

บทที่ 4

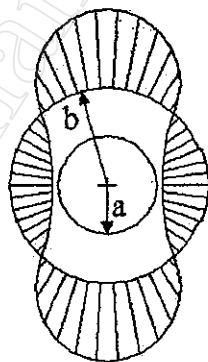
ผลและการวิจารณ์

4.1 ผลการวิจัย

4.1.1 ผลการวิจัยจากวิธีการวิเคราะห์จากฟังก์ชันความเค้น

1) การหาค่าการเคลื่อนตัวของวงแหวน และทำการหาค่าการเคลื่อนตัวที่ขอบนอกของวงแหวน

ในการวิเคราะห์ปัญหาจะทำการแยกชิ้นส่วน โดยแยกเป็นวงแหวนรัศมีภายใน a และรัศมีภายนอก b ซึ่งเมื่อแยกชิ้นส่วนเพื่อทำการวิเคราะห์ ที่ขอบนอกของวงแหวนจะเกิดความเค้นที่เกิดขึ้นจากการแยกส่วนของวงแหวนออกจากแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม ดังแสดงในรูป 4.1 สำหรับวิธีการวิเคราะห์จะทำการกำหนดค่าที่ขอบนอกที่เกิดจากการแยกชิ้นส่วน โดยคูณค่า A และ ค่า B เข้ากับค่าที่ได้จากสมการของ Kirsh โดยแทนรัศมีเท่ากับขอบนอกของวงแหวน ทำการเลือกใช้ค่าฟังก์ชันความเค้นที่เหมาะสม และทำการหาค่าความเค้นที่ได้



รูป 4.1 วงแหวนรับความเค้นที่เกิดขึ้นจากการแยกส่วนออกจากแผ่นระนาบกว้าง

ทำการพิจารณาวงแหวนรัศมีภายใน a และรัศมีภายนอก b มีความเค้นที่เกิดขึ้นจากการแยกชิ้นส่วนปัญหา ที่ขอบนอกของวงแหวน

ค่าที่ขอบ

$$r_1 = a :$$

$$\sigma_{r1} = 0$$

$$\tau_{r\theta1} = 0$$

(4.1)

$$r_1 = b :$$

$$\sigma_{r1} = \left(A \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right) + \left(B \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{b^4} - \frac{4a^2}{b^2} \right) \cos 2\theta_1 \right) \quad (4.2)$$

$$\tau_{r\theta1} = -B \frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2} \right) \sin 2\theta_1$$

โดยที่

ตัวพ่วงล่าง 1 คือ ค่าต่างๆของวัตถุส่วนที่ 1 (แหวนกลม รัศมีภายใน a รัศมีภายนอก b)

เพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมที่เป็นวัสดุเดียว จึงเลือกใช้ฟังก์ชันความเค้นเหมือนกับที่ใช้ในปัญหาแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมที่เป็นวัสดุเดียว คือ

$$\Phi = f_1(r_1) + f_2(r_1) \cos 2\theta_1 \quad (4.3)$$

โดย

$$f_1(r_1) = c_{11} r_1^2 \ln r_1 + c_{12} r_1^2 + c_{13} \ln r_1 + c_{14}$$

$$f_2 = c_{15} r_1^2 + c_{16} r_1^4 + \frac{c_{17}}{r_1^2} + c_{18}$$

ทำการหาค่าความเค้นในพิกัดเชิงขั้ว โดยหาค่ามาจากฟังก์ชันความเค้น ได้

$$\sigma_{r1} = c_{11} (1 + 2 \ln r_1) + 2 c_{12} + \frac{c_{13}}{r_1^2} - \left(2 c_{15} + \frac{6 c_{17}}{r_1^4} + \frac{4 c_{18}}{r_1^2} \right) \cos 2\theta_1 \quad (4.4)$$

$$\sigma_{\theta1} = c_{11} (3 + 2 \ln r_1) + 2 c_{12} - \frac{c_{13}}{r_1^2} + \left(2 c_{15} + 12 c_{16} r_1^2 + \frac{6 c_{17}}{r_1^4} \right) \cos 2\theta_1 \quad (4.5)$$

$$\tau_{r\theta1} = \left(2 c_{15} + 6 c_{16} r_1^2 - \frac{6 c_{17}}{r_1^4} - \frac{2 c_{18}}{r_1^2} \right) \sin 2\theta_1 \quad (4.6)$$

ทำการพิจารณาค่าความเค้นที่ได้ เพื่อให้เข้ากับค่าที่ขอบและง่ายต่อการแก้สมการ จึงให้กำหนดให้ $c_{11} = c_{16} = 0$ จะได้สมการความเค้นคือ

$$\sigma_{r1} = 2c_{12} + \frac{c_{13}}{r_1^2} - (2c_{15} + \frac{6c_{17}}{r_1^4} + \frac{4c_{18}}{r_1^2}) \cos 2\theta_1 \quad (4.7)$$

$$\sigma_{\theta 1} = 2c_{12} - \frac{c_{13}}{r_1^2} + (2c_{15} + \frac{6c_{17}}{r_1^4}) \cos 2\theta_1 \quad (4.8)$$

$$\tau_{r\theta 1} = (2c_{15} - \frac{6c_{17}}{r_1^4} - \frac{2c_{18}}{r_1^2}) \sin 2\theta_1 \quad (4.9)$$

ทำการแทนค่าที่ขอบ ในสมการความเค้น (4.7), (4.8) และ (4.9) ได้
ที่ $r_1 = a$

$$2c_{12} + \frac{c_{13}}{a^2} = 0$$

$$2c_{15} + \frac{6c_{17}}{a^4} + \frac{4c_{18}}{a^2} = 0$$

$$2c_{15} - \frac{6c_{17}}{a^4} - \frac{2c_{18}}{a^2} = 0$$

ที่ $r_1 = b$

$$2c_{12} + \frac{c_{13}}{b^2} = \frac{AS}{2} - \frac{AS}{2} \frac{a^2}{b^2}$$

$$-(2c_{15} + \frac{6c_{17}}{b^4} + \frac{4c_{18}}{b^2}) = \frac{BS}{2} (1 + \frac{3a^4}{b^4} - \frac{4a^2}{b^2})$$

$$2c_{15} - \frac{6c_{17}}{b^4} - \frac{2c_{18}}{b^2} = -\frac{BS}{2} (1 - \frac{3a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2})$$

ได้ค่าคงที่ต่างๆ คือ

$$c_{12} = \frac{AS}{4}, \quad c_{13} = -\frac{AS}{2} \frac{a^2}{b^2}, \quad c_{15} = -\frac{BS}{4}, \quad c_{17} = -\frac{BS}{4} \frac{a^4}{b^4}, \quad c_{18} = \frac{BS}{2} \frac{a^2}{b^2}$$

ทำการแทนค่าคงที่ที่ได้ในสมการ (4.7), (4.8) และ (4.9) ได้ค่าความเค้นของวงแหวน คือ

$$\sigma_{r1} = \frac{AS}{2} - \frac{a^2 AS}{2r_1^2} - (-\frac{BS}{2} - \frac{3a^4 BS}{2r_1^4} + \frac{2a^2 BS}{r_1^2}) \cos 2\theta_1 \quad (4.10)$$

$$\sigma_{\theta_1} = \frac{AS}{2} + \frac{a^2 AS}{2r_1^2} + \left(-\frac{BS}{2} - \frac{3a^4 BS}{2r_1^4}\right) \cos 2\theta_1 \quad (4.11)$$

$$\tau_{r\theta_1} = \left(-\frac{BS}{2} + \frac{3a^4 BS}{2r_1^4} - \frac{a^2 BS}{r_1^2}\right) \sin 2\theta_1 \quad (4.12)$$

ทำการหาค่าการเคลื่อนตัว โดยแทนค่า ความเค้นลงใน สมการ (2.35), (2.36), (2.38) และสมการ (2.39) ได้

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{r_1} - \nu_1 \sigma_{\theta_1}) \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial v_1}{\partial \theta_1} + \frac{u_1}{r_1} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{\theta_1} - \nu_1 \sigma_{r_1}) \quad (4.14)$$

ทำการแก้สมการหาค่าการเคลื่อนตัวของวงแหวน ได้

$$u_1 = -\frac{SAr_1^2[r_1^2(-1+\nu_1) - a^2(1+\nu_1)]}{2E_1r_1^3} - \frac{SB[-4a^2r_1^2 + a^4(1+\nu_1) - r_1^4(1+\nu_1)] \cos 2\theta_1}{2E_1r_1^3} \quad (4.15)$$

$$v_1 = -\frac{BS[-2a^2r_1^2(-1+\nu_1) + a^4(1+\nu_1) + r_1^4(1+\nu_1)] \sin 2\theta_1}{2E_1r_1^3} \quad (4.16)$$

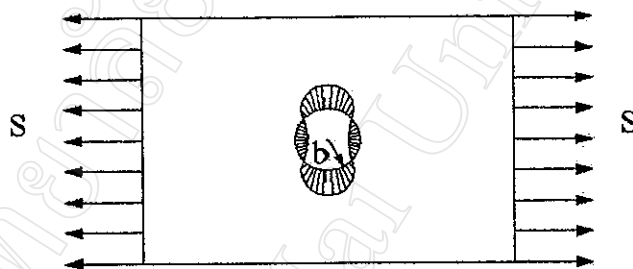
ทำการแทนค่า $r_1 = b$ และ $\theta_1 = \theta$ ในสมการของการเคลื่อนตัวของวงแหวน ได้การเคลื่อนตัวที่ขอบนอกของวงแหวน

$$u_1 = -\frac{SAb^2[b^2(-1+\nu_1) - a^2(1+\nu_1)]}{2E_1b^3} - \frac{SB[-4a^2b^2 + a^4(1+\nu_1) - b^4(1+\nu_1)] \cos 2\theta}{2E_1b^3} \quad (4.17)$$

$$v_1 = -\frac{BS[-2a^2b^2(-1+\nu_1) + a^4(1+\nu_1) + b^4(1+\nu_1)] \sin 2\theta}{2E_1b^3} \quad (4.18)$$

2) การหาค่าการเคลื่อนตัวของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมรัศมี b และทำการหาค่าการเคลื่อนตัวที่ขอบในของแผ่นกว้างมีรูปกลมรัศมี b

ในการวิเคราะห์ปัญหาจะทำการแยกชิ้นส่วน โดยแยกเป็นแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมรัศมี b ซึ่งเมื่อแยกชิ้นส่วนเพื่อทำการวิเคราะห์ ที่ขอบนอกได้รับแรงแผ่กระจายสม่ำเสมอในแนวเดียว ที่ขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมจะเกิดความเค้นจากการแยกส่วนของปัญหา และมีขนาดเท่ากับค่าความเค้นที่ขอบนอกของแหวนกลม ดังแสดงในรูป 4.2 สำหรับวิธีการวิเคราะห์ จะทำการกำหนดค่าที่ขอบในที่เกิดจากการแยกชิ้นส่วน โดยคุณค่า A และ ค่า B เข้ากับค่าที่ได้จากสมการของ Kirsh โดยแทนรัศมีเท่ากับขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม ทำการเลือกใช้ค่าฟังก์ชันความเค้นที่เหมาะสม และทำการหาค่าความเค้นที่ได้



