

บทที่ 6

วิธี Analytical Method

บทนี้จะเป็นการอธิบายการออกแบบระบบท่อที่ถูกที่สุดโดยใช้วิธี Analytical Method ซึ่งแบ่งได้เป็น Brute Force Method ซึ่งต้องอาศัยการทดลองสมมติขนาดท่อหลายๆครั้ง และวิธี Calculus ซึ่งไม่จำเป็นต้องทดลองสมมติขนาดท่อบ่อยๆ แต่ต้องหาอนุพันธ์ย่อยของ Costเทียบกับขนาดท่อที่สมมติ การอธิบายวิธีทั้งสองจะใช้ตัวอย่างที่เคยใช้ในวิธีลองผิดลองถูกเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายและยังเป็นการเปรียบเทียบ Cost ที่ได้จากแต่ละวิธีอีกด้วย

6.1 Brute Force Method

วิธี Brute Force Method เป็นวิธีที่ใช้การกำหนดค่าความดันที่จุดจ่ายไว้ก่อน เพื่อบังคับให้ขนาดท่อที่ใช้งานได้จริง (ขนาดท่อที่ทำให้ค่าความดันที่จุดจ่ายเท่ากับค่าที่กำหนด) อยู่ในช่วงที่จำกัด และยังสามารถลดความยุ่งยากในการทดลองสมมติขนาดท่อลง เพราะเราไม่จำเป็นต้องสมมติขนาดท่อทั้งหมด แต่สมมติเท่ากับจำนวน loop ก็พอ ถึงแม้ว่าวิธีนี้ต้องมีการคำนวณซ้ำๆ แต่มันใจได้ว่าเราจะได้ระบบท่อที่ถูกที่สุดจริง

วิธีนี้มีขั้นตอนดังนี้ คือ

Step ที่ 1 เขียน diagram ของระบบท่อพร้อมทั้งสมมติทิศทางการไหลเริ่มต้น (รูปที่ 4.4)

Step ที่ 2 เขียน governing eqs. (สมการที่ 4.7 ถึง 4.17) และสมการพลังงานจากแหล่งจ่ายน้ำไปยังจุดจ่ายน้ำ (สมการที่ 4.18 ถึง 4.20)

สมการต่อเนื่องที่ทุกๆ node:

$$Q_a - Q_1 - Q_5 - Q_4 = 0 \quad (6.1)$$

$$Q_1 - Q_b - Q_2 = 0 \quad (6.2)$$

$$Q_2 - Q_c + Q_3 + Q_5 = 0 \quad (6.3)$$

$$Q_4 - Q_3 - Q_d = 0 \quad (6.4)$$

สมการพลังงานภายในวงรอบปิดที่ทุกๆ basic loop:

$$h_1 + h_2 - h_5 = 0 \quad (6.5)$$

$$h_5 - h_3 - h_4 = 0 \quad (6.6)$$

สมการหา head loss ที่ทุกๆท่อ:

$$h_1 = \left(\frac{8f_1}{g\pi^2}\right) \frac{L_1}{D_1^5} Q_1 |Q_1| \quad (6.7)$$

$$h_2 = \left(\frac{8f_2}{g\pi^2}\right) \frac{L_2}{D_2^5} Q_2 |Q_2| \quad (6.8)$$

$$h_3 = \left(\frac{8f_3}{g\pi^2}\right) \frac{L_3}{D_3^5} Q_3 |Q_3| \quad (6.9)$$

$$h_4 = \left(\frac{8f_4}{g\pi^2}\right) \frac{L_4}{D_4^5} Q_4 |Q_4| \quad (6.10)$$

$$h_5 = \left(\frac{8f_5}{g\pi^2}\right) \frac{L_5}{D_5^5} Q_5 |Q_5| \quad (6.11)$$

สมการพลังงานจากแหล่งจ่ายน้ำไปยังจุดจ่ายน้ำ (H_b, H_c, H_d) ดังนี้

$$H_a + z_a = H_b + z_b + h_1 \quad (6.12)$$

$$H_a + z_a = H_c + z_c + h_5 \quad (6.13)$$

$$H_a + z_a = H_d + z_d + h_4 \quad (6.14)$$

Step ที่ 3 กำหนดค่าความดันที่จุดจ่าย (H) ที่ต้องการ ในที่นี้คือ $H_b = 15$ m. , $H_c = 13$ m. และ $H_d = 15$ m.

