

บทที่ 4

การไหลในระบบท่อ

4.1 บทนำ

ทฤษฎีที่อธิบายในบทที่ 3 , ในบทนี้ และบทต่อไปของรายงานเล่มนี้มีสมมติฐานดังนี้คือ การไหลเป็นแบบคงตัว (steady flow) , น้ำหรือของไหลเป็นของไหลที่อัดตัวไม่ได้ (incompressible fluid) และการไหลเป็นแบบปั่นป่วนโดยสมบูรณ์ (fully turbulent or complete turbulent flow) ดังนั้นค่า f หรือแฟกเตอร์ความเสียดทานจะมีค่าคงที่เสมอ

จากสมการ Darcy-Weisbach ในหัวข้อที่ 3.3 จะเห็นว่ามีความแปรที่เกี่ยวข้องอยู่ 5 ตัวคือ h, f, L, D และ Q และจากหัวข้อที่ 3.4 จะเห็นว่าค่า f นั้นไม่สามารถหาออกมาได้ง่ายๆ ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการคำนวณเกี่ยวกับการไหลในระบบท่อ จึงให้การไหลในระบบท่อเป็นแบบ fully turbulent flow ซึ่งจะทำให้ค่า f มีค่าคงที่ ส่วนค่า L นั้นเป็นความยาวของท่อซึ่งในทางปฏิบัติมักจะวางท่อไปตามแนวของถนนดังนั้นค่า L จึงคงที่ด้วย สำหรับค่า h และ Q นั้นจะเปลี่ยนไปตามค่า D

โดยทั่วๆไประบบท่อประกอบไปด้วย แหล่งจ่ายน้ำ (source) จุดต่อ (nodes) และ วงรอบปิด (loops) ซึ่งในการแก้ปัญหาที่ทำได้โดยนำกฎการอนุรักษ์ต่างๆ ที่ได้อธิบายในบทที่แล้วมาประยุกต์ใช้กับระบบท่อดังกล่าว กล่าวคือ การนำกฎการอนุรักษ์มวลมาใช้ที่แต่ละจุดต่อ (each node) ทุกๆจุด การนำกฎการอนุรักษ์พลังงานมาใช้ที่แต่ละวงรอบปิด (each loop) และใช้จากแหล่งจ่ายน้ำไปยังจุดจ่ายน้ำ

ในปัญหาเกี่ยวกับระบบท่อที่มีการไหลแบบคงตัวนั้น โดยปกติจะรู้ค่าความต้องการน้ำ (demands) และพลังงานของแหล่งจ่ายน้ำ (source of head) ดังนั้นจะมีตัวแปรต่างๆดังนี้คือ Q ในแต่ละท่อ , h ในแต่ละท่อ , ความดันที่จุดจ่ายน้ำ (p/γ or H) ที่ทุกๆจุด และขนาดท่อ (D) ทุกท่อในระบบ ในหัวข้อที่ 4.4 อธิบายการหาค่าตัวแปรเหล่านี้ออกมา

ในระบบท่อจะถือว่าพลังงานทั้งหมดที่ตำแหน่งใดๆ ($E_t = H_t + z_t + v_t^2/2g$) มีค่าไม่แตกต่างจากพลังงานสถิตย์ (static head) ซึ่งเป็นพลังงานเนื่องจากความดัน (H_t) และ พลังงานศักย์ (z_t) รวมกัน

4.2 กฎการอนุรักษ์มวล

ดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่แล้วว่า ปัญหาเกี่ยวกับระบบท่อจะมี Q_i , h_i , H_i และ D_i เป็นตัวแปร ดังนั้นเราสามารถคำนวณหาค่า Q_i (อัตราการไหลในท่อ) ได้โดยใช้กฎการอนุรักษ์มวล