รูป 4.2 แผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม รับแรงดึงแผ่กระจายสม่ำเสมอที่ขอบนอก และเกิดความเค้นที่เกิดจากการแยกส่วนของวงแหวนออกจากแผ่นระนาบกว้างที่ขอบใน

ทำการพิจารณาแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม รับแรงดึงแผ่กระจายสม่ำเสมอที่ขอบนอก และเกิดความเค้นที่เกิดจากการแยกส่วนของวงแหวนออกจากแผ่นระนาบกว้างที่ขอบใน

ค่าที่ขอบ

$$r_2 = b :$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r_2} &= \left(A \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right) + \left(B \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{b^4} - \frac{4a^2}{b^2} \right) \cos 2\theta_2 \right) \\ \tau_{\theta_2} &= -B \frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2} \right) \sin 2\theta_2\end{aligned}\quad (4.19)$$

$r_2 = \infty$:

$$\begin{aligned}\sigma_{r_2} &= \frac{1}{2} S(1 + \cos 2\theta_2) \\ \sigma_{\theta_2} &= \frac{1}{2} S(1 - 2 \cos 2\theta_2) \\ \tau_{r\theta_2} &= -\frac{1}{2} S \sin 2\theta_2\end{aligned}\quad (4.20)$$

โดยที่

ตัวพ่วงล่าง 2 คือ ค่าต่างๆของวัสดุที่ 2 (แผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมรัศมี b)

เพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมที่เป็นวัสดุเดียว จึงเลือกใช้ฟังก์ชันความเค้นเหมือนกับที่ใช้ในปัญหาแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมที่เป็นวัสดุเดียว คือ

$$\Phi = f_1(r_2) + f_2(r_2) \cos 2\theta_2 \quad (4.21)$$

โดย

$$\begin{aligned}f_1(r_2) &= c_{21} r_2^2 \ln r + c_{22} r_2^2 + c_{23} \ln r_2 + c_{24} \\ f_2(r_2) &= c_{25} r_2^2 + c_{26} r_2^4 + \frac{c_{27}}{r_2^2} + c_{28}\end{aligned}$$

ทำการหาค่าความเค้นในพิกัดเชิงขั้ว โดยหาค่ามาจากฟังก์ชันความเค้น ได้

$$\begin{aligned}\sigma_{r_2} &= c_{21}(1 + 2 \ln r_2) + 2 c_{22} + \frac{c_{23}}{r_2^2} - (2 c_{25} + \frac{6 c_{27}}{r_2^4} + \frac{4 c_{28}}{r_2^2}) \cos 2\theta_2 \\ \sigma_{\theta_2} &= c_{21}(3 + 2 \ln r_2) + 2 c_{22} - \frac{c_{23}}{r_2^2} + (2 c_{25} + 12 c_{26} r_2^2 + \frac{6 c_{27}}{r_2^4}) \cos 2\theta_2 \\ \tau_{r\theta_2} &= (2 c_{25} + 6 c_{26} r_2^2 - \frac{6 c_{27}}{r_2^4} - \frac{2 c_{28}}{r_2^2}) \sin 2\theta_2\end{aligned}$$

ทำการพิจารณาค่าความเค้นของแผ่นระนาบกว้าง ได้ $c_{21} = c_{26} = 0$ จะได้สมการความเค้นคือ

$$\sigma_{r_2} = 2 c_{22} + \frac{c_{23}}{r_2^2} - (2 c_{25} + \frac{6 c_{27}}{r_2^4} + \frac{4 c_{28}}{r_2^2}) \cos 2\theta_2 \quad (4.22)$$

$$\sigma_{\theta_2} = 2 c_{22} - \frac{c_{23}}{r_2^2} + (2 c_{25} + \frac{6 c_{27}}{r_2^4}) \cos 2\theta_2 \quad (4.23)$$

$$\tau_{r\theta 2} = (2c_{25} - \frac{6c_{27}}{r_2^4} - \frac{2c_{28}}{r_2^2}) \sin 2\theta_2 \quad (4.24)$$

ทำการแทนค่าที่ขอบ ในสมการความเค้น (4.22) และ (4.24) ได้

ที่ $r_2 = \infty$:

$$S = -4c_{25}, \quad S = 4c_{22}$$

ที่ $r_2 = b$:

$$\begin{aligned} 2c_{22} + \frac{c_{23}}{b^2} &= \frac{AS}{2} - \frac{AS}{2} \frac{a^2}{b^2} \\ -(2c_{25} + \frac{6c_{27}}{b^4} + \frac{4c_{28}}{b^2}) &= \frac{BS}{2} (1 + \frac{3a^4}{b^4} - \frac{4a^2}{b^2}) \\ 2c_{25} - \frac{6c_{27}}{b^4} - \frac{2c_{28}}{b^2} &= -\frac{BS}{2} (1 - \frac{3a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2}) \end{aligned}$$

ได้ค่าคงที่ต่างๆ คือ

$$\begin{aligned} c_{22} &= \frac{S}{4}, \quad c_{23} = \frac{1}{2}(-a^2 AS - b^2 S + Ab^2 S), \quad c_{25} = -\frac{S}{4}, \\ c_{27} &= \frac{1}{4}(-b^4 S - a^4 BS + b^4 BS), \quad c_{28} = \frac{1}{2}(b^2 S + a^2 BS - b^2 BS) \end{aligned}$$

ทำการแทนค่าคงที่ที่ได้ในสมการ(4.22) , (4.23) และ (4.24)

$$\begin{aligned} \sigma_{r2} &= \frac{S}{2} + \frac{-a^2 AS - b^2 S + Ab^2 S}{2r_2^2} - [\frac{S}{2} + \frac{2(b^2 S + a^2 BS - b^2 BS)}{r_2^2} \\ &\quad + \frac{3(-b^4 S - a^4 BS + b^4 BS)}{2r_2^4}] \cos 2\theta_2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{S}{2} - \frac{-a^2 AS - b^2 S + Ab^2 S}{2r_2^2} + [-\frac{S}{2} + \frac{3(-b^4 S - a^4 BS + b^4 BS)}{2r_2^4}] \cos 2\theta_2 \quad (4.26)$$

$$\tau_{r\theta 2} = [-\frac{S}{2} - \frac{3(-b^4 S - a^4 BS + b^4 BS)}{2r_2^4} - \frac{b^2 S + a^2 BS - b^2 BS}{r_2^2}] \sin 2\theta_2 \quad (4.27)$$

ทำการหาค่าการเคลื่อนตัว โดยแทนค่า ความเค้นลงใน สมการ (2.35), (2.36), (2.38) และสมการ (2.39) ได้

$$\frac{\partial u_2}{\partial r_2} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{r2} - \nu_2 \sigma_{\theta 2}) \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{r_2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta_2} + \frac{u_2}{r} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{\theta 2} - \nu_2 \sigma_{r2}) \quad (4.29)$$

ทำการแก้สมการหาค่าการเคลื่อนตัว ได้

$$u_2 = \frac{1}{2E_2 r_2^3} \{ S \{ r_2^2 [-r_2^2 (-1 + \nu_2) + a^2 A (1 + \nu_2) - (-1 + A) b^2 (1 + \nu_2)] + [-4 b^2 (-1 + B) r_2^2 + 4 a^2 B r_2^2 + b^4 (-1 + B) (1 + \nu_2) - a^4 B (1 + \nu_2) + r_2^4 (1 + \nu_2)] \cos 2\theta_2 \} \} \quad (4.30)$$

$$v_2 = -\frac{1}{2E_2 r_2^3} \{ S [2 b^2 (-1 + B) r_2^2 (-1 + \nu_2) - 2 a^2 B r_2^2 (-1 + \nu_2) - b^4 (-1 + B) (1 + \nu_2) + a^4 B (1 + \nu_2) + r_2^4 (1 + \nu_2)] \sin 2\theta_2 \} \quad (4.31)$$

ทำการแทนค่า $r_2 = b$ และ $\theta_2 = \theta$ ในสมการของการเคลื่อนตัวของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมรัศมี b ได้ค่าการเคลื่อนตัวที่ขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมรัศมี b

$$u_2 = \frac{1}{2E_2 b^3} \{ S \{ b^2 [-b^2 (-1 + \nu_2) + a^2 A (1 + \nu_2) - (-1 + A) b^2 (1 + \nu_2)] + [-4 b^4 (-1 + B) + 4 a^2 b^2 B + b^4 (1 + \nu_2) + b^4 (-1 + B) (1 + \nu_2) - a^4 B (1 + \nu_2)] \cos 2\theta \} \} \quad (4.32)$$

$$v_2 = -\frac{1}{2E_2 b^3} \{ S [2 b^4 (-1 + B) (-1 + \nu_2) - 2 a^2 b^2 B (-1 + \nu_2) - b^4 (-1 + B) (1 + \nu_2) + a^4 B (1 + \nu_2) + b^4 (1 + \nu_2)] \sin 2\theta \} \quad (4.33)$$

3) การหาค่า A และ B โดยการแก้สมการการเท่ากันของการเคลื่อนตัวที่ขอบ
เปลี่ยนวัสดุ

การหาค่า จากค่า A และ B จะหาโดยการเท่ากันของการเคลื่อนตัวของขอบ
นอกวงแหวน กับขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมรัศมี b โดยได้สองสมการคือการเท่ากันของ
การเคลื่อนตัวในแนวรัศมี และการเท่ากันของการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากกับรัศมี

$$u_1 = u_2 \quad (4.34)$$

$$v_1 = v_2 \quad (4.35)$$

ทำการแก้สมการโดยแทนค่า u_1 จากสมการ (4.17), u_2 จากสมการ (4.32), v_1 จากสมการ (4.18)
และ v_2 จากสมการ (4.33) หาค่าของ A และ B ผลที่ได้คือ

$$A = \frac{S\{b^2[-b^2(-1+v_2) + b^2(1+v_2)] + 4b^4 \cos 2\theta\}}{2b^3 E_2 \left\{ -\frac{S[b^2(-1+v_1) - a^2(1+v_1)]}{2b E_1} - \frac{S[a^2(1+v_2) - b^2(1+v_2)]}{2b E_2} \right\} - \{4b^4 E_1 \left[-\frac{S[-4a^2 b^2 + a^4(1+v_1) - b^4(1+v_1)] \cos 2\theta}{2b^3 E_1} - \frac{S[4a^2 b^2 - 4b^4 - a^4(1+v_2) + b^4(1+v_2)] \cos 2\theta}{2b^3 E_2} \right] \}} /$$

$$\{(-a^4 E_1 - 2a^2 b^2 E_1 + 3b^4 E_1 + a^4 E_2 + 2a^2 b^2 E_2 + b^4 E_2 + a^4 E_2 v_1 - 2a^2 b^2 E_2 v_1 + b^4 E_2 v_1 - a^4 E_1 v_2 + 2a^2 b^2 E_1 v_2 - b^4 E_1 v_2) \left[-\frac{S[b^2(-1+v_1) - a^2(1+v_1)]}{2b E_1} - \frac{S[a^2(1+v_2) - b^2(1+v_2)]}{2b E_2} \right] \}$$

$$B = (4b^4 E_1) / (-a^4 E_1 - 2a^2 b^2 E_1 + 3b^4 E_1 + a^4 E_2 + 2a^2 b^2 E_2 + b^4 E_2 + a^4 E_2 v_1 - 2a^2 b^2 E_2 v_1 + b^4 E_2 v_1 - a^4 E_1 v_2 + 2a^2 b^2 E_1 v_2 - b^4 E_1 v_2)$$