Step ที่ 4 หาค่า การสูญเสียแรงดันในท่อ (h) จากการแก้สมการพลังงานภายในวงรอบปิด (สมการที่ 6.5 และ 6.6) และสมการพลังงานจากแหล่งจ่ายน้ำไปยังจุดจ่ายน้ำ (สมการที่ 6.12 ถึง 6.14)

Step ที่ 5 สมมติค่า D_i จำนวน t ท่อ โดยที่ t เท่ากับจำนวน basic loop และในแต่ละ basic loop จะต้อง มีท่อที่สมมติเป็นส่วนประกอบ ให้ D_i ที่สมมตินี้เรียกว่า basic diameters เนื่องจากมีจำนวน basic loop เท่ากับ 2 loop ดังนั้นจึงต้องสมมติ basic diameters จำนวน 2 ท่อ ในที่นี้สมมติ D_2 และ D_4 โดยที่ D_2 เป็นส่วนประกอบของ loop a-b-o-a และ D_4 เป็นส่วนประกอบของ loop a-o-d-a

Step ที่ 6 เขียน solution diagram ซึ่งเป็นแผนภาพที่จะอธิบายว่าจากค่า D_2 และ D_4 จะหาค่า D_i ที่เหลือ ได้อย่างไรจาก governing eqs. ดังนั้นสามารถเขียน solution diagram ดังรูปที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 แสดงค่า Cost ที่คำนวณได้จากวิธี Brute Force Method โดยสมมติค่า D_2 และ D_4

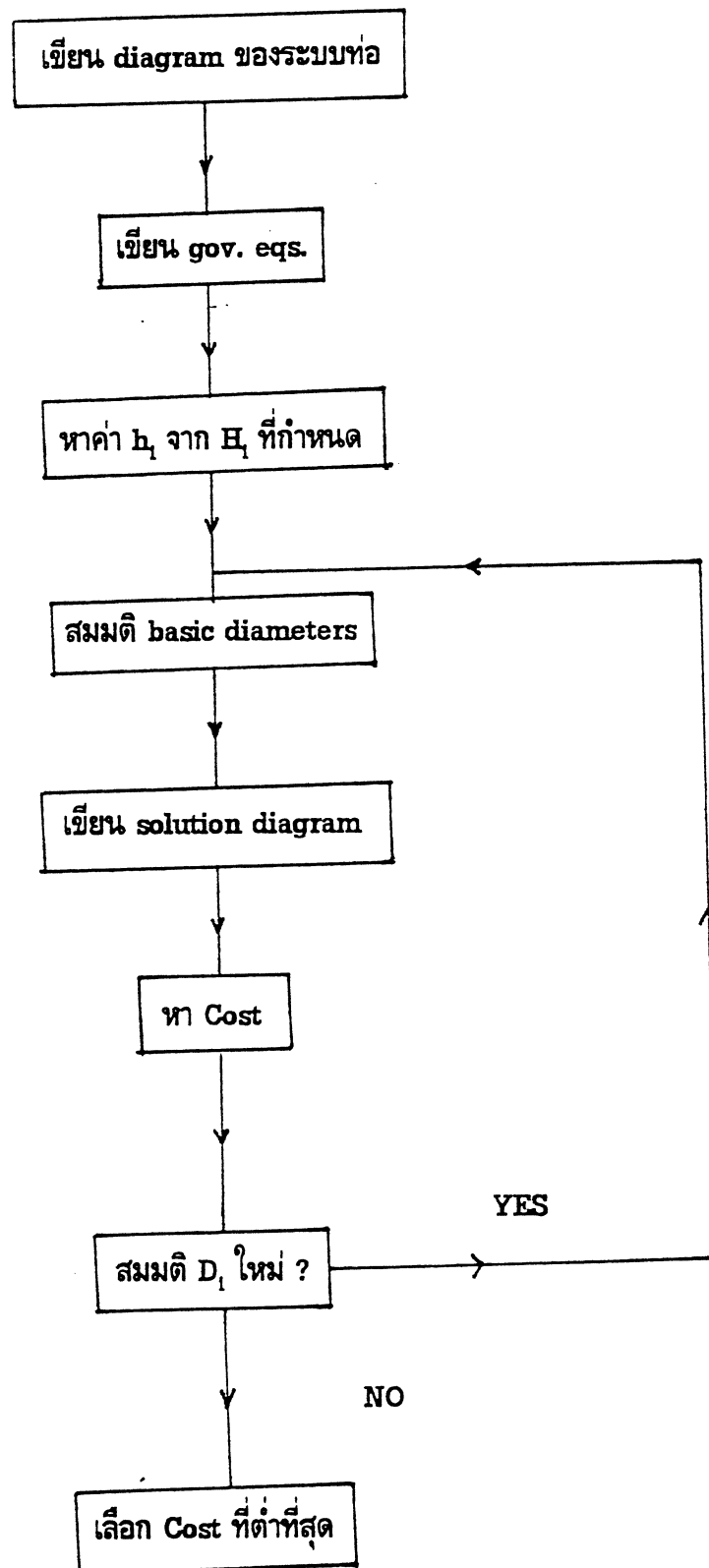
ท่อที่ สมมติ	D_2 (m.)										
D_4 (m.)	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20
0.28	2285	2300	2315	2330	2344	2358	2370	2383	2394	2404	2413
0.29	2409	2424	2439	2453	2466	2479	2492	2503	2514	2523	2531
0.30	2481	2496	2510	2523	2536	2549	2560	2571	2580	2588	2594
0.31	2532	2546	2560	2573	2585	2597	2607	2616	2624	2631	2635
0.32	2570	2583	2596	2608	2619	2630	2639	2647	2653	2656	2657
0.33	2595	2608	2620	2631	2641	2650	2657	2663	2666	2666	2662
0.34	2610	2622	2632	2642	2650	2657	2661	2663	2662	2656	2644
0.35	2612	2622	2631	2638	2643	2646	2646	2641	2631	2612	2576

