

บทที่ 2

บททวนงานวิจัยที่ผ่านมา

ในบทที่ 1 ได้อธิบายถึงภาพรวมของการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระบบท่อ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ การแก้ปัญหาระบบท่อ (solving pipe network) และการหาระบบท่อที่ถูกที่สุด (determining minimum cost) สำหรับการแก้ปัญหาระบบท่อนั้นทำได้โดยการสมมติขนาดท่อทั้งหมด แล้วแก้สมการ governing ซึ่งมีวิธีแก้หลายวิธี ได้แก่ Hardy Cross Method ,Newton-Raphson Method และ Linear Theory Method ถึงแม้จะมีวิธีแก้สมการอยู่หลายวิธีดังที่ได้กล่าวมาแล้วแต่หลักการก็คือการแก้สมการ governing ซึ่งเป็นสมการแบบ Nonlinear system equations นั้นเอง ในบทนี้จะอธิบายถึงวิธีดังกล่าวโดยสรุป ส่วนการหาระบบท่อที่ถูกที่สุด (determining minimum cost) นั้น เท่าที่รวบรวมมาได้ พบว่ามีวิธีการหาระบบท่อที่ถูกที่สุดอยู่ 2 วิธีใหญ่ๆ คือ วิธีลองผิดลองถูก (trial and error) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้กันมานาน และวิธีโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ (mathematical programming approaches) ซึ่งได้พัฒนาขึ้นมาในช่วงกว่า 2 ทศวรรษที่ผ่านมา โดยใช้หลักการทางโปรแกรมคณิตศาสตร์ มาประยุกต์ใช้เพื่อหาระบบท่อที่ถูกที่สุด ในบทนี้เป็นการรวบรวมงานวิจัยเกี่ยวกับวิธีนี้โดยสรุป และยังได้นำไปกล่าวถึงในบทที่ 5 อีกด้วย ส่วนวิธีลองผิดลองถูกนั้นขอยกไปอธิบายในบทที่ 5 เช่นเดียวกัน

2.1 การแก้ปัญหาระบบท่อ (Solving pipe network)

การแก้ปัญหาระบบท่อคือการคำนวณหาอัตราการไหลและหาการสูญเสียแรงดันในแต่ละเส้นท่อที่อยู่ในระบบ ซึ่งทำได้โดยการสมมติขนาดท่อ แล้วแก้สมการ governing ที่ควบคุมพฤติกรรมการไหลในระบบท่อ ดังนั้นในหัวข้อนี้ขอเสนอวิธีแก้สมการดังกล่าวโดยสรุป

2.1.1 Hardy Cross Method

วิธี Hardy Cross เป็นวิธีเก่าแก่ที่ใช้กันมานานตั้งแต่ยังไม่มีคอมพิวเตอร์ใช้จนมาถึงยุคที่สามารถนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณให้เร็วขึ้น วิธีนี้อาศัยหลักการคำนวณโดยการสมมติตัวเลขแล้วปรับค่าให้ถูกต้อง โดยทั่วไปแล้วสมการ governing จะแบ่งได้เป็น 3 ประเภท คือ

1. การสร้างระบบสมการโดยให้ค่าอัตราการไหลเป็นค่าตัวแปร

2. การสร้างระบบสมการโดยให้ค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำเป็นตัวแปร

3. การสร้างระบบสมการโดยให้ค่าปรับแก้อัตราการไหล (corrective flow rates) เป็นตัวแปร

ซึ่งระบบสมการทั้ง 3 ประเภทนั้นเป็นระบบสมการแบบ nonlinear system equations และสามารถสร้างได้โดยใช้กฎการอนุรักษ์มวล (สมการต่อเนื่อง) กฎการอนุรักษ์พลังงาน และการสูญเสียแรงดันในท่อ มาใช้ร่วมกัน สำหรับวิธี Hardy Cross Method นี้สามารถใช้แก้ระบบสมการทั้ง 3 ประเภทแต่ที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือการนำวิธีนี้ไปแก้ระบบสมการที่มีค่าปรับแก้อัตราการไหลเป็นตัวแปร (ประเภทที่ 3) ซึ่งมีขั้นตอนหลักๆ ดังนี้

1) เขียน diagram ของระบบท่อ และสมมติทิศทางการไหลเริ่มต้น

2) สมมติค่าอัตราการไหลเริ่มต้นโดยให้เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์มวล

3) คำนวณหาค่าปรับแก้อัตราการไหล (ΔQ) ของแต่ละวงรอบแล้วนำไปปรับแก้ค่าอัตราการไหลในข้อที่ 2) จะได้อัตราการไหลค่าใหม่