4) ค่าความเค้นจากการวิเคราะห์ และการตรวจสอบ

การวิเคราะห์ความเค้นจากฟังก์ชันความเค้น ที่ทำการกำหนดค่าที่ขอบต่อเนื่องกันของวัสดุและเลือกใช้ฟังก์ชันความเค้น ได้สมการความเค้นสองชุดในการหาค่าความเค้นของปัญหา คือ

สมการหาค่าความเค้นในส่วนของวงแหวนรัศมีภายใน a และรัศมีภายนอก b คือ

$$\sigma_{r1} = \frac{AS}{2} - \frac{a^2 AS}{2r_1^2} - \left(-\frac{BS}{2} - \frac{3a^4 BS}{2r_1^4} + \frac{2a^2 BS}{r_1^2} \right) \cos 2\theta_1 \quad (4.36)$$

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{AS}{2} + \frac{a^2 AS}{2r_1^2} + \left(-\frac{BS}{2} - \frac{3a^4 BS}{2r_1^4} \right) \cos 2\theta_1 \quad (4.37)$$

$$\tau_{r\theta 1} = \left(-\frac{BS}{2} + \frac{3a^4 BS}{2r_1^4} - \frac{a^2 BS}{r_1^2} \right) \sin 2\theta_1 \quad (4.38)$$

โดยที่

$$A = \frac{S\{b^2[-b^2(-1+\nu_2) + b^2(1+\nu_2)] + 4b^4 \cos 2\theta_1\}}{2b^3 E_2 \left\{ -\frac{S[b^2(-1+\nu_1) - a^2(1+\nu_1)]}{2b E_1} - \frac{S[a^2(1+\nu_2) - b^2(1+\nu_2)]}{2b E_2} \right\} - \{4b^4 E_1 \left[-\frac{S[-4a^2 b^2 + a^4(1+\nu_1) - b^4(1+\nu_1)] \cos 2\theta_1}{2b^3 E_1} - \frac{S[4a^2 b^2 - 4b^4 - a^4(1+\nu_2) + b^4(1+\nu_2)] \cos 2\theta_1}{2b^3 E_2} \right] \} /$$

$$\{(-a^4 E_1 - 2a^2 b^2 E_1 + 3b^4 E_1 + a^4 E_2 + 2a^2 b^2 E_2 + b^4 E_2 + a^4 E_2 \nu_1 - 2a^2 b^2 E_2 \nu_1 + b^4 E_2 \nu_1 - a^4 E_1 \nu_2 + 2a^2 b^2 E_1 \nu_2 - b^4 E_1 \nu_2) \left[-\frac{S[b^2(-1+\nu_1) - a^2(1+\nu_1)]}{2b E_1} - \frac{S[a^2(1+\nu_2) - b^2(1+\nu_2)]}{2b E_2} \right] \}$$

$$B = (4b^4 E_1) / (-a^4 E_1 - 2a^2 b^2 E_1 + 3b^4 E_1 + a^4 E_2 + 2a^2 b^2 E_2 + b^4 E_2 + a^4 E_2 \nu_1 - 2a^2 b^2 E_2 \nu_1 + b^4 E_2 \nu_1 - a^4 E_1 \nu_2 + 2a^2 b^2 E_1 \nu_2 - b^4 E_1 \nu_2)$$

สมการหาค่าความเค้นในส่วนของแผ่นระนาบกว้างมีรูกลมรัศมี b คือ

$$\sigma_{r2} = \frac{S}{2} + \frac{-a^2 AS - b^2 S + Ab^2 S}{2r_2^2} - \left[-\frac{S}{2} + \frac{2(b^2 S + a^2 BS - b^2 BS)}{r_2^2} + \frac{3(-b^4 S - a^4 BS + b^4 BS)}{2r_2^4} \right] \cos 2\theta_2 \quad (4.39)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{S}{2} - \frac{-a^2 AS - b^2 S + b^2 AS}{2r_2^2} + \left[-\frac{S}{2} + \frac{3(-b^4 S - a^4 BS + b^4 BS)}{2r_2^4} \right] \cos 2\theta_2 \quad (4.40)$$

$$\tau_{\theta 2} = \left[-\frac{S}{2} - \frac{3(-b^4 S - a^4 BS + b^4 BS)}{2r_2^4} - \frac{b^2 S + a^2 BS - b^2 BS}{r_2^2} \right] \sin 2\theta_2 \quad (4.41)$$

โดยที่

$$A = \frac{S\{b^2[-b^2(-1+\nu_2)+b^2(1+\nu_2)]+4b^4\cos 2\theta_2\}}{2b^3E_2\left\{-\frac{S[b^2(-1+\nu_1)-a^2(1+\nu_1)]}{2bE_1}-\frac{S[a^2(1+\nu_2)-b^2(1+\nu_2)]}{2bE_2}\right\}} - \frac{\{4b^4E_1\left\{-\frac{S[-4a^2b^2+a^4(1+\nu_1)-b^4(1+\nu_1)]\cos 2\theta_2}{2b^3E_1}-\frac{S[4a^2b^2-4b^4-a^4(1+\nu_2)+b^4(1+\nu_2)]\cos 2\theta_2}{2b^3E_2}\right\}}}{\{(-a^4E_1-2a^2b^2E_1+3b^4E_1+a^4E_2+2a^2b^2E_2+b^4E_2+a^4E_2\nu_1-2a^2b^2E_2\nu_1+b^4E_2\nu_1-a^4E_1\nu_2+2a^2b^2E_1\nu_2-b^4E_1\nu_2)\left[-\frac{S[b^2(-1+\nu_1)-a^2(1+\nu_1)]}{2bE_1}-\frac{S[a^2(1+\nu_2)-b^2(1+\nu_2)]}{2bE_2}\right]\}}$$

$$B = (4b^4E_1)/(-a^4E_1-2a^2b^2E_1+3b^4E_1+a^4E_2+2a^2b^2E_2+b^4E_2+a^4E_2\nu_1-2a^2b^2E_2\nu_1+b^4E_2\nu_1-a^4E_1\nu_2+2a^2b^2E_1\nu_2-b^4E_1\nu_2)$$

เพื่อให้่ายในการคำนวณจึงเขียนเป็นไฟล์ของโปรแกรม Mathematica 4.0 เพื่อสะดวกในการคำนวณค่า

เมื่อทำการทดสอบสมการโดยทำการแทนค่า $E_1 = E_2$ และ $\nu_1 = \nu_2$ ค่าที่ได้คือสมการความเค้นของแผ่นกว้างมีรูกลมวัสดุเดียว (สมการของ Kirsh) ดังแสดงในภาคผนวก ข

จากสมการความเค้นของวงแหวนและสมการความเค้นของแผ่นระนาบกว้าง เมื่อทำการลดรูปของสมการ โดยใช้ค่าอัตราส่วนของรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกของวงแหวน (4.42), อัตราส่วนของโมดูลัสของยังของวงแหวนต่อโมดูลัสของยังของแผ่นระนาบกว้าง (4.43) และอัตราส่วนของอัตราส่วนปัวซองของวงแหวนต่ออัตราส่วนปัวซองของแผ่นระนาบกว้าง (4.44)

$$k = \frac{a}{b} \quad (4.42)$$

$$K_1 = \frac{E_1}{E_2} \quad (4.43)$$

$$K_2 = \frac{\nu_1}{\nu_2} \quad (4.44)$$

สมการความเค้นของวงแหวน (4.36), (4.37) และ (4.38) เมื่อทำการลดรูปแล้ว คือ

$$\sigma_{r1} = \frac{(-b^2k^2 + r_1^2)S[Ar_1^2 + B(-3b^2k^2 + r_1^2)\cos 2\theta_1]}{2r_1^2} \quad (4.45)$$

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{S[Ar_1^2(b^2k^2 + r_1^2) - B(3b^4k^4 + r_1^4)\cos 2\theta_1]}{2r_1^4} \quad (4.46)$$

$$\tau_{r\theta 1} = -\frac{B(-3b^4k^4 + 2b^2k^2r_1^2 + r_1^4)S\cos\theta_1\sin\theta_1}{r_1^4} \quad (4.47)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} A = & -\{2K_1[-1 - 3K_1 + K_1\nu_2 - K_2\nu_2 + k^4(-1 + K_1 + K_1\nu_2 - K_2\nu_2) + \\ & 2k^2(-1 + K_1 - K_1\nu_2 + K_2\nu_2) + 4k^2(-1 + k^2) \\ & (-1 + K_1 + K_1\nu_2 - K_2\nu_2)\cos 2\theta_1]\} / \{[-1 - K_1 - K_1\nu_2 + K_2\nu_2 + \\ & k^2(-1 + K_1 + K_1\nu_2 - K_2\nu_2)][-1 + K_1(-3 + \nu_2) - K_2\nu_2 + \\ & k^4(-1 + K_1 + K_1\nu_2 - K_2\nu_2) + 2k^2(-1 + K_1 - K_1\nu_2 + K_2\nu_2)]\} \\ B = & -4K_1 / [-1 + K_1(-3 + \nu_2) - K_2\nu_2 + k^4(-1 + K_1 + K_1\nu_2 - K_2\nu_2) \\ & + 2k^2(-1 + K_1 - K_1\nu_2 + K_2\nu_2)] \end{aligned}$$

สมการความเค้นของแผ่นระนาบกว้าง (4.39), (4.40) และ (4.41) เมื่อทำการลดรูปแล้ว

คือ

$$\sigma_{r2} = \frac{S}{2} + \frac{b^2 S(-1 + A - Ak^2)}{2r_2^2} - \left[-\frac{S}{2} + \frac{2b^2 S(1 - B + Bk^2)}{r_2^2} + \frac{3b^4 S(-1 + B - Bk^4)}{2r_2^2} \right] \cos 2\theta_2 \quad (4.48)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{S}{2} - \frac{b^2 S(-1 + A - Ak^2)}{2r_2^2} + \left[-\frac{S}{2} + \frac{3b^4 S(-1 + B - Bk^4)}{2r_2^4} \right] \cos 2\theta_2 \quad (4.49)$$

$$\tau_{r\theta 2} = \left[-\frac{S}{2} - \frac{b^2 S(1 - B + Bk^2)}{r_2^2} - \frac{3b^4 S(-1 + B - Bk^4)}{2r_2^4} \right] \sin 2\theta_2 \quad (4.50)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} A = & -\{2K_1[-1 - 3K_1 + K_1v_2 - K_2v_2 + k^4(-1 + K_1 + K_1v_2 - K_2v_2) + \\ & 2k^2(-1 + K_1 - K_1v_2 + K_2v_2) + 4k^2(-1 + k^2) \\ & (-1 + K_1 + K_1v_2 - K_2v_2) \cos 2\theta_2]\} / \{[-1 - K_1 - K_1v_2 + K_2v_2 + \\ & k^2(-1 + K_1 + K_1v_2 - K_2v_2)][-1 + K_1(-3 + v_2) - K_2v_2 + \\ & k^4(-1 + K_1 + K_1v_2 - K_2v_2) + 2k^2(-1 + K_1 - K_1v_2 + K_2v_2)]\} \\ B = & -4K_1 / [-1 + K_1(-3 + v_2) - K_2v_2 + k^4(-1 + K_1 + K_1v_2 - K_2v_2) \\ & + 2k^2(-1 + K_1 - K_1v_2 + K_2v_2)] \end{aligned}$$