จากตารางที่ 6.1 จะได้ว่า ค่า D_2 และ D_4 ที่ให้ค่า Cost ที่ต่ำที่สุดคือ $D_2 = 0.1$ m. และ $D_4 = 0.28$ m. เมื่อนำค่า D_2 และ D_4 ไปหาค่า D_1 ที่เหลือโดยใช้ solution diagram ในรูปที่ 6.1 จะได้

$D_1 = [0.322, 0.10, 0.088, 0.28, 0.304]$ m. เมื่อนำค่า D_1 เหล่านี้ไปหา Cost จะได้เท่ากับ 2285 บาท

อย่างไรก็ตามขนาดท่อที่ได้จากวิธี Analytical Method อาจจะเป็นระบบท่อที่ไม่มีขายในท้องตลาด เพราะขนาดท่อที่ได้มักจะไม่ใช่ขนาดท่อมาตรฐานที่มีขายในท้องตลาด ดังนั้นเมื่อเรานำวิธีดังกล่าวไปใช้ในทางปฏิบัติ เมื่อกำหนดขนาดของขนาดท่อที่ให้ค่าใช้จ่ายที่ต่ำที่สุดได้แล้วจึงต้องเลือกขนาดท่อที่จะนำไปใช้จริงให้ใกล้เคียงกับขนาดท่อที่คำนวณได้ ซึ่งตามปกติมักจะเลือกขนาดท่อที่ใหญ่กว่าเพื่อให้แน่ใจได้ว่าค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำจะมีค่าพอเพียง จากคำตอบของระบบท่อที่มี 2 loop ที่คำนวณได้ สามารถปรับคำตอบให้เป็น $D_1 = [0.35, 0.10, 0.10, 0.30, 0.30]$ m. ซึ่งอาจจะต้องตรวจสอบค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำว่าอยู่ในข้อกำหนดหรือไม่ นอกจากการปรับขนาดท่อทั้งหมดให้เป็นขนาดท่อมาตรฐานที่มีขายตามท้องตลาดแล้ว ก็สามารถหาระบบท่อที่ถูกต้องที่สุดได้ โดยใช้ขนาดท่อมาตรฐานในการสมมติค่า basic diameters ซึ่งอาจจะได้ค่าของขนาดท่อที่เหลือไม่ใช่ขนาดมาตรฐาน แต่ก็สามารถปรับขนาดท่อดังกล่าวให้เป็นขนาดท่อมาตรฐานดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