4) คำนวณซ้ำข้อ 3) จนกระทั่งค่า ΔQ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

เมื่อได้ค่าอัตราการไหลในแต่ละท่อมาแล้วสามารถนำไปหาค่าการสูญเสียแรงดันในท่อ (head loss) แต่ละท่อได้ และจากนั้นก็หาค่าการสูญเสียแรงดันในท่อไปหาค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำได้

ในที่นี้จะไม่ขออธิบายโดยละเอียด สำหรับผู้สนใจสามารถอ่านเพิ่มเติมได้ในหนังสือเกี่ยวกับการวิเคราะห์ระบบท่อที่มีอยู่ทั่วไปได้

2.1.2 Newton-Raphson Method

วิธี Newton-Raphson เป็นวิธีการแก้ nonlinear system eqs. ซึ่งสามารถนำมาแก้ปัญหาเกี่ยวกับระบบท่อได้ วิธีนี้นิยมใช้ในการแก้ระบบสมการที่มีค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำ (ประเภทที่ 2) และระบบสมการที่มีค่าปรับแก้อัตราการไหลเป็นตัวแปร สำหรับการแก้ระบบสมการที่มีค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำเป็นตัวแปรนั้น จะเริ่มด้วยการใช้กฎการอนุรักษ์มวล (สมการต่อเนื่อง) ที่แต่ละจุดต่อของระบบท่อ ซึ่งจะอยู่ในรูปของอัตราการไหล และเมื่อใช้สมการหาการสูญเสียแรงดันในท่อแทนค่าอัตราการไหลในสมการต่อเนื่องดังกล่าวจะได้สมการใหม่ที่อยู่ในรูปของค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำ เมื่อใช้หลักการของวิธี Newton-Raphson มาแก้ระบบสมการแล้วสามารถหาค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำได้ และสามารถหาค่าความดันดังกล่าวไปหาค่า head loss และอัตราการไหลได้ ส่วนการแก้ระบบสมการที่ให้ค่าปรับแก้อัตราการไหลเป็นตัวแปรก็ใช้หลักการเดียวกัน

สำหรับผู้สนใจสามารถอ่านได้ใน Jeppson และ Walski ซึ่งให้ไว้ในบรรณานุกรมท้ายเล่มแล้ว

2.1.3 Linear Theory Method

วิธี Linear theory มักจะนำไปแก้ระบบสมการที่มีอัตราการใช้พลังงานเป็นตัวแปร ระบบสมการดังกล่าวสามารถสร้างได้โดยการใช้กฎการอนุรักษ์มวลที่จุดต่อ ซึ่งจะอยู่ในรูปอัตราการใช้พลังงานและเป็นระบบสมการเชิงเส้น (Linear system eqs.) และกฎการอนุรักษ์พลังงานภายในวงจร ซึ่งอยู่ในรูปการสูญเสียแรงดันในท่อ เมื่อแทนสมการหาการสูญเสียแรงดันในท่อลงในสมการพลังงานจะได้ค่าอัตราการใช้พลังงานเป็นตัวแปร แต่ระบบสมการดังกล่าวจะเป็น Nonlinear system eqs. และเมื่อใช้วิธี Linear theory มาใช้จะแปลงระบบสมการ Nonlinear ให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นต่อจากนั้นสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นหาค่าอัตราการใช้พลังงานได้ จากค่าอัตราการใช้พลังงานสามารถนำไปหาการสูญเสียแรงดันและค่าความดันที่จุดจ่ายน้ำได้

สำหรับรายละเอียดสามารถอ่านเพิ่มเติมได้ใน Jeppson และ Walski

2.2 ทบทวนงานวิจัยที่ผ่านมา

จากการพัฒนาเทคโนโลยีทางด้านคอมพิวเตอร์ฮาร์ดแวร์และฮาร์ดแวร์ ในขณะเดียวกันก็ได้มีการพัฒนาเกี่ยวกับเทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุด (optimization techniques) หรือ การโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ (mathematical programming) ทำให้มีการนำวิธีดังกล่าวมาประยุกต์ใช้เพื่อหาค่าระบบท่อที่ถูกต้องที่สุด

ในหัวข้อนี้จะเป็นการสรุปงานวิจัยที่มีผู้ศึกษาเกี่ยวกับการออกแบบระบบท่อที่ถูกต้องที่สุดซึ่งเป็นวิธีโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น ผลงานวิจัยดังกล่าวไว้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงผู้ทำการศึกษาและวิธีการแก้ปัญหา