5) ค่าความเครียดจากการวิเคราะห์

ค่าความเครียดในส่วนของวงแหวนรัศมีภายใน a และรัศมีภายนอก b ทำการหาค่าจาก นำค่าความเค้นในสมการ (4.36), (4.37) และ (4.38) แทนลงในสมการ (2.38), (2.39) และ (2.40) จะได้ค่าความเครียดคือ

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r1} = & \frac{1}{2E_1 r_1^4} \{S\{-Ar_1^2[r_1^2(-1 + v_1) + a^2(1 + v_1)] + \\ & B[-4a^2 r_1^2 + 3a^4(1 + v_1) + r_1^4(1 + v_1)] \cos 2\theta_1\} \} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\varepsilon_{\theta 1} = -\frac{1}{2E_1 r_1^4} \{S\{Ar_1^2[r_1^2(-1+\nu_1) - a^2(1+\nu_1)] +$$

$$B[-4a^2 r_1^2 + 3a^4(1+\nu_1) + r_1^4(1+\nu_1)] \cos 2\theta_1\}$$

$$\gamma_{r\theta 1} = -\frac{BS(3a^4 + 2a^2 r_1^2 + r_1^4) \cos \theta_1 \sin \theta_1}{G r_1^4} \quad (4.53)$$

โดยที่

$$A = \frac{S\{b^2[-b^2(-1+\nu_2) + b^2(1+\nu_2)] + 4b^4 \cos 2\theta_1\}}{2b^3 E_2 \left\{ -\frac{S[b^2(-1+\nu_1) - a^2(1+\nu_1)]}{2b E_1} - \frac{S[a^2(1+\nu_2) - b^2(1+\nu_2)]}{2b E_2} \right\}} -$$

$$\{4b^4 E_1 \left\{ -\frac{S[-4a^2 b^2 + a^4(1+\nu_1) - b^4(1+\nu_1)] \cos 2\theta_1}{2b^3 E_1} - \right.$$

$$\left. \frac{S[4a^2 b^2 - 4b^4 - a^4(1+\nu_2) + b^4(1+\nu_2)] \cos 2\theta_1}{2b^3 E_2} \right\} \} /$$

$$\{-a^4 E_1 - 2a^2 b^2 E_1 + 3b^4 E_1 + a^4 E_2 + 2a^2 b^2 E_2 + b^4 E_2 + a^4 E_2 \nu_1 -$$

$$2a^2 b^2 E_2 \nu_1 + b^4 E_2 \nu_1 - a^4 E_1 \nu_2 + 2a^2 b^2 E_1 \nu_2 - b^4 E_1 \nu_2\}$$

$$\left[-\frac{S[b^2(-1+\nu_1) - a^2(1+\nu_1)]}{2b E_1} - \frac{S[a^2(1+\nu_2) - b^2(1+\nu_2)]}{2b E_2} \right] \}$$

$$B = (4b^4 E_1) / (-a^4 E_1 - 2a^2 b^2 E_1 + 3b^4 E_1 + a^4 E_2 + 2a^2 b^2 E_2 +$$

$$b^4 E_2 + a^4 E_2 \nu_1 - 2a^2 b^2 E_2 \nu_1 + b^4 E_2 \nu_1 - a^4 E_1 \nu_2 +$$

$$2a^2 b^2 E_1 \nu_2 - b^4 E_1 \nu_2)$$

ค่าความเครียดในส่วนของแต่ละระนาบมีรูกลมรัศมี b ทำการหาค่าจาก นำค่าความเค้นในสมการ (4.39), (4.40) และ (4.41) แทนลงในสมการ (2.38), (2.39) และ (2.40) จะได้ค่าความเครียดคือ

$$\varepsilon_{r 2} = \frac{1}{2E_2 r_2^4} \{S\{-r_2^2[r_2^2(-1+\nu_2) + a^2 A(1+\nu_2) -$$

$$(-1+A)b^2(1+\nu_2)] + [4b^2(-1+B)r_2^2 - 4a^2 B r_2^2$$

$$- 3b^4(-1+B)(1+\nu_2) + 3a^4 B(1+\nu_2) + r_2^4(1+\nu_2)] \cos 2\theta_2\}$$

(4.54)

$$\varepsilon_{\theta 2} = -\frac{1}{2E_2 r_2^4} \{S[r_2^2(-1+\nu_2) - a^2 A(1+\nu_2) + (-1+A)b^2(1+\nu_2)] + [4b^2(-1+B)r_2^2 \nu_2 - 4a^2 B r_2^2 \nu_2 - 3b^4(-1+B)(1+\nu_2) + 3a^4 B(1+\nu_2) + r_2^4(1+\nu_2)] \cos 2\theta_2\} \quad (4.55)$$

$$\gamma_{r\theta 2} = -\frac{1}{2G r_2^4} \{[3b^4(-1+B) - 3a^4 B - 2b^2(-1+B)r_2^2 + 2a^2 B r_2^2 + r_2^4] S \sin 2\theta_2\} \quad (4.56)$$

โดยที่

$$A = \frac{S\{b^2[-b^2(-1+\nu_2) + b^2(1+\nu_2)] + 4b^4 \cos 2\theta_2\}}{2b^3 E_2 \left\{ -\frac{S[b^2(-1+\nu_1) - a^2(1+\nu_1)]}{2b E_1} - \frac{S[a^2(1+\nu_2) - b^2(1+\nu_2)]}{2b E_2} \right\} - \{4b^4 E_1 \left\{ -\frac{S[-4a^2 b^2 + a^4(1+\nu_1) - b^4(1+\nu_1)] \cos 2\theta_2}{2b^3 E_1} - \frac{S[4a^2 b^2 - 4b^4 - a^4(1+\nu_2) + b^4(1+\nu_2)] \cos 2\theta_2}{2b^3 E_2} \right\} / \{(-a^4 E_1 - 2a^2 b^2 E_1 + 3b^4 E_1 + a^4 E_2 + 2a^2 b^2 E_2 + b^4 E_2 + a^4 E_2 \nu_1 - 2a^2 b^2 E_2 \nu_1 + b^4 E_2 \nu_1 - a^4 E_1 \nu_2 + 2a^2 b^2 E_1 \nu_2 - b^4 E_1 \nu_2) [-\frac{S[b^2(-1+\nu_1) - a^2(1+\nu_1)]}{2b E_1} - \frac{S[a^2(1+\nu_2) - b^2(1+\nu_2)]}{2b E_2}]\} \}$$

$$B = (4b^4 E_1) / (-a^4 E_1 - 2a^2 b^2 E_1 + 3b^4 E_1 + a^4 E_2 + 2a^2 b^2 E_2 + b^4 E_2 + a^4 E_2 \nu_1 - 2a^2 b^2 E_2 \nu_1 + b^4 E_2 \nu_1 - a^4 E_1 \nu_2 + 2a^2 b^2 E_1 \nu_2 - b^4 E_1 \nu_2)$$

4.1.2 ผลการวิเคราะห์จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้โปรแกรม ABAQUS จะได้ไฟล์สำหรับการอ่านค่าความเค้นที่เกิดขึ้น คือ ไฟล์ *.dat ทำการอ่านค่าที่จุด ค่าที่อ่านได้เป็นค่าความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และทำการแปลงค่าความเค้นเป็นความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

รูปแบบของปัญหาที่ทำการวิเคราะห์ด้วย โปรแกรม ABAQUS จะทำการเขียนในโปรแกรม FEMAP ดังแสดงตัวอย่างของปัญหาในรูป 4.3 ซึ่งรูปแบบของปัญหาที่ทำการเขียนไม่ได้เขียนเต็มแผ่น แต่เขียนเพียงหนึ่งส่วนสี่เพราะเป็นปัญหาที่มีรูปแบบสมมาตร

สำหรับการเขียนรูปแบบของปัญหาในโปรแกรม FEMAP มีขั้นตอนดังนี้

ก. กำหนดค่าของวัสดุ โดยเลือกคำสั่ง Model แล้วเลือก Material กำหนดค่าของวัสดุ คือ ค่า E, G, ν

ข. เลือกชนิดของวัสดุที่จะนำมาใช้ในการวิเคราะห์ โดยเลือกคำสั่ง Property เลือกชนิดของวัสดุที่จะใช้ และกำหนดชนิดของปัญหาเป็นแบบความเค้นระนาบ

ค. วาดรูปของปัญหา ในการวาดรูปจะทำการวาดเพียงหนึ่งส่วนของรูปปัญหาเพราะเป็นปัญหาที่สมมาตร วาดรูปวงแหวนตามขนาดที่ต้องการ แล้ววาดรูปของแผ่นระนาบสี่เหลี่ยม โดยขนาดของแผ่นระนาบสี่เหลี่ยมที่วาดจะมีขนาดใหญ่กว่ารัศมีนอกของวงแหวนสิบเท่า รูปที่วาดทั้งสองรูปนี้ขอบนอกของวงแหวนจะห่างจากขอบของรูปกลมของแผ่นระนาบเป็นระยะความกว้างของเอลิเมนต์หนึ่งเอลิเมนต์ เพื่อที่จะทำการเชื่อมเอลิเมนต์ในภายหลัง

ง. กำหนดจำนวนของเอลิเมนต์ที่ขอบ โดยเลือกคำสั่ง Mesh แล้วเลือกคำสั่ง Mesh control ใส่จำนวนเอลิเมนต์ที่ต้องการในขอบแต่ละด้าน