จากขั้นตอนทั้ง 8 ของวิธี Brute Force Method สามารถสรุปได้ ดังรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 ขั้นตอนของ Brute Force Method

6.2 Calculus Method

จาก solution diagram ใน Brute Force Method จะเห็นว่าเราสมมติค่า D_2 และ D_4 แล้วนำไปหา D_i ที่เหลือ (D_1, D_3 และ D_5) โดยใช้ solution diagram ซึ่ง D_1, D_3 และ D_5 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ D_2 และ D_4 ได้ หลังจากนั้นจึงนำขนาดท่อทั้งหมดไปหาค่า Cost ของระบบท่อ ดังนั้นจะได้ว่า Cost (C) เป็นฟังก์ชันของ D_2 และ D_4 ดังสมการ

$$C = f(D_2, D_4) \quad (6.15)$$

โดยที่ C เป็นค่าใช้จ่ายของระบบท่อ

ในที่นี้ D_2 และ D_4 คือ basic diameters ซึ่งเป็นขนาดท่อที่นำไปหาค่าตอบ ส่วน D_1, D_3 และ D_5 เรียกว่า dependent diameters ซึ่งเป็นขนาดท่อที่ขึ้นอยู่กับ basic diameters (D_2 และ D_4)

ดังนั้นเพื่อหา Minimum cost สามารถทำได้โดย differentiate สมการที่ (6.15) เทียบกับ D_2 และ D_4 แล้วให้เท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\frac{\partial C}{\partial D_2} = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial C}{\partial D_4} = 0 \quad (6.17)$$

เมื่อแก้สมการที่ (6.16) และ (6.17) แล้วสามารถหาค่า D_2 และ D_4 ที่ให้ค่า Min. cost ได้ จากระบบท่อดังรูปที่ 4.4 สามารถหาสมการที่ (6.16) และ (6.17) ได้ดังนี้ (รายละเอียดดูในภาคผนวก ข.)

$$\frac{\partial C}{\partial D_2} = 0 = 1 + \frac{K_1 h_1 D_1^6}{Q_1^2 |Q_1|} \frac{Q_2^2 |Q_2|}{K_2 h_2 D_{26}} - \frac{K_5 h_5 D_5^6}{Q_5^2 |Q_5|} \frac{Q_2^2 |Q_2|}{K_2 h_2 D_{26}} \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial C}{\partial D_4} = 0 = 1 + \frac{K_3 h_3 D_3^6}{Q_3^2 |Q_3|} \frac{Q_4^2 |Q_4|}{K_4 h_4 D_{46}} - \frac{K_5 h_5 D_5^6}{Q_5^2 |Q_5|} \frac{Q_4^2 |Q_4|}{K_4 h_4 D_{46}} \quad (6.19)$$