ผู้ศึกษา	วิธีการแก้ปัญหา
Jacoby (1968)	Nonlinear Programming and Algorithm
Deb and Sakar (1971)	The equivalent diameter method
Cembrowicz and Harrington (1973)	Nonlinear programming and Algorithm
Lam (1973)	NLP and Discrete Gradient Optimization Algorithm
Watanatada (1973)	NLP and Sequential Minimization Algorithm
Alperovits and Shamir (1977)	Linear Programming Gradient Method
Cenedese and Mele (1978)	Nonlinear Programming and Algorithm
Bhave (1979)	Linear Programming and Critical Path Concept
Bhave (1983)	LP and Classical Transportation Problem Principles
Morgan and Goulter (1985)	Heuristic Linear Programming
Goulter และคณะ (1986)	Modified Linear Programming Gradient Method
Fujiwara (1987)	Modified Linear Programming Gradient Method
Kessler and Shamir (1989)	Matrix Formulation and Modified LPG Method
Lansey and Mays (1989)	Nonlinear programming and Algorithm
Fujiwara and Khang (1990)	Two-Phase Decomposition Method
Bhave and Sonak (1992)	วิเคราะห์วิธี LPG
Eiger และคณะ (1994)	Two-stage Decomposition Model
Loganathan และคณะ (1995)	The outer flow search-inner optimization procedure

สำหรับรายละเอียดของงานวิจัยที่แสดงในตารางที่ 2.1 มีดังนี้

- **Jacoby (May,1968)** ได้ตั้งปัญหา (formulate) โครงข่ายทางชลศาสตร์ (hydraulic network) ขึ้นเป็นแบบ Non-linear Programming (NLP) ซึ่งมี Constraints เป็นทั้งแบบ equality และ inequality หลังจากนั้นได้ทำปัญหา NLP แบบที่มี Constraints เป็นแบบไม่มี Constraints โดยการรวม Constraints

ทั้งหมดเข้ากับ Cost function (objective function) เดิม แล้วจึงใช้วิธี Penalty Function แก้ปัญหา NLP แบบไม่มี Constraints เขาสรุปว่าวิธีนี้เหมาะสำหรับวิศวกรที่มีประสบการณ์ (ตัดสินใจได้ดี)

- **Deb and Sarkar (April, 1971)** ได้เสนอวิธีการ Optimization ในการออกแบบโครงข่ายทางชลศาสตร์ เขาได้แบ่งการ Optimization เป็น 2 ขั้นตอนคือ

- 1) optimization in the analysis
- 2) optimization in the design

ในงานวิจัยขั้นนี้เขาได้พัฒนา pressure surface profiles สำหรับปัญหาหนึ่งๆ ขึ้นมาซึ่งในจำนวนนี้จะมีเพียง surface เดียวที่ให้ค่า cost ต่ำที่สุด และยังได้เสนอวิธีการหา ระดับความสูงของอ่างเก็บน้ำ (height of reservoir) ที่ให้ค่า cost ต่ำที่สุดด้วย

ในขั้นตอน Optimization ในการวิเคราะห์นั้น เขาได้ใช้วิธี Equivalent Diameter เพื่อหาขนาดท่อที่ประหยัด สำหรับระดับของอ่างเก็บน้ำ และ pressure surface profile ที่สมมติขึ้น

นอกจากนี้เขายังได้พัฒนาสมการหา Correction factor ขึ้นมาเพื่อเพิ่มเข้าไปกับค่าอัตราการไหลที่สมมติตอนเริ่มต้นเพื่อให้เข้าสู่คำตอบเร็วขึ้น

ในขั้นตอน Optimization ในการออกแบบ เขาได้เสนอวิธีหา optimum pressure surface profile และ ระดับของอ่างเก็บน้ำที่เหมาะสม ในรูปของกราฟซึ่งจะทำให้ได้ค่า cost ต่ำที่สุด

- **Cembrowicz and Harrington (March, 1973)** ได้ formulate ปัญหา Optimization of hydraulic network เป็นแบบ Non-linear programming ซึ่งมี Objective Function เป็นแบบ nonconvex cost function เขาได้ใช้ Graph Theory เพื่อแบ่งปัญหาออกเป็นกลุ่มของ nonlinear convex function ที่มี Constraints เป็นแบบ linear function หลายๆ กลุ่ม ซึ่ง linear function เหล่านั้นอยู่ในรูปของ head losses ในท่อ หลังจากนั้นเขาได้ใช้ Standard Nonlinear Programming Algorithms ในการแก้ปัญหา Optimization

- **Lam (June, 1973)** ได้ใช้ Discrete Gradient Optimization Algorithm ในการแก้ปัญหา Optimization of pipe network design วิธีนี้มีสมมติฐานดังนี้คือ

- 1) บริเวณของคำตอบที่เป็นไปได้มีอยู่จริง (A feasible solution region exists)
- 2) รูปร่างของระบบท่อถูกกำหนดไว้แล้ว