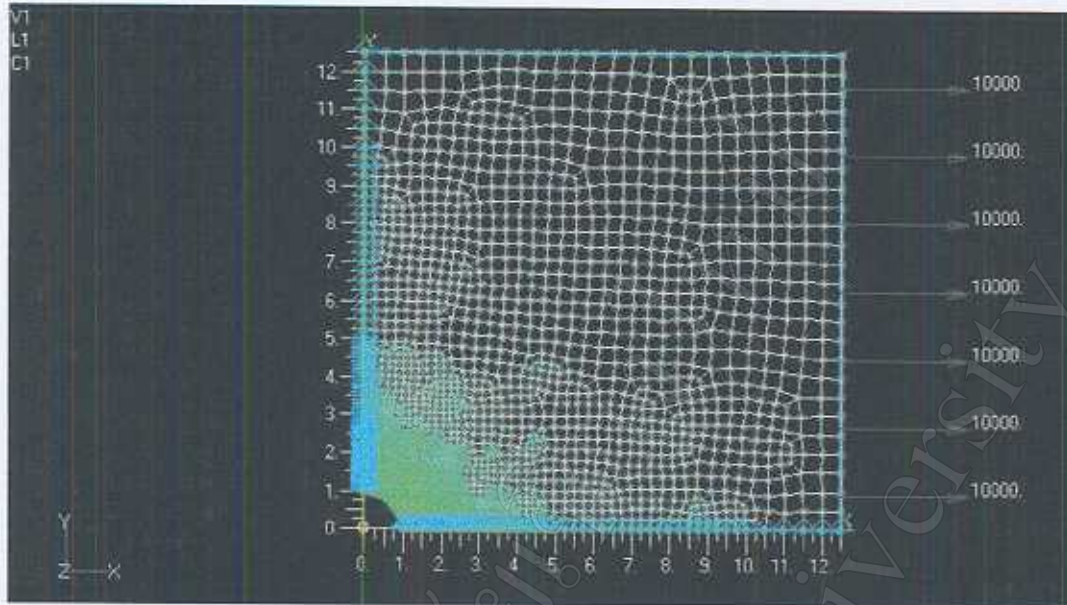
จ. ทำให้รูปของปัญหาเป็นพื้นผิวเดียวกัน โดยเลือกคำสั่ง Geometry แล้วเลือกคำสั่ง Boundary surface เลือกพื้นที่ส่วนวงแหวนเป็นคุณสมบัติของวัสดุหนึ่ง และเลือกพื้นที่ส่วนแผ่นระนาบสี่เหลี่ยมเป็นคุณสมบัติของอีกวัสดุหนึ่ง เมื่อทำเสร็จแล้วจะได้พื้นผิวสองส่วน

ฉ. เชื่อมต่อทั้งสองส่วนคือส่วนวงแหวนและส่วนแผ่นระนาบสี่เหลี่ยมเข้าด้วยกัน โดยเลือกคำสั่ง Model แล้วเลือกคำสั่ง Element เลือกชนิดและคุณสมบัติของวัสดุของเอลิเมนต์โดยเลือกชนิดของเอลิเมนต์เป็นแบบสี่เหลี่ยมและคุณสมบัติเป็นคุณสมบัติของวัสดุแผ่นระนาบ สี่เหลี่ยม

ช. ยึดขอบทางด้านที่ตัดออกของปัญหา ให้เคลื่อนตัวได้ตามทิศทางที่สอดคล้องกับปัญหา โดยเลือกคำสั่ง Model แล้วเลือกคำสั่ง Constraint แล้วเลือกคำสั่ง Nodal ยึดขอบทางด้านแกน y ให้เคลื่อนตัวได้แต่ตามแนว y ตามแนวอื่นเคลื่อนไม่ได้ ขอบทางด้าน x ให้เคลื่อนตัวได้แต่ตามแนว x ตามแนวอื่นเคลื่อนไม่ได้

ซ. ใส่แรงที่กระทำ โดยเป็นแรงดึงแผ่กระจายสม่ำเสมอที่ขอบแผ่นระนาบสี่เหลี่ยม เลือกคำสั่ง Model แล้วเลือกคำสั่ง Load เลือกชนิดของโหลดโดยเป็นชนิดที่เป็นแรงกระจายสม่ำเสมอ

เมื่อได้รูปของปัญหา, ทำการยึดขอบ และทำการกำหนดแรงที่กระทำแล้ว จึงส่งไฟล์ที่ได้ไปทำการวิเคราะห์หาค่าในโปรแกรม ABAQUS ผลที่ได้จากโปรแกรม ABAQUS สามารถแสดงผลในโปรแกรม FEMAP ได้ และถ้าต้องการผลที่เป็นค่าตัวเลขก็อ่านค่าจากไฟล์ *.dat

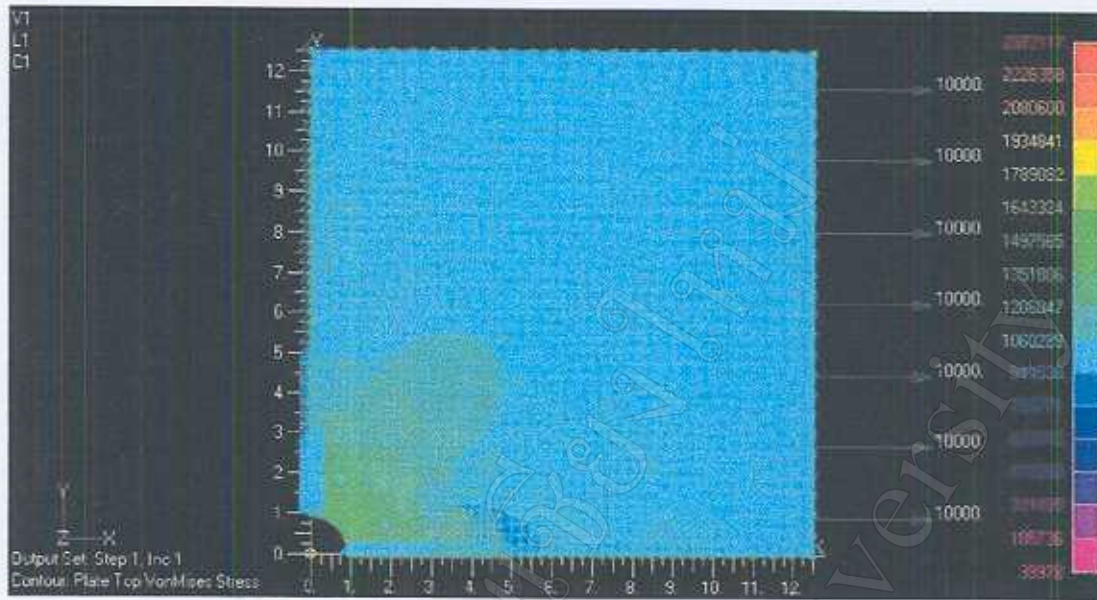


รูป 4.3 ปัญหาตัวอย่างที่วิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

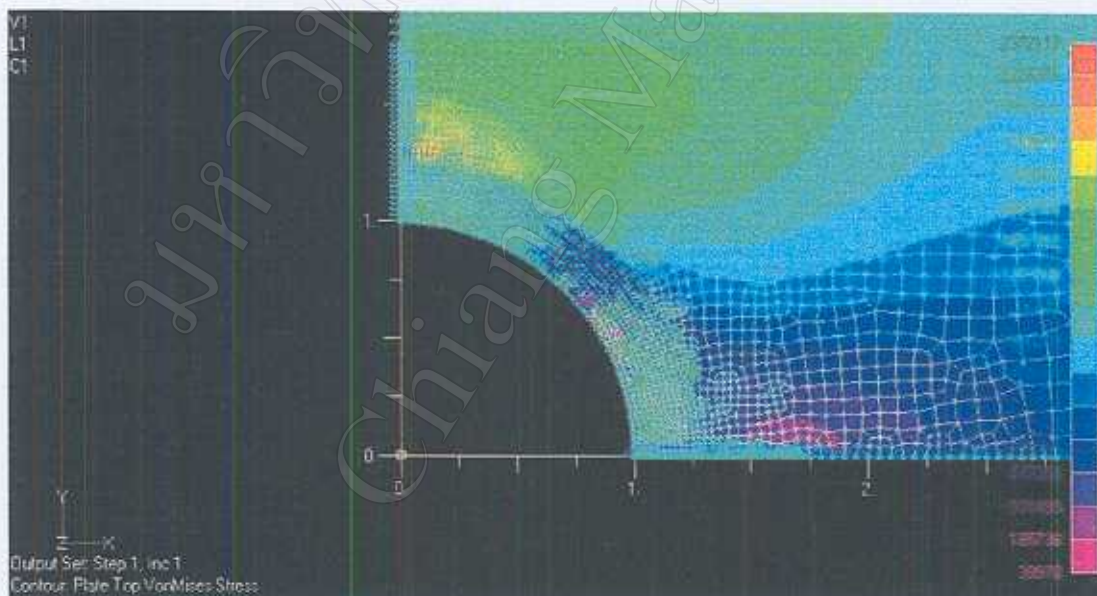
เมื่อทำการวิเคราะห์แล้ว ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์จะแบ่งเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มที่หนึ่ง คือ วงแหวนเป็นวัสดุที่มีค่าโมดูลัสของยังน้อยกว่าแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม และกลุ่มที่สองคือ วงแหวนเป็นวัสดุที่มีค่าโมดูลัสของยังมากกว่าแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม

ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นของตัวอย่างวิจัยที่ วงแหวนเป็นวัสดุที่มีค่าโมดูลัสของยังน้อยกว่าแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม คือ ค่าความเค้นจะเกิดที่ตำแหน่งขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม ที่มุม $\theta=90^\circ$ และ $\theta=270^\circ$ กับแนวแรงกระทำ ตัวอย่างของตัวอย่างวิจัยรูปแบบนี้แสดงในรูปที่ 4.4, 4.5 และ 4.6 ซึ่งเป็นตัวอย่างที่แสดงค่าความเค้นที่เกิดขึ้นที่แสดงใน โปรแกรม FEMAP ของตัวอย่างวิจัยที่ วัสดุของวงแหวนคือ อลูมิเนียม และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคือ เหล็ก

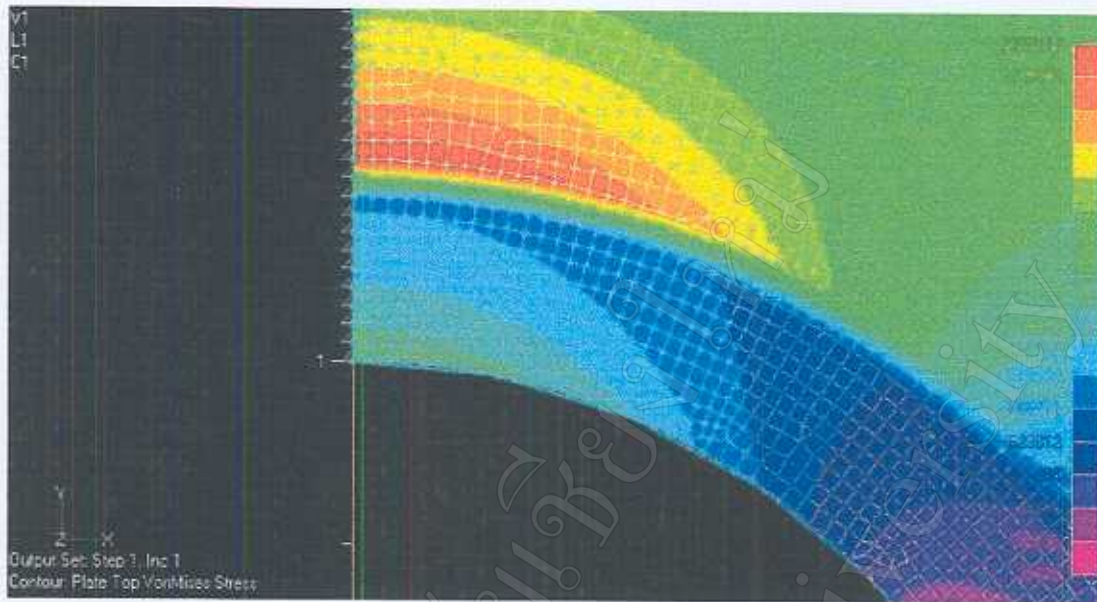
ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นของตัวอย่างวิเคราะห์ที่ วงแหวนเป็นวัสดุที่มีค่าโมดูลัสของยังมากกว่าแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม คือ ค่าความเค้นจะเกิดที่ตำแหน่งขอบในของวงแหวน ที่มุม $\theta=90^\circ$ และ $\theta=270^\circ$ กับแนวแรงกระทำ ตัวอย่างของตัวอย่างวิจัยรูปแบบนี้แสดงในรูปที่ 4.7, 4.8 และ 4.9 ซึ่งเป็นตัวอย่างที่แสดงค่าความเค้นที่เกิดขึ้นที่แสดงใน โปรแกรม FEMAP ของปัญหาที่ วัสดุของวงแหวนคือ เหล็ก และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคือ อลูมิเนียม