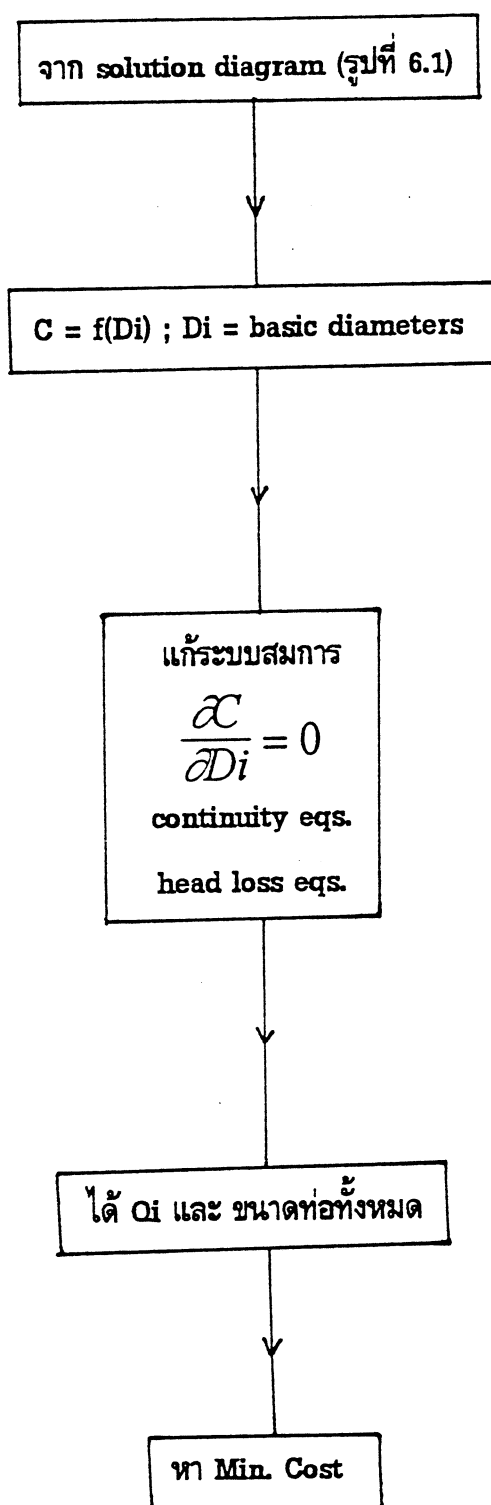
โดยที่ $K_1 = (8\pi^3)/20f_1$

$K_3 = (8\pi^3)/20f_3$

$K_5 = (8\pi^3)/20f_5$

และ f_1, f_3 และ f_5 คือค่าแฟกเตอร์ความเสียดทานของท่อที่ 1, 3 และ 5 ตามลำดับ

จากสมการที่ (6.18) และ (6.19) จะเห็นได้ว่า ถ้าต้องการหาค่า D_2 และ D_4 จำเป็นต้องรู้ค่า D_1, D_3, D_4 และ Q_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) รวม 8 ตัวแปร ซึ่งเราสามารถใช้สมการต่อเนื่องที่แต่ละ node จำนวน 3 สมการ (สมการที่ 6.2 ถึง 6.4) และสมการหา head loss สำหรับทุกท่อ 5 สมการ (สมการที่ 6.7 ถึง 6.11) รวม 8 สมการ และเมื่อนำมารวมกับสมการที่ (6.18) และ (6.19) แล้วจะมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรพอดี (10 สมการ และ 10 ตัวแปร) ดังนั้นเมื่อแก้สมการเหล่านี้สามารถหาขนาดท่อ (D_i ทั้งหมด) ที่ให้ Cost ต่ำที่สุดได้ จากขั้นตอนของ Calculus Method ที่ได้อธิบายมาแล้วสามารถสรุปได้ในรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 ขั้นตอนของ Caolus Method

เมื่อใช้ข้อมูลในหัวข้อที่ 5.4 และเมื่อแก้สมการทั้ง 10 สมการแล้วจะได้คำตอบดังนี้

$$D_i = [0.352, 0.182, 0.263, 0.333, 0.193] \text{ m. ; } i = 1, 2, \dots, 5$$

$$Q_i = [0.403, 0.103, 0.179, 0.479, 0.118] \text{ oms. ; } i = 1, 2, \dots, 5$$

และเมื่อนำค่า D_i เหล่านี้ไปหา Cost จะได้เท่ากับ 2666 บาท แต่เมื่อนำไปตรวจสอบกับคำตอบที่ได้จากวิธี Brute Force Method (ตารางที่ 6.1) ปรากฏว่าค่าที่ได้จากวิธี Calculus Method ไม่ใช่ค่า Cost ที่ต่ำที่สุด แต่เป็นค่าสูงสุด (Local maximum) ของคำตอบที่ได้จากวิธี Analytical (Brute Force Method)