ในการ formulate ปัญหาเป็นแบบ Non-linear Programming จะใช้ค่า diameter ของท่อ เป็น discrete decision variables และให้ flow และ head loss เป็น continuous state variables สำหรับ Objective Function สามารถสร้างฟังก์ชันขึ้นมาในรูปของ Diameter ซึ่ง Objective Function เป็นแบบ

discrete cost of objective function สำหรับ Constraints เป็นแบบ Equality Constraints ซึ่งเรียกว่า System Equations เขาได้ใช้วิธี Newton-Ralphson แก้สมการ System Equations เหล่านี้

- **Watanatada (Sep.,1973)** เสนอ A computer-based automatic design method เพื่อหา รูปร่างของระบบโครงข่าย (network configuration) , diameters และ pumping pressure ที่ให้ค่า Cost ต่ำที่สุด เขาได้ Formulate ปัญหาขึ้นมาเป็นแบบ Non-linear Programming ซึ่งมี Cost Function ที่ประกอบด้วย ราคาของท่อ และ ค่าใช้จ่ายในการส่งน้ำ Cost Function จะอยู่ในรูปของ diameters, pressure head และอัตราการไหลในท่อ โดยมี Constraints ที่ประกอบด้วย Equality และ Inequality Constraints

เขาได้ลดความยุ่งยากของปัญหาโดยการทำให้ปัญหา NLP แบบที่มี Constraints เป็นแบบที่ไม่มี Constraints เขาใช้วิธีของ Box ในการกำจัด Inequality Constraints และวิธีของ Haarhoff และ Buys กำจัด Equality Constraints จากวิธีการทั้งสองซึ่งทำให้ Constraints ทั้งสองชนิดไปรวมกับ Cost Function เดิมกลายเป็นฟังก์ชันใหม่ขึ้นมาเรียกว่า Sequential Function หลังจากนั้นได้ใช้ Sequential Minimization Algorithm แก้ปัญหา NLP แบบไม่มี Constraints

- **Alperovits and Shamir (Dec.,1977)** ได้เสนอวิธี Linear Programming Gradient (LPG) ในการออกแบบระบบจ่ายน้ำที่เหมาะสม เขาได้แบ่งการแก้ปัญหาออกเป็น 2 ขั้นตอน และแก้ปัญหาในลักษณะทำซ้ำ (Iteration) คือ

- 1) Gradient เป็นการหาการเปลี่ยนแปลงอัตราการไหล ที่ทำให้ได้ค่า Cost ต่ำที่สุด
- 2) Linear Programming (LP) เป็นการแก้ปัญหา LP ที่ได้จากการนำอัตราการไหล ในข้อ 1) มา formulate ปัญหา

ในงานวิจัยชิ้นนี้ เขาเริ่มต้นอธิบายวิธีใช้ LP ในการแก้ปัญหาระบบท่อแยก (branching system) โดยมี objective function เป็นผลรวมของราคาท่อ และ Constraints ดังนี้

1. pressure constraints เป็น constraints ที่ทำให้ได้ค่า pressure ที่ demand node อยู่ระหว่างค่าที่กำหนด
2. lenght constraints เป็น constraints ที่ป้องกันไม่ให้ความยาวของท่อกว่าความยาวของช่วงความยาวระหว่าง node (link)

3. non-negativity constraints เพื่อไม่ให้ค่าความยาวของท่อในคำตอบที่เหมาะสมเป็นลบ
ต่อจากนั้นได้อธิบายวิธีการพัฒนาวิธี LPG เขาได้เสนอสมการ Gradient เพื่อหาค่า Gradient Vector ของ flows และ formulate ปัญหาเป็นแบบ Nonlinear Programming โดยมี flows เป็น decision variable แล้วใช้วิธี Gradient Search ในการแก้ปัญหา NLP โดยใช้วิธี steepest descent direction ในการหา

search direction และใช้วิธี fixed step size ในการหา step size จากปัญหา NLP จะได้คำตอบเป็น อัตราการไหลในท่อ เมื่อได้อัตราการไหลแล้วก็นำไป formulate ปัญหา LP เพื่อหาค่าขนาดและความยาวท่อที่เหมาะสมแต่การแก้ปัญหามันต้องเลือกช่วงขนาดท่อไว้ก่อน