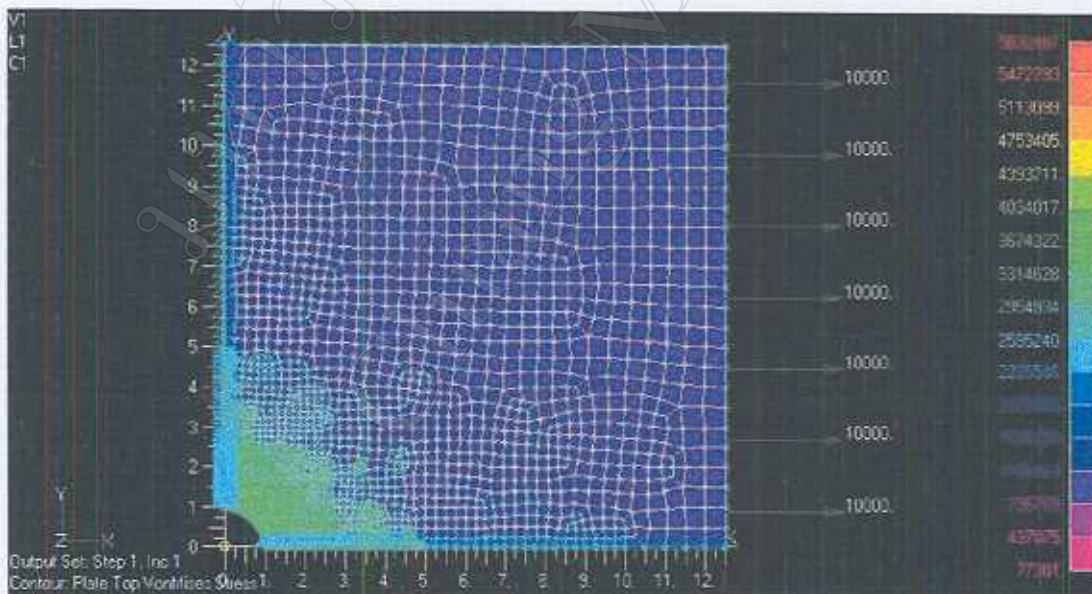
รูป 4.4 ปัญหาที่ได้ทำการวิเคราะห์แล้ว โดย วัสดุของวงแหวนคืออลูมิเนียม และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคือเหล็ก



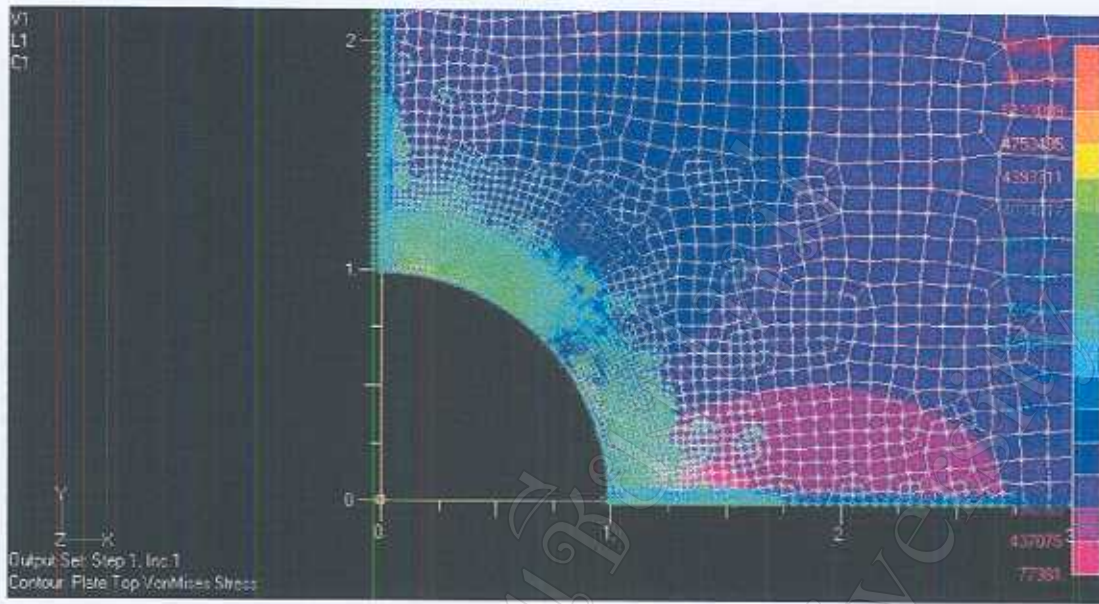
รูป 4.5 แสดงความเค้นที่เกิดขึ้น โดยขยายบริเวณวงแหวนของ ปัญหาที่วัสดุของวงแหวนคืออลูมิเนียม และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคือเหล็ก



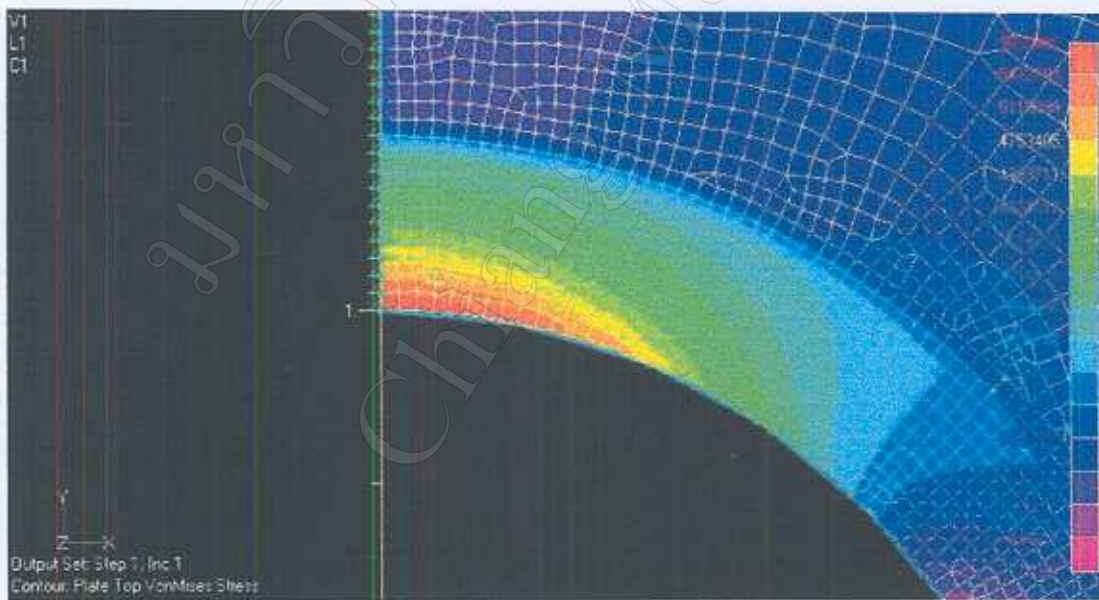
รูป 4.6 แสดงตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้นเฉ้ม คือตำแหน่งขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม ที่มุม $\theta = 90^\circ$ โดยวัสดุของวงแหวนคืออลูมิเนียม และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคือ เหล็ก



รูป 4.7 ปัญหาที่ได้ทำการวิเคราะห์แล้ว โดยวัสดุของวงแหวนคือเหล็ก และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคืออลูมิเนียม



รูป 4.8 แสดงความเค้นที่เกิดขึ้น โดยขยายบริเวณวงแหวนของ ปัญหาที่วัสดุของวงแหวนคือเหล็ก และวัสดุแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคืออลูมิเนียม



รูป 4.9 แสดงตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้นเข้ม คือตำแหน่งขอบในของวงแหวน ที่มุม $\theta = 90^\circ$ โดยวัสดุของวงแหวนคือเหล็ก และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคืออลูมิเนียม

4.1.3 การเปรียบเทียบค่าจากการวิเคราะห์จากฟังก์ชันความเค้น และค่าจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากตัวอย่างที่ทำการทดสอบ เมื่อเปรียบเทียบค่าที่ได้จากสูตรการวิเคราะห์จากฟังก์ชันความเค้น กับค่าของตัวอย่างที่หาค่าโดยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่า ตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้นเข้มเป็นตำแหน่งเดียวกัน ซึ่งมีสองกรณีคือ กรณีที่หนึ่ง วัสดุของวงแหวนมีค่าโมดูลัสของยังน้อยกว่าค่าโมดูลัสของยังของวัสดุแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม ค่าความเค้นเข้มจะเกิดขึ้นที่ขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม(ที่ $r = b$) ที่มุม 90° และ 270° กับแนวแรงดึงที่กระทำ ค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของค่าจากทั้งสองวิธีจากตัวอย่างที่เปรียบเทียบกันมีค่าต่างกันในช่วง 9 เปอร์เซ็นต์ และกรณีที่สอง วัสดุของวงแหวนมีค่าโมดูลัสของยังมากกว่าค่าโมดูลัสของยังของวัสดุแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม ค่าความเค้นเข้มจะเกิดขึ้นที่ขอบในของวงแหวน(ที่ $r = a$) ที่มุม 90° และ 270° กับแนวแรงดึงที่กระทำ ค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของค่าจากทั้งสองวิธีจากตัวอย่างที่เปรียบเทียบกันมีค่าต่างกันในช่วง 30 เปอร์เซ็นต์

เมื่อเปรียบเทียบค่าความเค้นที่เกิดขึ้นที่จุดต่างๆพบว่า ค่าความเค้นที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน โดยได้แสดงกราฟที่แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ขอบของตัวอย่างวิเคราะห์จำนวน 2 ตัวอย่าง ตัวอย่างที่หนึ่ง แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ขอบของตัวอย่างวิจัย วัสดุของวงแหวนคือ อลูมิเนียม และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคือ เหล็ก แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นใน รูปที่ 4.10, 4.11 และ 4.12 ตัวอย่างที่สอง แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ขอบของตัวอย่างวิจัย วัสดุของวงแหวนคือ เหล็ก และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคือ อลูมิเนียม แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นใน รูปที่ 4.13, 4.14 และ 4.15 จากแผนภูมิที่แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ขอบของตัวอย่างทดสอบ จะพบว่าค่าความเค้นจะมีค่าใกล้เคียงกัน และเมื่อเปลี่ยนตำแหน่ง ค่าความเค้นจะมีการเพิ่มหรือลด ไปในทิศทางเดียวกันทั้งสองวิธี