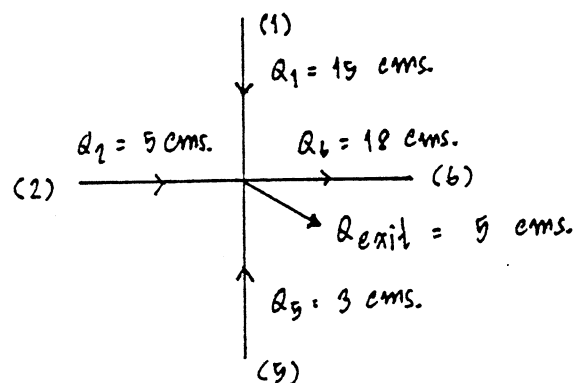
เมื่อนำกฎการอนุรักษ์มวลซึ่งกล่าวว่า ปริมาณมวลสารในระบบจะคงที่ตลอดเวลา ไม่มีการสูญหาย สำหรับการไหลแบบคงตัวที่อัดไม่ได้ (incompressible, steady flow) มาใช้ที่จุดต่อ (node) ของระบบท่อ จะได้ว่า อัตราการไหลเข้าจุดต่อหนึ่งๆ เท่ากับ อัตราการไหลออกจากจุดต่อนั้นๆ ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\sum Q_{in} - \sum Q_{out} = Q_{exit} \quad (4.1)$$

โดยที่ Q_{in} เป็นอัตราการไหลเข้าจุดต่อ และ Q_{out} เป็นอัตราการไหลออกจากจุดต่อ

Q_{exit} เป็นความต้องการน้ำหรือปริมาณการไหลทั้งหมดที่เข้าสู่ระบบ

จากรูปที่ 4.1 แสดงท่อจำนวน 4 ท่อมาบรรจบกันที่จุดต่อจุดหนึ่ง สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้



รูปที่ 4.1 จุดต่อในระบบท่อจุดหนึ่ง

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 = 5$$

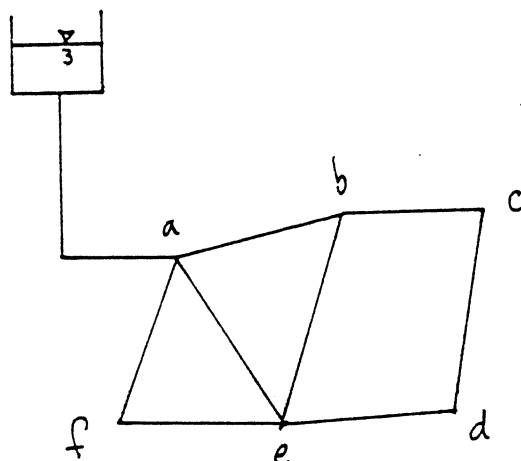
$$15 + 5 + 3 - 18 = 5$$

สมการที่ (4.8) เรียกว่า สมการต่อเนื่อง (Continuity equation) ที่จุดต่อใดๆ

4.3 กฎการอนุรักษ์พลังงาน

ในหัวข้อที่ 3.2 เราได้กล่าวถึงกฎการอนุรักษ์พลังงานมาแล้ว กฎดังกล่าวสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับระบบท่อได้ เมื่อต้องการหาค่า h_f (การสูญเสียแรงดันในท่อ) ก็ใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานภายในวงรอบปิดใดๆ วงรอบปิดที่กล่าวถึงในที่นี้และที่อื่นในรายงานเล่มนี้นั้นหมายถึงวงรอบปิดพื้นฐาน หรือ basic loop ซึ่งหมายถึงวงรอบปิดที่ไม่มีวงรอบปิดอื่นๆ ซ้อนอยู่ภายใน จากรูปที่ 4.2 แสดงระบบท่อระบบหนึ่งซึ่งประกอบด้วยวงรอบปิดพื้นฐาน หรือ basic loop จำนวน 3 วงรอบ คือ วงรอบ a-b-e-a , วงรอบ a-e-f-a และ วงรอบ b-o-e-d-b ส่วนวงรอบ d-b-o-d-e-a หรือ วงรอบ a-b-o-d-e-f-a ไม่ใช่ basic loop

ดังนั้นต่อไปถ้าพบคำว่า วงรอบปิด (loop) ก็ให้หมายถึง basic loop หรือ วงรอบพื้นฐานเท่านั้น



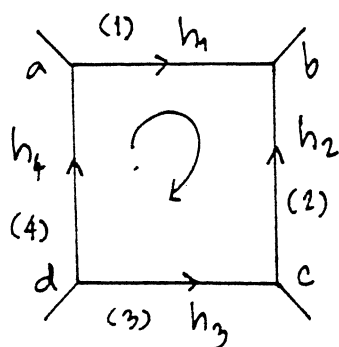
รูปที่ 4.2 ระบบท่อที่มี 3 basic loop

และถ้าต้องการหาค่า H_f (แรงดันที่จุดจ่ายน้ำ) ก็สามารถใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานจากแหล่งจ่ายน้ำไปยังจุดจ่ายน้ำใดๆ