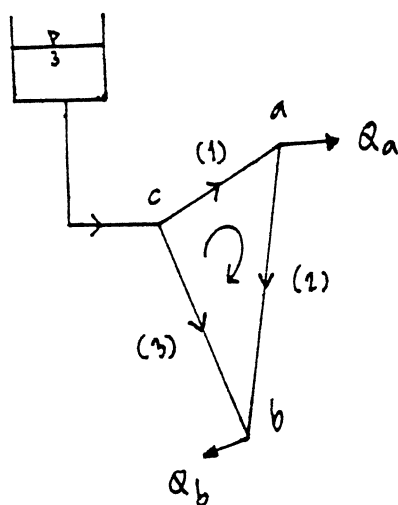
อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าวิธี Calculus Method จะให้คำตอบที่ไม่ใช่คำตอบที่ต่ำที่สุด สำหรับระบบท่อที่มี 2 loop แต่เมื่อนำวิธีดังกล่าวไปใช้กับระบบท่อหนึ่ง loop ดังแสดงในรูปที่ 6.4 และใช้ข้อมูลดังต่อไปนี้

$$z_i = [50, 45, 65] \text{ m. โดยที่ } i = a, b, c$$

$$L_i = [200, 400, 300] \text{ m. โดยที่ } i = 1, 2, 3$$

$$f_i = 0.02$$

$$\text{ความต้องการน้ำ } Q_i = [0.8, 1.0] \text{ oms. โดยที่ } i = a \text{ และ } b$$



รูปที่ 6.4 ระบบท่อที่มีหนึ่ง loop

$$\text{ความดันที่จุดจ่ายน้ำ } H_i = [10, 10] \text{ m. โดยที่ } i = a \text{ และ } b$$

$$\text{ความสูงของถังสูง } H_o = 15 \text{ m. และ } m = 20 \text{ Baht/m}^2$$

เมื่อใช้วิธี Calculus Method แก้ปัญหาตามแบบท่อดังรูปที่ 6.4 โดยให้ D_1 เป็น basic diameter (ท่อที่สมมติ) จะได้คำตอบดังนี้ $D_i = [0.41, 0.179, 0.45] \text{ m.}$ และ cost เท่ากับ 5770 บาท

และเมื่อใช้วิธี Brute Force Method แก้ปัญหาโดยใช้ระบบท่อดังรูปที่ 6.4 โดยให้ D_1 เป็น basic diameter โดยการสมมติค่า D_1 ตั้งแต่ 0.41 ถึง 0.55 m. แล้วคำนวณหาค่า D_2, D_3 และ Cost ได้ดังแสดง

ในตารางที่ 6.2 และจากตารางที่ 6.2 พบว่าค่าตอบที่ต่ำที่สุดคือ $D_i = [0.41, 0.179, 0.45]$ m. และ cost เท่ากับ 5770 บาท ซึ่งเท่ากับค่าตอบที่ได้จากวิธี Calculus

ดังนั้นอาจจะสรุปเบื้องต้นได้ว่า วิธี Calculus Method อาจจะให้ค่า Cost ต่ำที่สุดหรือไม่ให้ก็ได้ (แต่ให้ค่าสูงที่สุดแทน) ต้องทำการศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมเพื่อให้เข้าใจลึกซึ้งยิ่งขึ้น

ตารางที่ 6.2 แสดงค่า Cost และ ขนาดท่ออื่นๆ ที่คำนวณได้จากวิธี Brute Force Method โดยการสมมติค่า D_1

No.	D_1 , m.	D_2 , m.	D_3 , m.	Cost , Baht
1	0.41	0.179	0.45	5770
2	0.42	0.254	0.44	6349
3	0.43	0.307	0.429	6748
4	0.44	0.35	0.418	7065
5	0.45	0.387	0.405	7331
6	0.46	0.421	0.392	7561
7	0.47	0.452	0.378	7762
8	0.48	0.481	0.362	7939
9	0.49	0.509	0.344	8092
10	0.50	0.535	0.324	8223
11	0.51	0.56	0.302	8329
12	0.52	0.584	0.276	8406
13	0.53	0.607	0.244	8444
14	0.54	0.63	0.204	8424
15	0.55	0.652	0.143	8276