\} \\ &\quad + \{\text{ส่วนที่ค่า } B \text{ ตั้งฉากกับเส้นทางของการอินทิเกรต}\} \end{aligned} \tag{2.35}$$

จากสมการที่ 2.35 พิจารณาพจน์ที่สองทางขวามือเป็นส่วนที่เส้นทางการอินทิเกรตอยู่ภายในเนื้อเหล็ก ซึ่งภายในเหล็กเราสมมุติว่ามีค่า μ สูงมากๆ จึงทำให้พจน์ที่สองมีค่าเข้าใกล้ศูนย์มาก และเมื่อพิจารณาที่พจน์ที่สามทางขวามือจะเห็นว่าเส้นทางของการอินทิเกรตตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก $(\vec{B})$ ทำให้พจน์ที่สามมีค่าเป็นศูนย์เช่นกัน ดังนั้น

$$N = \int_0^a \frac{B(r)}{\mu_0} dr \tag{2.36}$$

เนื่องจากค่าสนามที่รัศมี r จากแกนกลาง $B(r) = gr$ โดยที่ g คือค่าเกรเดียนของสนามแม่เหล็ก ดังนั้น

$$NI = \int_0^a \frac{gr}{\mu_0} dr$$

$$NI = \frac{ga^2}{2\mu_0} \tag{2.37}$$

โดยที่ N คือ จำนวนรอบของขดลวด

g คือ ค่าเกรเดียน $(Tesla/m)$

a คือ รัศมีของไฮเปอร์โบลา (m)

μ_0 คือ permeability ของสูญญากาศ $\left(4\pi \times 10^{-7}\, W/A \cdot m\right)$

เมื่อกำหนดให้ค่าเกรเดียน g = 4.5 $Tesla/m$ $(450\ Gauss/cm)$ และรัศมี a (bore radius) เท่ากับ 0.1 m แทนค่าลงในสมการที่ 2.37 จะได้

$$NI = \frac{4.5 \times (0.1)^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}}$$

$$NI = 17{,}905\ Ampere - turn$$

ดังนั้นถ้ากำหนดให้จำนวนรอบของขดลวดเท่ากับ 70 รอบ จะสามารถคำนวณค่ากระแสไฟฟ้าสูงสุดที่จะใช้ได้คือ

$$NI_{\max} = 17{,}905\ Ampere - turn$$

$$I_{\max} = 255\ Ampere$$

จากค่ากระแสไฟฟ้าที่คำนวณได้นั้นยังไม่ได้คำนึงถึงค่า μ ภายในเหล็กซึ่งจะทำให้ผลการทดลองที่ได้ต่างจากผลที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม POISSON ที่ได้รวมค่า μ ภายในเหล็กเข้าไปในการคำนวณซึ่งผลของการคำนวณด้วยโปรแกรมจะได้กล่าวถึงในบทต่อไป

2.4 การเลือกวัสดุมาทำแกนแม่เหล็ก

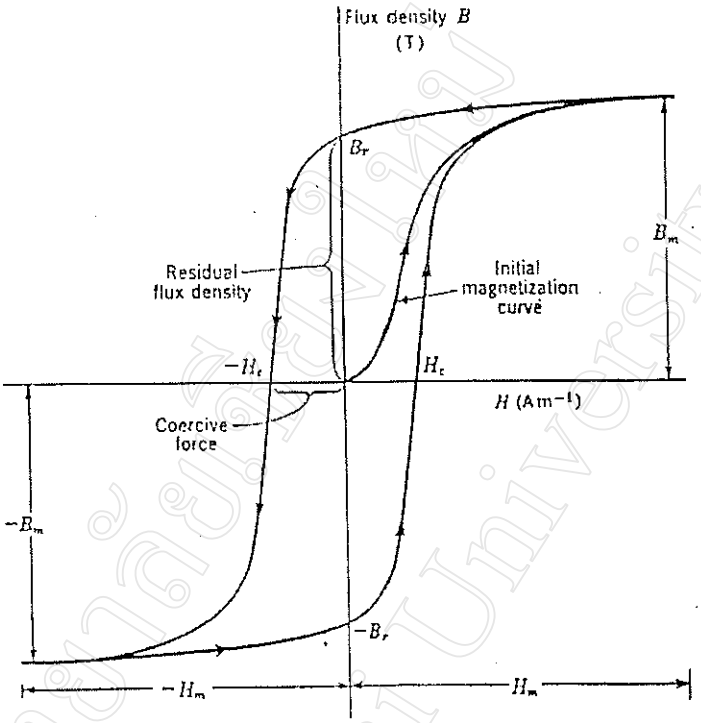
ในการเลือกใช้แม่เหล็กมาทำแกนแม่เหล็กนั้น Kraus (1987) ได้เสนอแนวทางในการพิจารณาตามหัวข้อย่อยดังนี้