4.3.1 สมการพลังงานภายในวงรอบปิดพื้นฐาน

(Energy equations around basic loop)

ในหัวข้อที่ 3.2 เราสามารถเขียนสมการพลังงานระหว่างสองจุดได้ และสามารถนำมาใช้กับระบบท่อได้ พิจารณาวงรอบปิดใดๆ ดังรูปที่ 4.3 เมื่อใช้สมการพลังงานจากจุดต่อ a ไปตามเข็มนาฬิกาแล้วกลับมายังจุด a อีกครั้งหนึ่งจะได้ว่า



รูปที่ 4.3 วงรอบปิดพื้นฐานใดๆ

$$H_a + z_a + \frac{v_a^2}{2g} = H_a + z_a + \frac{v_a^2}{2g} + h_1 - h_2 - h_3 + h_4 \quad (4.2)$$

โดยที่ H_a เป็นพลังงานต่อหน่วยน้ำหนักของน้ำเนื่องจากความดัน หรือ เป็นค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำ ; m.

z_a เป็นพลังงานศักย์ต่อหน่วยน้ำหนักของน้ำที่จุด a หรือเป็นค่าระดับผิวดินที่จุด a ; m.

$v_a^2/2g$ เป็นพลังงานจลน์ต่อหน่วยน้ำหนักของน้ำ , m.

h_1, h_2, h_3 และ h_4 เป็นการสูญเสียแรงดันในท่อที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

จากสมการที่ (4.2) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$h_1 - h_2 - h_3 + h_4 = 0 \quad (4.3)$$

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\sum h_i = 0 \quad (4.4)$$

เมื่อ $\sum h_i$ เป็นผลรวมทางพีชคณิตของการสูญเสียแรงดันในท่อทุกท่อที่อยู่ในวงรอบปิดพื้นฐาน

สมการที่ (4.4) เรียกว่าสมการพลังงานภายในวงรอบปิดพื้นฐาน (energy equations around the basic loop) หรือ สมการวงรอบปิด (loop equations) ในการใช้สมการที่ (4.4) จำเป็นต้องรู้หรือสมมติทิศทางการไหลในแต่ละท่อเสียก่อนและการสูญเสียแรงดันสามารถหาได้จากสมการ Darcy-Weisbach (สมการที่ 3.9)

4.3.2 สมการพลังงานจากแหล่งจ่ายน้ำไปยังจุดจ่ายน้ำ

(Energy equations from source to demand nodes)

สมการที่ (4.4) ใช้สำหรับหาค่า h_i ในระบบท่อ ในหัวข้อนี้เป็นการประยุกต์สมการพลังงานสำหรับหาค่า H_i จากสมการที่ (3.5) เมื่อใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานจากแหล่งจ่ายน้ำ (source node) ไปยังจุดจ่ายน้ำ (demand nodes) จะได้

$$E_s + \sum h_{pi} = E_d + \sum h_i \quad (4.5)$$

โดยที่ E_s เป็นพลังงานที่แหล่งจ่ายน้ำ , m.

E_d เป็นพลังงานที่จุดจ่ายน้ำ , m.

h_{pi} เป็นพลังงานจากเครื่องสูบน้ำ , m.

h_i เป็นการสูญเสียแรงดันในท่อ , m.

ถ้าระบบท่อใช้ถังสูง (elevated tank) เป็นแหล่งจ่ายน้ำสมการที่ (4.4) จะเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$H_s + z_s + \sum h_{pi} = H_i + z_i + \sum h_i \quad (4.6)$$

เมื่อ H_s เป็นความสูงของถังสูง (elevated tank) , m.