ค่าความเค้นของตัวอย่างเมื่อทำการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนรัศมีภายในของวงแหวนต่อรัศมีภายนอกของวงแหวน โดยวัสดุของวงแหวนและวัสดุของแผ่นระนาบกว้างยังเป็นวัสดุเดิม พบว่า ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นจะมีค่าใกล้เคียงกันและค่าความเค้นเข้มที่เกิดขึ้นจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่ออัตราส่วนรัศมีภายในของวงแหวนต่อรัศมีภายนอกของวงแหวนเพิ่มขึ้น แต่ตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้นเข้มยังเป็นตำแหน่งเดิม ตัวอย่างของค่าความเค้นที่มีผลจากการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนรัศมีภายในของวงแหวนต่อรัศมีภายนอกของวงแหวน แสดงในรูปที่ 4.16 และรูปที่ 4.17

ค่าอัตราส่วนรัศมีภายในของวงแหวนต่อรัศมีภายนอกของวงแหวน มีผลต่อค่าความเค้นที่เกิดขึ้นของปัญหาแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมที่มีแหวนรับแรงดึงสม่ำเสมอ เมื่อทำการวิเคราะห์โดยใช้ค่าอัตราส่วนเท่าเดิม โดยเปลี่ยนแปลงค่า a และ b พบว่า ค่าความเค้นที่ได้ของปัญหาจะมีค่าเท่ากันกับค่าความเค้นจากอัตราส่วนรัศมีภายในของวงแหวนต่อรัศมีภายนอกของวงแหวนเดียวกัน ทำให้ทราบว่าค่าความเค้นขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของรัศมีภายในของวงแหวนต่อรัศมีภายนอก ของวงแหวน

เมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน โมดูลัสของยังก์ของวงแหวนต่อ โมดูลัสของยังก์ของแผ่นระนาบกว้าง โดยที่อัตราส่วนรัศมีภายในของวงแหวนต่อรัศมีภายนอกของวงแหวนเท่าเดิม พบว่า ตำแหน่งที่จะเกิดค่าความเค้นเข้มจะเกิดที่สองตำแหน่งคือ ขอบในของวงแหวนที่มุม 90° และ 270° กับแนวแรงกระทำ และขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมที่มุม 90° และ 270° กับแนวแรงกระทำ จะเกิดค่าความเค้นเข้มที่ตำแหน่งใดแล้วแต่นิคมของวัสดุของวงแหวนและวัสดุของแผ่นระนาบกว้าง ถ้าค่าโมดูลัสของยังก์ของวงแหวนมีค่ามากกว่าของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม ค่าความเค้นเข้มจะเกิดที่ตำแหน่งขอบในของวงแหวนที่มุม 90° และ 270° และที่ตำแหน่งนี้ค่าความเค้นในแนวตั้งฉากกับรัศมีจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วน โมดูลัสของยังก์ของวงแหวนต่อ โมดูลัสของยังก์ของแผ่นระนาบกว้างเพิ่มขึ้น แต่ค่าความเค้นอื่นจะค่อนข้างคงที่ ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 4.18 และถ้าค่าโมดูลัสของยังก์ของวงแหวนมีค่าน้อยกว่าของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม ค่าความเค้นเข้มจะเกิดที่ตำแหน่งขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมที่มุม 90° และ 270° และที่ตำแหน่งนี้ค่าความเค้นในแนวรัศมีจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วน โมดูลัสของยังก์ของวงแหวนต่อ โมดูลัสของยังก์ของแผ่นระนาบกว้างเพิ่มขึ้น ค่าความเค้นในแนวตั้งฉากกับรัศมีจะมีค่าลดลงเมื่อค่าอัตราส่วน โมดูลัสของยังก์ของวงแหวนต่อ โมดูลัสของยังก์ของแผ่นระนาบกว้างเพิ่มขึ้น ส่วนค่าความเค้นเฉือนจะค่อนข้างคงที่ ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 4.19

สำหรับผลของค่าความเค้นเมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนของอัตราส่วนปัวส์ซองของวงแหวนต่ออัตราส่วนปัวส์ซองของแผ่นระนาบกว้าง แสดงกราฟในรูปที่ 4.20 และ 4.21 เมื่อดูจากกราฟจะสรุปไม่ได้ว่าเมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนของอัตราส่วนปัวส์ซองของวงแหวนต่ออัตราส่วนปัวส์ซองของแผ่นระนาบกว้าง ค่าความเค้นจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร แต่เมื่อพิจารณาจากสูตรความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์จะพบว่าค่าอัตราส่วนของปัวส์ซองมีผลต่อค่าความเค้นที่เกิดขึ้น

4.1.4 ค่าปัจจัยความเค้นเข้มข้นที่ได้จากปัญหาตัวอย่างวิจัย

ค่าปัจจัยความเค้นเข้มข้นที่ได้จากปัญหาตัวอย่างวิจัยแสดงในตาราง 4.1 และ รูป 4.22 แสดงผลค่าปัจจัยความเค้นเข้มข้นที่ได้จากปัญหาตัวอย่างวิจัยในรูปของกราฟ

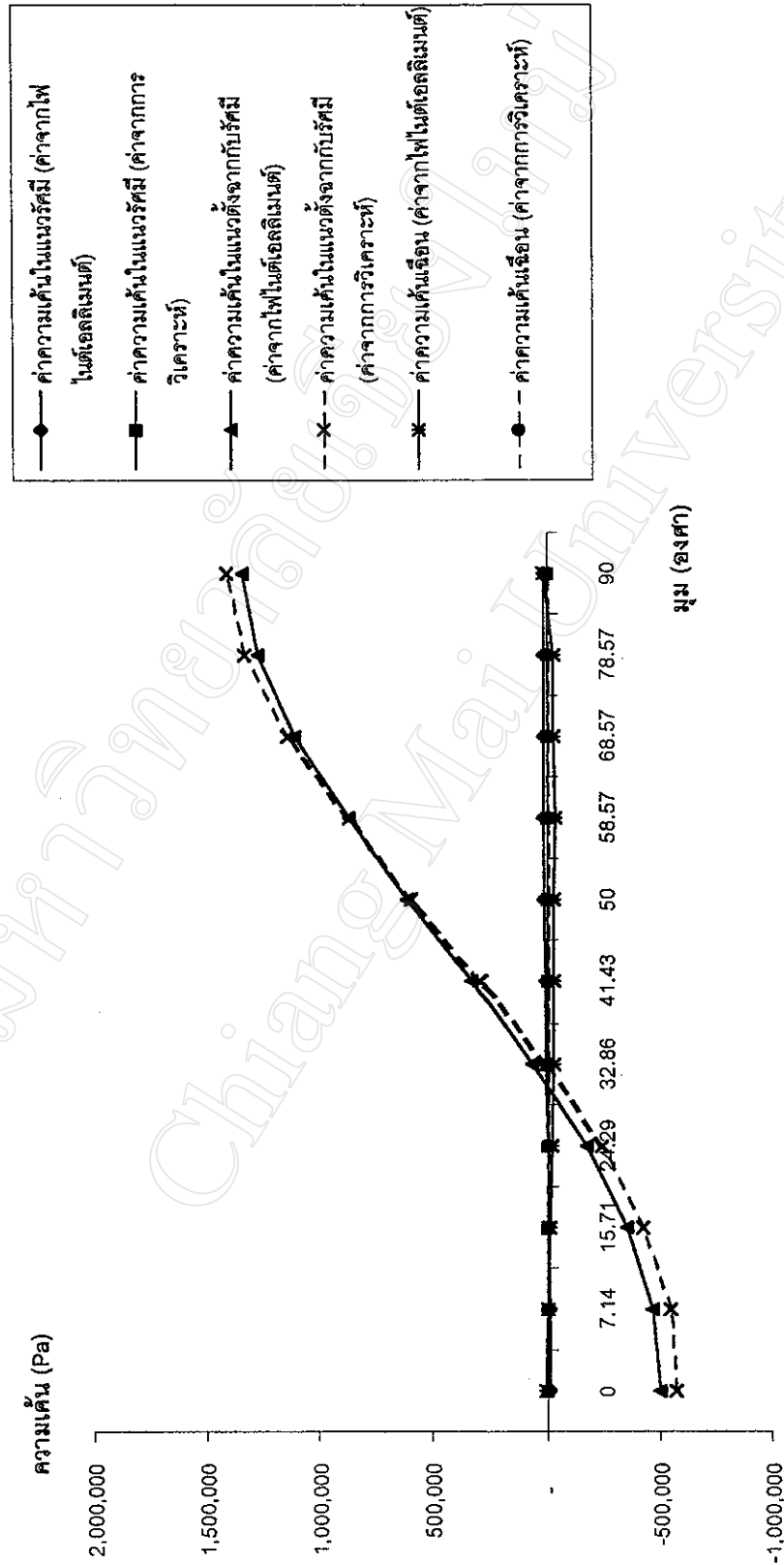
ตาราง 4.1 ค่าปัจจัยความเค้นเข้มข้นที่ได้จากปัญหาตัวอย่างวิจัย

ชนิดของวัสดุ		E_1/E_2	ค่าปัจจัยความเค้นเข้มข้นของปัญหาที่ a/b ต่างๆ							
วงแหวน	แผ่นระนาบ		$a/b=$	$a/b=$	$a/b=$	$a/b=$	$a/b=$	$a/b=$	$a/b=$	$a/b=$
			0.2	0.25	0.33	0.4	0.5	0.57	0.67	0.8
เหล็ก	อลูมิเนียม	2.86	3.83	3.83	3.85	3.87	3.94	4.02	4.23	4.85
ทังสเดน	เหล็ก	1.7	3.48	3.48	3.49	3.49	3.52	3.57	3.67	3.95
เหล็ก	ไททานเนียม	1.82	3.53	3.53	3.54	3.55	3.59	3.65	3.76	4.09
อลูมิเนียม	เหล็ก	0.35	1.79	1.8	1.84	1.88	1.98	2.08	2.24	2.52
เหล็ก	ทังสเดน	0.59	2.43	2.43	2.43	2.42	2.38	2.35	2.27	2.26
ไททานเนียม	เหล็ก	0.55	2.36	2.35	2.35	2.33	2.29	2.25	2.17	2.3