2.4.1 การสูญเสียฮิสเตอร์เรซีส (hysteresis loss)

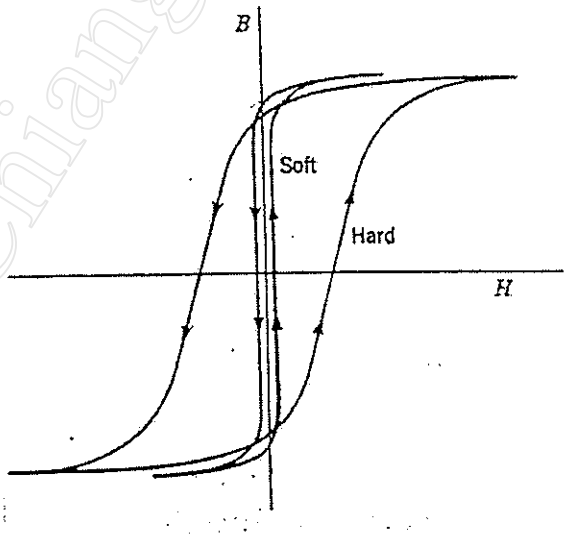
การสูญเสียฮิสเตอร์เรซีส หมายถึง การสูญเสียพลังงานไฟฟ้าในรูปแบบของความร้อนอันเนื่องมาจากการกลับตัวของโมเลกุลภายในแกนแม่เหล็กป้อนกระแสให้กับขดลวดที่พันอยู่ล้อมรอบ กล่าวคือ เมื่อทำการจ่ายกระแสให้กับขดลวดจะทำให้โมเลกุลในแกนแม่เหล็กที่แต่เดิมมีการเรียงตัวอย่างไม่เป็นระเบียบให้กลับเรียงตัวอย่างเป็นระเบียบตามขั้วเหนือและขั้วใต้ ซึ่งขณะที่โมเลกุลพยายามกลับตัวตามสนามแม่เหล็กนั้นเองโมเลกุลดังกล่าวเกิดการเบียดตัวกัน เมื่อหยุดจ่ายกระแสไฟฟ้าโมเลกุลที่อยู่ภายในสภาพเรียงตัวก็จะเบียดตัวกลับมาอยู่ในสภาพเดิม การกลับไปกลับมาของโมเลกุลนี้เองเป็นผลทำให้เกิดความร้อนขึ้น ทำให้ประสิทธิภาพในการใช้งานลดลง

การเกิดฮิสเตอร์เรซีส ถ้าสนามที่ใส่เข้าไปเพิ่มขึ้นจนถึงจุดอิ่มตัวแล้ว จากนั้นก็ค่อยๆลดสนามลงความหนาแน่นของฟลักซ์ B จะลดลงแต่ไม่ได้ลดลงอย่างรวดเร็วเหมือนตอนเริ่มต้น เส้นกราฟเริ่มต้นของสภาพความเป็นแม่เหล็ก (initial magnetization curve) เมื่อความเข้มของสนาม H เข้าใกล้ศูนย์แล้ว จะมีความหนาแน่น ฟลักซ์ของสารเหลืออยู่ B_r (residual flux density) ในแกนแม่เหล็กดังนั้นเพื่อให้ค่า B ลดลงเป็นศูนย์ต้องใส่สนามยังคับที่เป็นลบเข้าไปคือ $-H_c$ (coercive force) จากนั้นเพิ่มค่า H ไปในทิศทางแกนลบของกราฟ ทำให้กลายเป็นแม่เหล็กโดยมีขั้วตรงข้าม ความเป็นแม่เหล็กเริ่มแรกจะเพิ่มขึ้น และ หลังจากนั้นเข้าสู่จุดอิ่มตัวความเป็นแม่เหล็กคงที่ และถ้าสนามมีค่าเป็นศูนย์อีกครั้งหนึ่งจะมีความเป็นแม่เหล็กตกค้างB_r อยู่ และเมื่อลด B ลงเป็นศูนย์อีกครั้งจะต้องใส่สนามบังคับ $+H_c$ เข้าไป เมื่อสนามเพิ่มขึ้นสู่แกนแกครั้งสารนั้นก็จะเข้าสู่จุดอิ่มตัวซึ่งปรากฏอยู่ในรูปของ ฮีสเตอร์เรซีสลูป (hysteresis loop) ดังแสดงในรูปที่ 2.11