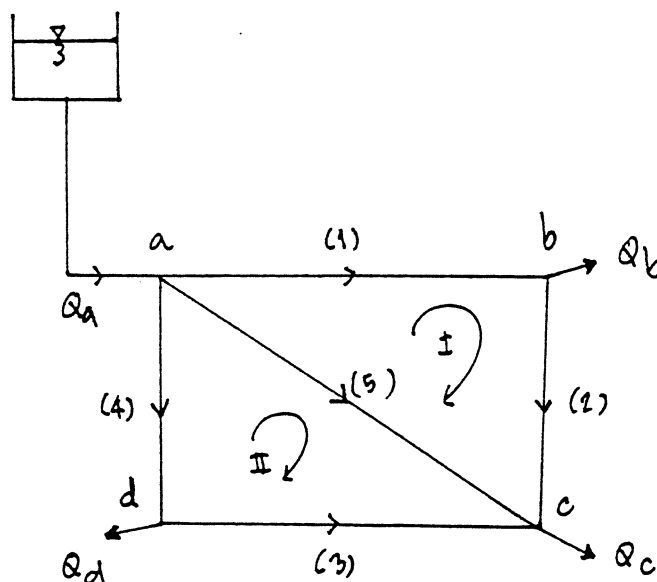
z_s และ z_i เป็นระดับผิวดินของแหล่งจ่ายน้ำ (source node) และจุดจ่ายน้ำ (demand nodes) ตาม

ลำดับ , m.

H_j เป็นแรงดันที่จุดจ่ายน้ำ (nodal pressure head) , m.

4.4 การแก้ปัญหาคำถามไหลในระบบท่อ (Solving pipe network)

ในหัวข้อนี้เป็นการนำทฤษฎีต่างๆที่ได้อธิบายในบทที่ 3 และบทที่ 4 มาใช้แก้ปัญหาคำถามไหลในระบบท่อซึ่งจะขออธิบายโดยใช้ตัวอย่างระบบท่อดังรูปที่ 4.4 จากรูปที่ 4.4 เป็นระบบท่อที่มี 2 loop ซึ่งประกอบด้วยท่อจำนวน 5 ท่อ โดยมีถังสูงเป็นแหล่งจ่ายน้ำ ข้อมูลที่รู้ได้แก่ ค่าระดับผิวดินของแต่ละ node (z_j), ความยาวของท่อ (L_j), ค่าแฟกเตอร์ความเสียดทานของแต่ละท่อ (f_j), ความสูงของถังสูง (H_s) และ ความต้องการน้ำที่จุดจ่าย ส่วนตัวแปรที่ไม่รู้ค่าได้แก่ ปริมาณน้ำที่ไหลเข้าสู่ระบบท่อ (Q_s), อัตราการไหลในแต่ละท่อ (Q_j), การสูญเสียแรงดันในแต่ละท่อ (h_{fj}), แรงดันที่จุดจ่าย (H_j) และขนาดท่อแต่ละท่อ (D_j)



รูปที่ 4.4 ระบบท่อ 2 loop

ดังนั้นจากรูปที่ 4.4 สามารถแก้ปัญหได้ตามขั้นตอนดังนี้คือ

Step ที่ 1 เขียน diagram ของระบบท่อ, กำหนดหมายเลขท่อ และสมมติทิศทางการไหลเริ่มต้น

การกำหนดหมายเลขท่อและสมมติทิศทางการไหลได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.4 แล้ว

Step ที่ 2 เขียน governing equations ซึ่งประกอบด้วย

สมการต่อเนื่องที่ทุกๆ node:

$$Q_a - Q_1 - Q_5 - Q_4 = 0 \quad (4.7)$$

$$Q_1 - Q_b - Q_2 = 0 \quad (4.8)$$

$$Q_2 - Q_o + Q_4 + Q_5 = 0 \quad (4.9)$$

$$Q_4 - Q_3 - Q_a = 0 \quad (4.10)$$

สมการพลังงานภายในวงรอบปิดที่ทุกๆ basic loop:

$$h_1 + h_2 - h_5 = 0 \quad (4.11)$$

$$h_5 - h_4 - h_3 = 0 \quad (4.12)$$

สมการหา head loss ที่ทุกๆท่อ:

$$h_1 = \left(\frac{8f_1}{g\pi^2} \right) \frac{L_1}{D_1^5} Q_1 |Q_1| \quad (4.13)$$

$$h_2 = \left(\frac{8f_2}{g\pi^2} \right) \frac{L_2}{D_2^5} Q_2 |Q_2| \quad (4.14)$$

$$h_3 = \left(\frac{8f_3}{g\pi^2} \right) \frac{L_3}{D_3^5} Q_3 |Q_3| \quad (4.15)$$

$$h_4 = \left(\frac{8f_4}{g\pi^2} \right) \frac{L_4}{D_4^5} Q_4 |Q_4| \quad (4.16)$$

$$h_5 = \left(\frac{8f_5}{g\pi^2} \right) \frac{L_5}{D_5^5} Q_5 |Q_5| \quad (4.17)$$