- **Cenedese and Mele (Feb.,1978)** ใช้สมการ continuity และสมการ head loss มา formulate ปัญหา เขาเริ่มต้นกล่าวถึง objective function โดยใช้ monomial formula ในการหาค่า unit cost ของท่อ เขานำสมการ head loss ซึ่งอยู่ในรูปของ head loss, diameter, flow และความยาวของท่อ มาทำให้อยู่ในรูปของ diameter แล้วแทนค่าลงใน objective function เขาใช้วิธี Hardy Cross แก้สมการ continuity ได้ค่า flow ในเส้นท่อและ circulation flow ใน loop (อยู่ในรูปสมการ) จากนั้นก็นำไปแทนใน objective function ได้ objective function ใหม่ขึ้นมา จากนั้นก็เห็นว่า ทิศทางการไหลจะต้องสอดคล้องกับทิศทางของ head loss เขาได้นำ penalty function เข้ามาใน objective function แล้วจัดรูปสมการใหม่ หลังจากนั้นเขาได้นำ weighting factor ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 เข้าไปรวมกับ objective function แล้วจัดรูปใหม่กลายเป็นปัญหา Optimization แบบไม่มี Constraints

เขาได้เสนอ Algorithm ซึ่งปรับปรุงจาก Graph Theory ที่ Cembrowicz และ Harrington เคยนำมาใช้แก้ปัญหา Optimization นี้

- **Bhave (Aug.,1979)** ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหามันในระบบท่อแยก (branching system) เขาพบว่าจากปัญหา Optimization โดยใช้ LP ในระบบท่อแยกนั้น คำตอบของปัญหามันจะมีขนาดท่อเพียงหนึ่งหรือสองกลุ่มขนาดท่อเท่านั้น ในช่วงความยาวระหว่าง node ช่วงหนึ่งๆ ดังนั้นในช่วงระหว่าง node ช่วงหนึ่งๆ นั้นจะมีกลุ่มขนาดท่อเพียงแค่อันหนึ่งหรือสองกลุ่มเท่านั้น ขนาดท่ออื่นเป็นศูนย์ (ไม่นำมาใช้)

จากคุณสมบัติเหล่านี้ กลุ่มของขนาดท่อเหล่านี้จะถูกนำมาใช้ในปัญหา LP โดยที่เขาเสนอวิธีแก้ปัญหามันเป็น 2 ขั้นตอนคือ

- 1) ใช้ Critical Path Concept ช่วยในการหา optimal sets of pipe sizes
- 2) นำ optimal sets of pipe sizes จากข้อ 1) มา formulate ปัญหา LP

จากขั้นตอนการแก้ปัญหามันจะทำให้การแก้ปัญหามัน LP ในขั้นตอนที่ 2) ลดความยุ่งยากลงมาก เพราะไม่ต้องพิจารณาขนาดท่ออื่นๆ ที่ไม่จำเป็น

ในปัญหา LP เขาใช้ความยาวท่อเป็น decision variables และ objective function คือผลรวมของราคาท่อที่ใช้ โดยมี Constraints คือ

- 1) ผลรวมของความยาวท่อทุกท่อในช่วงหนึ่งๆ เท่ากับความยาวช่วงระหว่าง node นั้นๆ
- 2) ค่า HGL จะต้องเท่ากับหรือมากกว่าค่า HGL ที่กำหนด ที่ demand node หนึ่งๆ
- 3) ความยาวของท่อต้องมีค่าเป็นบวก

- **Bhave (1983)** ได้เสนอวิธีการ Optimization ระบบโครงข่ายโดยใช้วิธี LP

วิธีนี้มีสมมติฐานดังนี้

1. รูปร่างของระบบโครงข่ายถูกกำหนดไว้แล้ว
2. รู้ความต้องการน้ำที่ demand nodes ต่างๆ
3. รู้ค่า Hydraulic Gradient Level (HGL) ที่ต่ำที่สุดที่ต้องการ
4. ค่า diameters เป็น continuous variables
5. unit cost ของท่อมีความสัมพันธ์แบบ nonlinear กับค่า diameter

เขาเริ่มต้นด้วยการ derive หา Design Feasibility Constraints เพื่อ check ว่า network design และ network optimization มีคำตอบที่เป็นไปได้หรือไม่

Design Feasibility Constraints ประกอบด้วย

- 1) network demand constraints
- 2) group demand constraints
- 3) transportation constraints

จากพื้นฐานของ classical transportation problem principles ซึ่งใช้ในปัญหาเกี่ยวกับการส่งสินค้าจากโรงงานไปยังโกดังสินค้าของลูกค้า นำมาใช้ในการพัฒนาทฤษฎีที่ใช้ formulate ปัญหา Transportation Linear Programming เพื่อหา Design Path (จาก source nodes ไปยัง demand nodes) และจาก design path สำหรับ demand node แต่ละ node จะได้ design path หลายๆ เส้นทาง เมื่อนำมารวมกันจะได้ design distribution graph (สำหรับโครงข่ายทั้งหมด) เมื่อได้ design distribution graph แล้วก็ formulate ปัญหา LP ขึ้นมาเพื่อหาค่า Minimum Cost of Network