การที่สารภายในแม่เหล็กเข้าสู่จุดอิ่มตัว ที่ปลายทั้งสองข้างของเส้นกราฟวงรอบปิดของความเป็นแม่เหล็ก (magnetization curve loop) จะถูกเรียกว่า สภาวะอิ่มตัว (saturation) จากกราฟฮีสเตอร์เรซีสลูป นั้นพื้นที่ภายในลูปแสดงถึงพลังงานที่สูญเสียไป ซึ่งปรากฏออกมาในรูปความร้อนนั้นเองแสดงว่าเหล็กชนิดใดที่มีพื้นที่ของฮิสเตอร์เรซิสน้อย ทำให้เกิดการสูญเสียพลังงานน้อย ซึ่งเมื่อทำการเปรียบเทียบฮิสเตอร์เรซีส ของเหล็กอ่อน มีค่าน้อยกว่าเหล็กแข็ง ดังแสดงในรูปที่ 2.12 นั่นคือในการเลือกเหล็กที่ทำแกนแม่เหล็กนั้นใช้เหล็กอ่อนดีกว่าเหล็กแข็งเพราะมีการสูญเสียพลังงานภายในน้อยกว่า



รูปที่ 2.11 แสดงกราฟฮิสเตอร์เรซีสลูป (Kraus,1987)



รูปที่ 2.12 แสดงกราฟฮีสเตอร์เรซีสลูปของเหล็กอ่อนและเหล็กแข็ง (Kraus,1987)

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ Chiang Mai University

2.4.2 ฟลักซ์แม่เหล็กตกค้าง (residual magnetic flux)

ในขณะจ่ายกระแสไฟฟ้าเข้าไปให้กับขดลวดทองแดง สนามแม่เหล็กจะทำให้โมเลกุลของแกนเหล็กพยายามเรียงตัวในทิศทางของสนามแม่เหล็ก แต่เมื่อหยุดจ่ายกระแสไฟฟ้าแกนเหล็กยังคงมีอำนาจความเป็นแม่เหล็กค้างอยู่ สภาพความเป็นแม่เหล็กดังกล่าวเรียกว่าฟลักซ์แม่เหล็กตกค้าง (residual magnetic flux) จำนวนเส้นแรงแม่เหล็กที่ตกค้างจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับชนิดและคุณสมบัติของเหล็ก ในขณะเหล็กอ่อนจะมีปริมาณความเป็นเหล็กตกค้างน้อยกว่าเหล็กแข็ง เพราะว่าเหล็กอ่อนมีคุณสมบัติที่คืนสภาพการเรียงตัวของโมเลกุลได้ง่ายกว่าเหล็กแข็ง

กล่าวโดยสรุปคือ ในการเลือกเหล็กมาใช้ทำแกนแม่เหล็กจะต้องพิจารณาจากกราฟฮีสเตอร์เรซิส โดยที่เหล็กนั้นต้องมีความหนาแน่นฟลักซ์ตกค้าง (B_r) น้อย ค่าแรงบังคับ (H_c) ต่ำและค่าสภาพความซึมซาบ (permeability , μ) สูง ดังนั้นเหล็กที่นำมาใช้จึงเลือกเหล็กอ่อน ซึ่งมีคุณสมบัติครบทั้ง 3 ข้อ

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ Chiang Mai University