Step ที่ 3 แก้สมการใน step ที่ 2 โดยการสมมติขนาดท่อทั้งหมด (D_i) ซึ่งจะทำให้จำนวนสมการ (11 สมการ) เท่ากับจำนวนตัวแปรคือ Q_a (1ตัว), Q_i (5ตัว) และ h_i (5ตัว) รวม 11 ตัวแปรพอดี

Step ที่ 4 หาแรงดันที่จุดจ่ายน้ำจากสมการพลังงานจากแหล่งจ่ายน้ำไปยังจุดจ่ายน้ำ (H_b, H_c, H_d) ดังนี้

$$H_a + z_a = H_b + z_b + h_1 \quad (4.18)$$

$$H_a + z_a = H_o + z_o + h_5 \quad (4.19)$$

$$H_a + z_a = H_d + z_d + h_4 \quad (4.20)$$

โดยที่ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 และ Q_5 เป็นอัตราการไหลในท่อที่ 1, 2, ..., 5 ตามลำดับ ; cms.

Q_a เป็นปริมาณการไหลเข้าสู่ระบบท่อ ; cms.

Q_b, Q_o และ Q_d เป็นความต้องการน้ำที่จุดจ่าย b, o และ d ตามลำดับ ; cms.

h_1, h_2, h_3, h_4 และ h_5 เป็นการสูญเสียแรงดันในท่อที่ 1, 2, ..., 5 ตามลำดับ ; m.

f_1, f_2, f_3, f_4 และ f_5 เป็นแฟกเตอร์ความเสียดทานของท่อที่ 1, 2, ..., 5 ตามลำดับ

L_1, L_2, L_3, L_4 และ L_5 เป็นความยาวของท่อที่ 1,2,...,5 ตามลำดับ ; m.

D_1, D_2, D_3, D_4 และ D_5 เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของท่อที่ 1,2,...,5 ตามลำดับ ; m.

H_u เป็นพลังงานของแหล่งจ่ายน้ำหรือความสูงของถังสูง ; m.

H_b, H_o และ H_d เป็นความดันที่จุดจ่าย b,o และ d ตามลำดับ

z_a, z_b, z_o และ z_d เป็นระดับผิวดินที่จุด a,b,o และ d ตามลำดับ ซึ่งสามารถหาได้จากการสำรวจภูมิประเทศ (topographic surveying) หรืออ่านจากแผนที่ภูมิประเทศ (topographic map) ที่มีหน่วยงานต่างๆทำไว้ใช้

4.5 ระบบท่อที่ประกอบด้วยเครื่องสูบน้ำและมีแหล่งจ่ายน้ำมากกว่าหนึ่งแหล่ง

สำหรับระบบท่อที่มีสูบและอ่างเก็บน้ำเพิ่มเข้ามานั้น สมการ governing eqs. สำหรับระบบท่อเหล่านี้จะแตกต่างจากระบบสมการในหัวข้อที่ 4.4 เล็กน้อย กล่าวคือในระบบท่อในหัวข้อนี้จะเพิ่มตัวแปรที่ไม่ทราบค่าขึ้นมาก็ได้แก่ ปริมาณการไหลเข้าระบบจากแหล่งจ่ายน้ำ หรืออ่างเก็บน้ำที่เพิ่มขึ้นมา และค่าพลังงานที่เครื่องสูบลำดับให้แก่ระบบ ดังนั้นนอกจากจะมีระบบสมการในหัวข้อที่ 4.4 ดังกล่าวแล้วจะต้องเพิ่มสมการสำหรับค่า พลังงานที่สูบเพิ่มให้แก่ระบบท่อ หรือ pumping head (h_p) และ อัตราการไหลจากอ่างเก็บน้ำ