- **Morgan and Goulter (May, 1985)** ได้เสนอวิธี heuristic linear programming ที่ใช้ออกแบบระบบจ่ายน้ำโดยแบ่งการแก้ปัญหออกเป็น 2 ส่วนคือ

1) Network Solver เป็นการแก้สมการหา flows and heads distribution โดยใช้วิธี Hardy Cross

2) Linear Programming ใช้ในการปรับเปลี่ยนขนาดท่อเพื่อให้ได้ cost ที่ต่ำที่สุด

ในการแก้ปัญหจะเป็นลักษณะทำซ้ำกลับไปกลับมา (Iterations) ระหว่างขั้นตอนที่ 1) และ 2) จนกว่าจะได้คำตอบที่ดีที่สุด (cost ต่ำที่สุด)

ในงานชิ้นนี้เขาเริ่มด้วยการพัฒนา Model ในการออกแบบ pipe network โดยมี objective function ที่อยู่ในรูปของราคาท่อ สำหรับ constraints แบ่งได้ดังนี้

1. pressure constraints เพื่อให้ระบบสามารถจ่ายน้ำได้ pressure ที่ demand nodes ไม่ต่ำกว่าค่าที่ต้องการ ใน constraints นี้เขายังได้ใช้ weighting factor เพื่อเลือก path (แนวเส้นทางท่อที่นำน้ำจาก source ไปยัง demand node) ที่ทำให้ได้คำตอบของปัญหาเร็วขึ้น

2. lenght constraints เป็น constraints ที่จะป้องกันไม่ให้เลือกความยาวท่อยาวกว่าช่วงความยาวระหว่าง node (link)

3. non-negativity constraints เป็น constraints ที่ทำให้ได้ค่าความยาวท่อเป็นบวก

-Goulter, Lussler, and Morgan (May, 1986) พวกเขาได้ตั้งคำถามว่า การออกแบบ pipe network โดยใช้วิธี LPG Method ที่ Shamir (1977) เสนอนั้นจะสามารถปรับปรุงให้ได้ cost ที่ต่ำกว่าเดิมได้หรือไม่ โดยการเปลี่ยน paths ที่ใช้ในการสร้าง pressure constraints

พวกเขาได้ทำการแก้ปัญหาใหม่ โดย formulate ปัญหาขึ้นมาใหม่ 2 ปัญหา โดยการเปลี่ยน paths ใน pressure constraints เมื่อเปรียบเทียบกับทั้ง 3 คำตอบจากปัญหาเดิมและปัญหาใหม่ 2 ปัญหา พบว่า paths ที่มี flows ไหลผ่านสูงที่สุดเมื่อนำไปสร้าง pressure constraints จะให้ cost ที่ต่ำที่สุด

- Fujiwara (June, 1987) ได้ปรับปรุงวิธี Linear Programming Gradient (LPG) Method ของ Alperovits and Shamir (1977) เขาเริ่มต้นด้วยการอธิบายการ formulate ปัญหาและสมการ Gradient ที่อยู่ใน paper ของ Alperovits and Shamir (1977) หลังจากนั้นเขาให้เหตุผลว่า สมการ Gradient ของ Alperovits and Shamir (1977) ยังไม่ถูกต้อง เขาจึงได้ปรับปรุงให้ถูกต้องยิ่งขึ้น

เขาได้อธิบายวิธี Modified LPG ซึ่งหลักการยังคงเป็นวิธี LPG แบบดั้งเดิม แต่เปลี่ยนวิธีการหา search direction จากวิธี steepest descent เป็นวิธี quasi-Newton search direction และเปลี่ยนวิธีการหา step size จาก fixed step size method เป็นวิธี backtracking line search เขาได้ใช้ตัวอย่างใน paper ของ Alperovits and Shamir (1977) เป็นตัวอย่าง ซึ่งผลออกมาปรากฏว่าผลการคำนวณ converge เข้าสู่ปัญหาเร็วกว่าวิธี LPG แบบดั้งเดิม

- Kessler and Shamir (July, 1989) ได้วิเคราะห์วิธี LPG ที่เสนอโดย Alperovits and Shamir (1977) ซึ่งวิธีนี้แบ่งเป็น 2 ขั้นตอนคือ

1) แก้ปัญหา LP ที่ formulate จาก flow distribution

2) gradient search ในการหาอัตราการไหล จาก the gradient of objective function (GOF)