สำหรับค่า h_p นั้นสามารถหาได้จากสมการ characteristic curve equation ซึ่งเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง h_p กับอัตราการไหลที่ผ่านสูบนั้นๆ ส่วนค่าอัตราการไหลจากอ่างเก็บน้ำสามารถหาได้จากสมการพลังงานระหว่างอ่างเก็บน้ำ 2 อ่างๆ เพื่อความเข้าใจจะขอยกตัวอย่างระบบท่อดังรูปที่ 4.5 ซึ่งประกอบด้วยอ่างๆ 2 อ่างๆ โดยมีเครื่องสูบน้ำสูบน้ำจากอ่างที่ 1 เข้าสู่ระบบท่อ 2 loop ซึ่งประกอบด้วยท่อจำนวน 7 ท่อ ตัวแปรที่ไม่รู้ค่าได้แก่ อัตราการไหลเข้าระบบในอ่างที่ 1 และ 2 (Q_1 และ Q_2) ,การสูญเสียแรงดันในท่อแต่ละท่อ (h_f) ,ความดันที่จุดจ่าย (H_b และ H_d) , h_p และขนาดท่อทั้งหมด (D_i) ดังนั้นจากขั้นตอนการแก้ปัญหาในหัวข้อที่แล้วสามารถแก้ปัญหาได้ดังนี้

Step ที่ 1 เขียน diagram ของระบบท่อ,กำหนดหมายเลขท่อและสมมติทิศทางการไหลเริ่มต้น ซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.5

Step ที่ 2 เขียน governing equations ซึ่งประกอบด้วย

สมการต่อเนื่องที่ทุกๆ node:

$$Q_1 - Q_3 - Q_5 - Q_6 = 0 \quad (4.21)$$

$$Q_4 - Q_b - Q_d = 0 \quad (4.22)$$

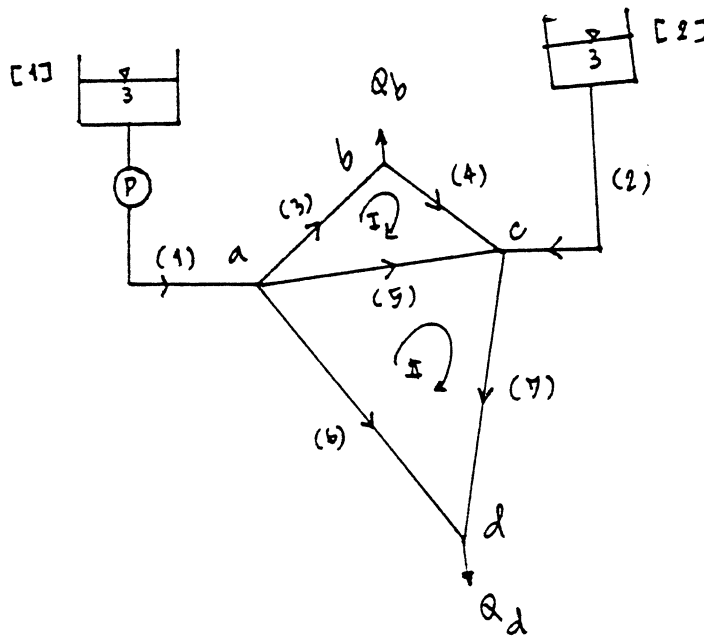
$$Q_2 + Q_4 + Q_5 = 0 \quad (4.23)$$

$$Q_6 - Q_a + Q_7 = 0 \quad (4.24)$$

สมการพลังงานในวงรอบปิดที่ทุกๆ basic loop:

$$h_3 + h_4 - h_5 = 0 \quad (4.25)$$

$$h_5 + h_7 - h_6 = 0 \quad (4.26)$$



รูปที่ 4.5 ระบบท่อที่ประกอบด้วยสูบและอ่างเก็บน้ำ

สมการหา head loss ในท่อทุกท่อ:

$$h_1 = \left(\frac{8f_1}{g\pi^2} \right) \frac{L_1}{D_1^5} Q_1 |Q_1| \quad (4.27)$$

$$h_2 = \left(\frac{8f_2}{g\pi^2} \right) \frac{L_2}{D_2^5} Q_2 |Q_2| \quad (4.28)$$

$$h_3 = \left(\frac{8f_3}{g\pi^2} \right) \frac{L_3}{D_3^5} Q_3 |Q_3| \quad (4.29)$$

$$h_4 = \left(\frac{8f_4}{g\pi^2} \right) \frac{L_4}{D_4^5} Q_4 |Q_4| \quad (4.30)$$

$$h_5 = \left(\frac{8f_5}{g\pi^2} \right) \frac{L_5}{D_5^5} Q_5 |Q_5| \quad (4.31)$$

$$h_6 = \left(\frac{8f_6}{g\pi^2}\right) \frac{L_6}{D_{65}} Q_6 |Q_6| \quad (4.32)$$

$$h_7 = \left(\frac{8f_7}{g\pi^2}\right) \frac{L_7}{D_{75}} Q_7 |Q_7| \quad (4.33)$$