ในงานชิ้นนี้เขาได้ใช้ Matrix Formulation ในขั้นตอนทั้งสอง โดยที่ Matrix Formulation มีพื้นฐานมาจาก Graph Theory Matrices หลังจากนั้นเขาได้แสดงวิธีการเลือก Loop and Path Constraints ที่ใช้ในวิธี LPG แบบดั้งเดิม เขาได้เสนอวิธี formulate Head Constraints ขึ้นมาในรูปของ Matrix หลัง

จากนั้นเขาได้พิสูจน์ว่า GOF Expression ไม่ขึ้นกับกลุ่มของ Loop and Path Constraints ที่ formulate ขึ้นมา ในการหา search direction เขายังคงใช้วิธีเดิมคือ steepest descent แต่เปลี่ยนวิธีหา step size เป็น projected gradient method

- **Lansey and Mays (1989)** ได้ formulate ปัญหา Optimization of pipe network เป็นแบบ Nonlinear Programming ซึ่งได้แบ่งการแก้ปัญหาเป็น 2 ส่วนคือ

- 1) Simulation Model ซึ่งใช้แก้สมการ pipe network
- 2) Optimization Model ซึ่งเป็นการหา cost ที่ต่ำที่สุด

การแก้ปัญหามันจะเป็นลักษณะ Iterative คือทำซ้ำไปซ้ำมาจนกว่าจะได้คำตอบที่เหมาะสม เขาเริ่มด้วยการ formulate ปัญหา ซึ่งมี objective function อยู่ในรูปของ head และ diameter ซึ่งเป็น decision variables

Constraints ทั้งหมดประกอบด้วย

1. Conservation of flow constraints เป็น constraints ที่ทำให้ระบบเป็นไปตาม Conservation of Mass Law
2. Energy equations (loop equation) เป็น constraints ที่บังคับให้ระบบเป็นไปตาม Conservation of Energy Law
3. Head bounds constraints เพื่อให้ head ที่ demand nodes อยู่ระหว่างค่าที่กำหนด
4. Design constraints เป็น constraints ที่บังคับให้ระบบเป็นไปตามข้อกำหนดในการออกแบบ
5. General constraints เป็น constraint ที่ทำให้ระบบเป็นไปตามข้อกำหนดที่ผู้ออกแบบระบบกำหนดเพิ่มเติมจากข้อกำหนดในข้อ 4.

เขาได้ใช้วิธี Generalized Gradient Method เพื่อลดความยุ่งยากของปัญหาลงโดยการกำจัด constraints ในข้อ 1 และ 2 โดยใช้ Simulation Model ในการแก้ปัญหา pipe network ในการแก้ปัญหapipe network เขาใช้ program สำเร็จรูปชื่อ KYPIPE สำหรับหา flow and pressure distributions

หลังจากนั้นเขาใช้วิธี augmented Lagrangian penalty function method เพื่อให้ constraints ในข้อ 3,4 และ 5 ไปรวมอยู่ใน objective function ทำให้ปัญหากลายเป็น Unconstrained Nonlinear Optimization เขาได้เสนอ Algorithm ในการแก้ปัญหานี้

- **Fujiwara and Khang (April,1990)** ได้เสนอวิธี Two-Phase Decomposition Method ในการออกแบบระบบจ่ายน้ำ วิธีนี้เป็นวิธีการแก้ปัญหาแบบ Iteration โดยแต่ละ step ในการแก้ปัญหามันจะแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน หรือ 2 phase ดังนี้

1. First Phase ซึ่งหาค่า head losses จากค่า flow และ pumping head ที่กำหนดให้
2. Second Phase ซึ่งนำค่า head losses จาก first phase เพื่อหาค่า flow และ pumping head เพื่อให้ได้ cost ต่ำที่สุด

เขาเริ่มต้นด้วยการ formulate ปัญหาขึ้นมาใหม่ โดยมี objective function อยู่ในรูปของ flow, pumping head และ head loss ในปัญหานี้มี Constraints ดังนี้

- 1) Flow balance at each node
- 2) Head loss balance along each loop
- 3) The hydraulic head requirement at each node
- 4) Bounding constraints เป็น constraints ที่บังคับให้ระบบเป็นไปตามข้อกำหนดในการออกแบบ
- 5) Hazen-Williams equations

ใน first phase เขาได้เสนอวิธี nonlinear programming gradient (NLPG) method ซึ่งปรับปรุงจาก LPG method ที่เสนอโดย Alperovits and Shamir (1977) วิธี NLPG นี้ให้ flow และ pumping head เป็น decision variables หลังจากนั้นก็ใช้สมการ gradient เพื่อหา flow และ pumping head ค่าใหม่ที่ทำให้ cost ของระบบต่ำลง จาก first phase นี้จะได้ค่า head loss นำค่า head loss นี้ไปใช้ใน second phase ซึ่งเป็นขั้นตอนการปรับปรุง Local Optimal Solution เพื่อให้ได้ค่าที่ใกล้เคียงกับ Global Optimal Solution มากขึ้น และจาก second phase ก็จะได้ค่า flow และ pumping head ค่าใหม่ที่ทำให้ cost ของระบบลดลง หลังจากนั้นก็นำค่า flow และ pumping head นี้ไปใช้ใน first phase อีกครั้งหนึ่ง ทำตามขั้นตอนนี้ไปจนกว่าจะได้ cost ที่ต่ำที่สุด