สมการพลังงานระหว่างอ่างเก็บน้ำ:

$$H_1 + h_p = H_2 + h_1 + h_s - h_2 \quad (4.34)$$

สมการ characteristic curve สำหรับสูบ

$$h_p = A Q_1^2 + B Q_1 + H_0 \quad (4.35)$$

โดยที่ H_1 และ H_2 เป็นพลังงานหรือระดับผิวน้ำของอ่างที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

h_p เป็นพลังงานที่เครื่องสูบน้ำเพิ่มให้แก่ระบบ , เมตร

A,B และ H_0 เป็นค่าคงที่ขึ้นกับเครื่องสูบน้ำ

Step ที่ 3 สมมติขนาดท่อทั้งหมด (D) แล้วแก้สมการใน step ที่ 2 หาค่า Q_j ($j = 1,2,...,7$) , h_j ($j = 1,2,...,7$) และ h_p รวมทั้งหมด 15 ตัวแปร (ซึ่งมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร ดังนั้นจึงสามารถแก้สมการได้)

Step ที่ 4 หาค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำจากสมการพลังงานดังนี้

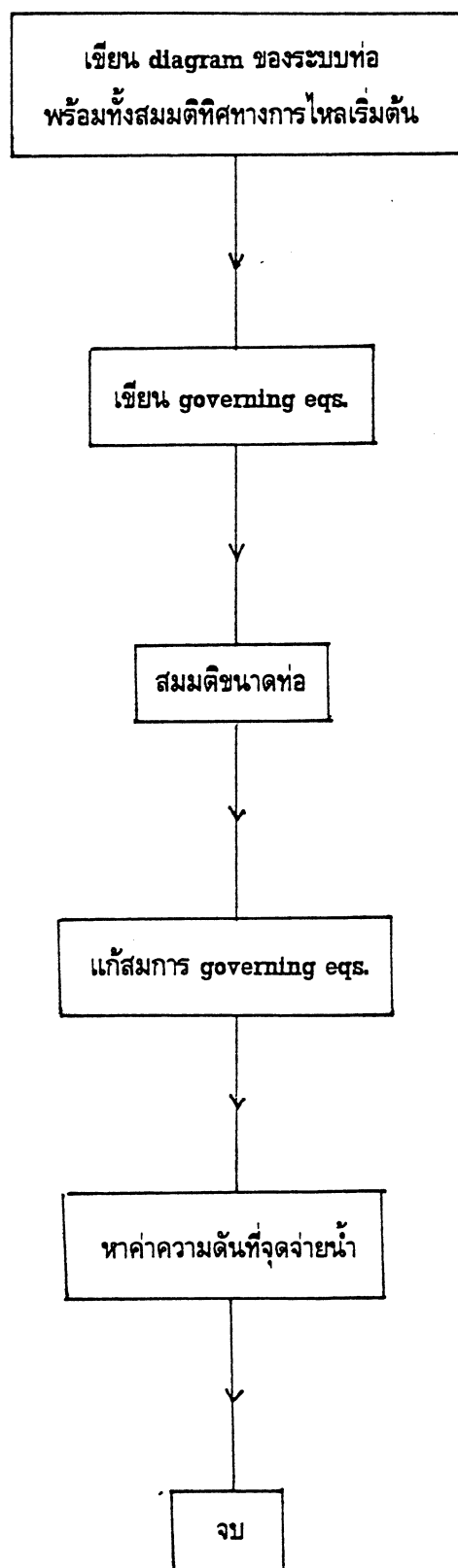
$$H_1 + h_p = H_a + Z_a + h_1 \quad (4.36)$$

$$H_1 + h_p = H_b + Z_b + h_1 + h_3 \quad (4.37)$$

$$H_2 = H_o + Z_o + h_2 \quad (4.38)$$

$$H_2 = H_d + Z_d + h_2 + h_7 \quad (4.39)$$

โดยที่ค่าตัวแปรต่างๆอธิบายไว้แล้ว จากการแก้ปัญหาคาร์ไหลในหัวข้อที่ 4.4 และ 4.5 นี้ ถึงแม้จะมีความแตกต่างของระบบสมการ governing eqs. แต่ขั้นตอนการแก้ปัญหายังคงเป็นขั้นตอนเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการไหลในระบบท่อ