Bhave and Sonak (June, 1992) ได้ทำการวิเคราะห์วิธี LPG ที่เสนอโดย Alperovits and Shamir (1977) โดยได้เริ่มอ้างถึงผู้ที่ได้ศึกษาวิธีนี้ในการแก้ปัญหา water distribution system และรายละเอียดที่แตกต่างกันของแต่ละคน ต่อมาเขาได้ทำการศึกษา local optimum solutions ที่มีผู้ทำไว้ดังที่ได้อ้างถึงก่อนหน้านี้ซึ่งมี Alperovits and Shamir (1977), Quindry (1979), Goulter (1986), Fujiwara (1987) และ Kessler and Shamir (1989) โดยพบว่าคำตอบของ Kessler and Shamir ให้ค่า cost ต่ำที่สุด และเป็นวิธีที่นำไปสู่ local optimum solutions ที่แท้จริง

ต่อมาเขาได้วิเคราะห์วิธี LPG โดยใช้ตัวอย่างเป็น one-loop network ซึ่งเขาพบว่าวิธี LPG ไม่มีประสิทธิภาพพอ เมื่อเปรียบเทียบกับ heuristic method ที่ Bhave (1978) เสนอมา

หลังจากนั้นเขาได้ศึกษาปรัชญาของวิธี LPG (Philosophy of LPG Method) และพบว่าถึงแม้ใช้วิธี LPG กับปัญหาเดียวกันและเริ่มสมมติ initial solution เดียวกันแต่จะให้คำตอบไม่เท่ากัน โดยเขาได้อธิบายถึงสาเหตุว่าคำตอบของวิธีนี้ขึ้นอยู่กับ

- 1) การสมมติ flows เริ่มต้น
- 2) การหา Gradient of Objective Function (GOF) direction
- 3) การหา GOF step size

-Elger ,Shamir ,and Ben-Tal (Sep.,1994) ได้เสนอว่า Standard optimization model ไม่สามารถแก้ปัญหาแบบ optimal design ทั่วไปที่มีความซับซ้อนได้ พวกเขาจึง formulate ปัญหาเป็นแบบ two-stage decomposition model ซึ่งส่วนแรกจะ formulate ปัญหาหลัก (the master or outer problem) เป็น nonsmooth and nonconvex optimization และ แก้ปัญหารอง (the inner problem) เป็น linear

พวกเขาเริ่มต้นด้วยการ formulate ปัญหาตามวิธีที่ Kessler and Shamir (1989) เสนอขึ้นมา หลังจากนั้นก็ทำการ formulate Dual problem จากปัญหาเดิมโดยใช้ lagrangian duality ทำให้ลดความยุ่งยากของปัญหาลง และสามารถหา local optimum solutions ได้ ต่อจากนั้นพวกเขาได้เสนอ Branch and Bound Type Algorithm ซึ่งจะลดช่องว่างระหว่างค่า local optimum กับค่า global optimum ให้น้อยที่สุด ซึ่งจะทำได้คำตอบที่ใกล้กับ global optimum solutions มากที่สุด

-Loganathan ,Greene ,and Ahn (March,1995) ได้มีความพยายามที่จะหา global minimum cost สำหรับ water-distribution system พวกเขาได้พิจารณาปัญหาเป็นแบบ two standard test problem ซึ่งเป็น nonconvex ที่มี multiple local minima และได้เสนอ the outer flow search-inner optimization procedure ในการเลือก local minima ที่ดีที่สุด

โดยใน outer flow search พวกเขาได้ใช้วิธีการหา feasible flows 2 วิธีด้วยกันคือ

- 1) Multistart local search
- 2) Simulated annealing

เมื่อได้ local optimum flows หลายๆคำตอบแล้วก็จะนำค่า flows เหล่านี้ไป formulate ปัญหาเป็นแบบ LP ใน inner problem เพื่อหาขนาดท่อ และ hydraulic head ที่ให้ค่า cost ต่ำที่สุด

เขาได้เปรียบเทียบวิธีนี้กับวิธีของ Fujiwara (1987) และ Loganathan (1990) พบว่าได้คำตอบที่ดีกว่า (cost ต่ำกว่า)