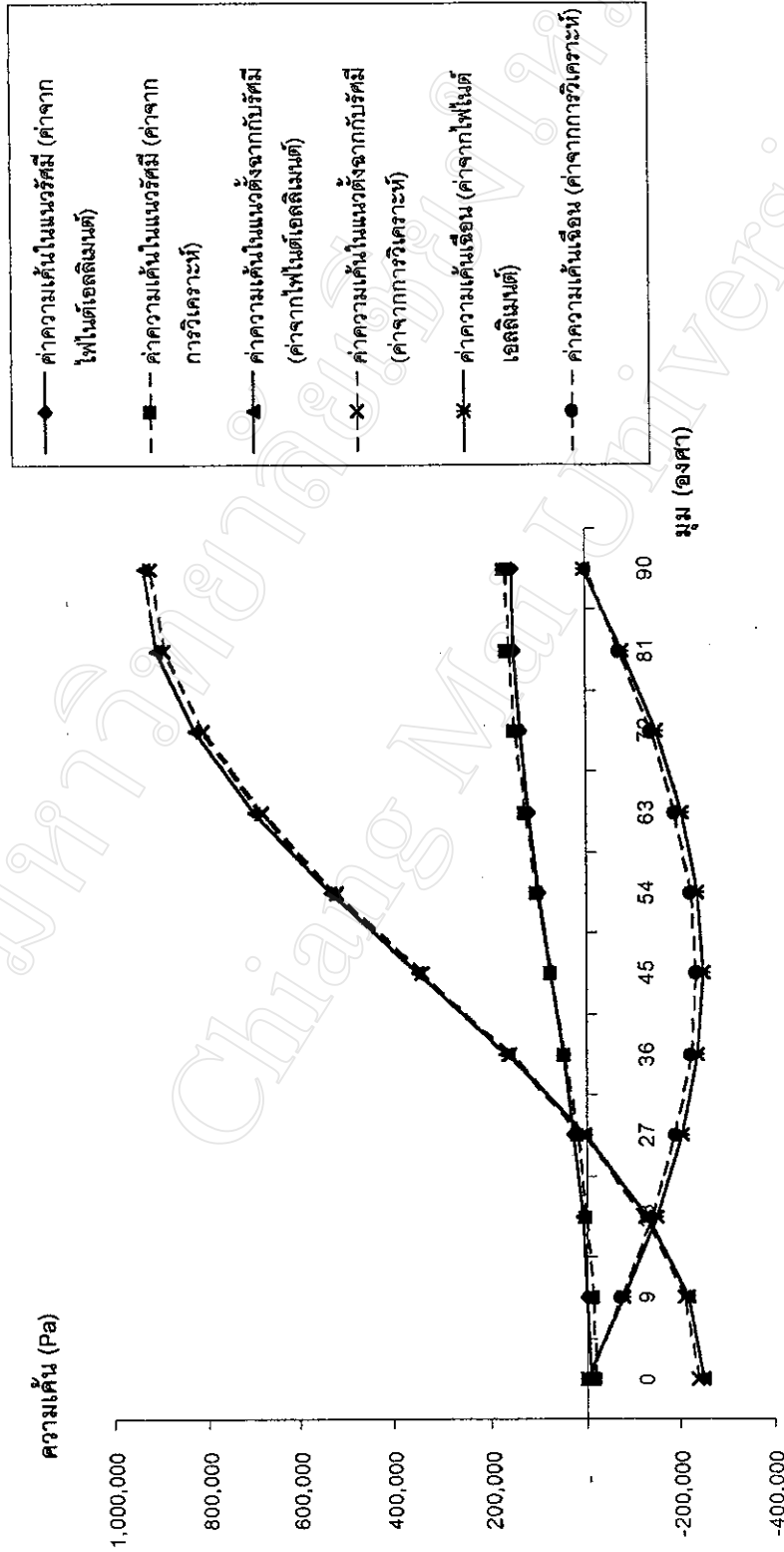
โดยที่

a/b คือ อัตราส่วนรัศมีภายในของวงแหวนต่อรัศมีภายนอกของวงแหวน

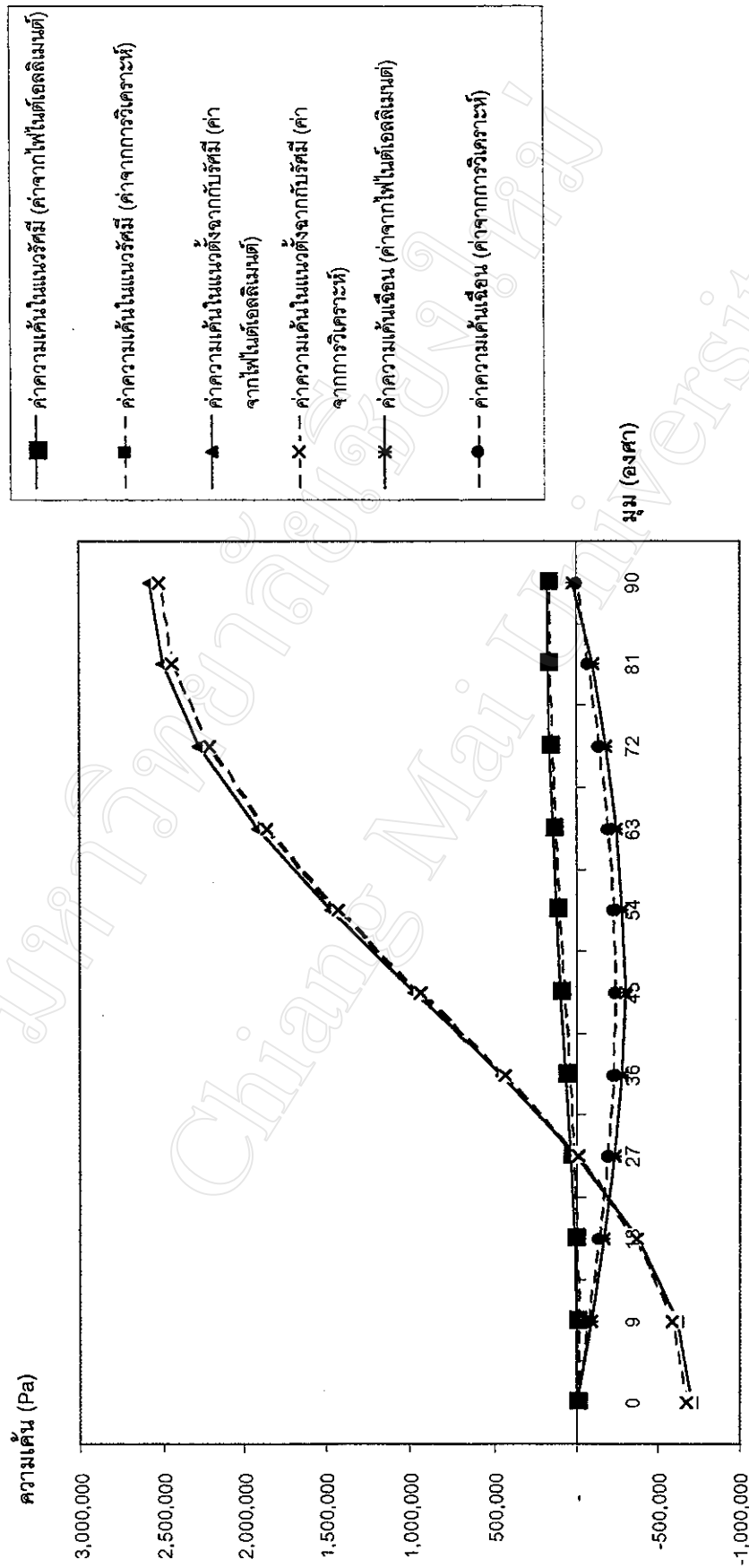
E_1/E_2 คือ อัตราส่วนโมดูลัสของยังของวงแหวนต่อ โมดูลัสของยังของแผ่นระนาบกว้าง



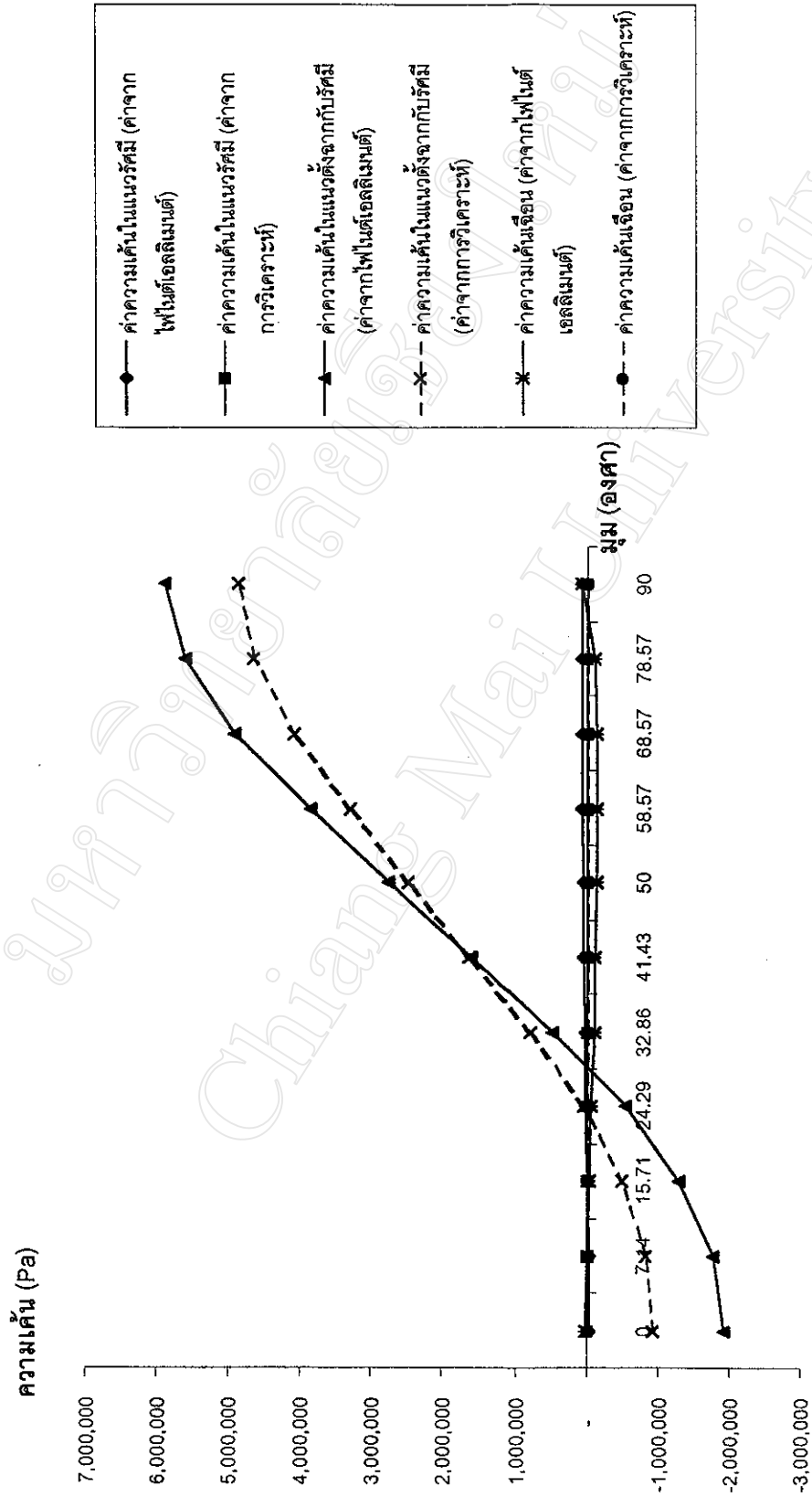
รูป 4.10 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ตำแหน่งขอบในของวงแหวน ของตัวอย่างวิจัย วัสดุของวงแหวนคืออลูมิเนียม และวัสดุของแผ่นระบายกว้างคือเหล็ก



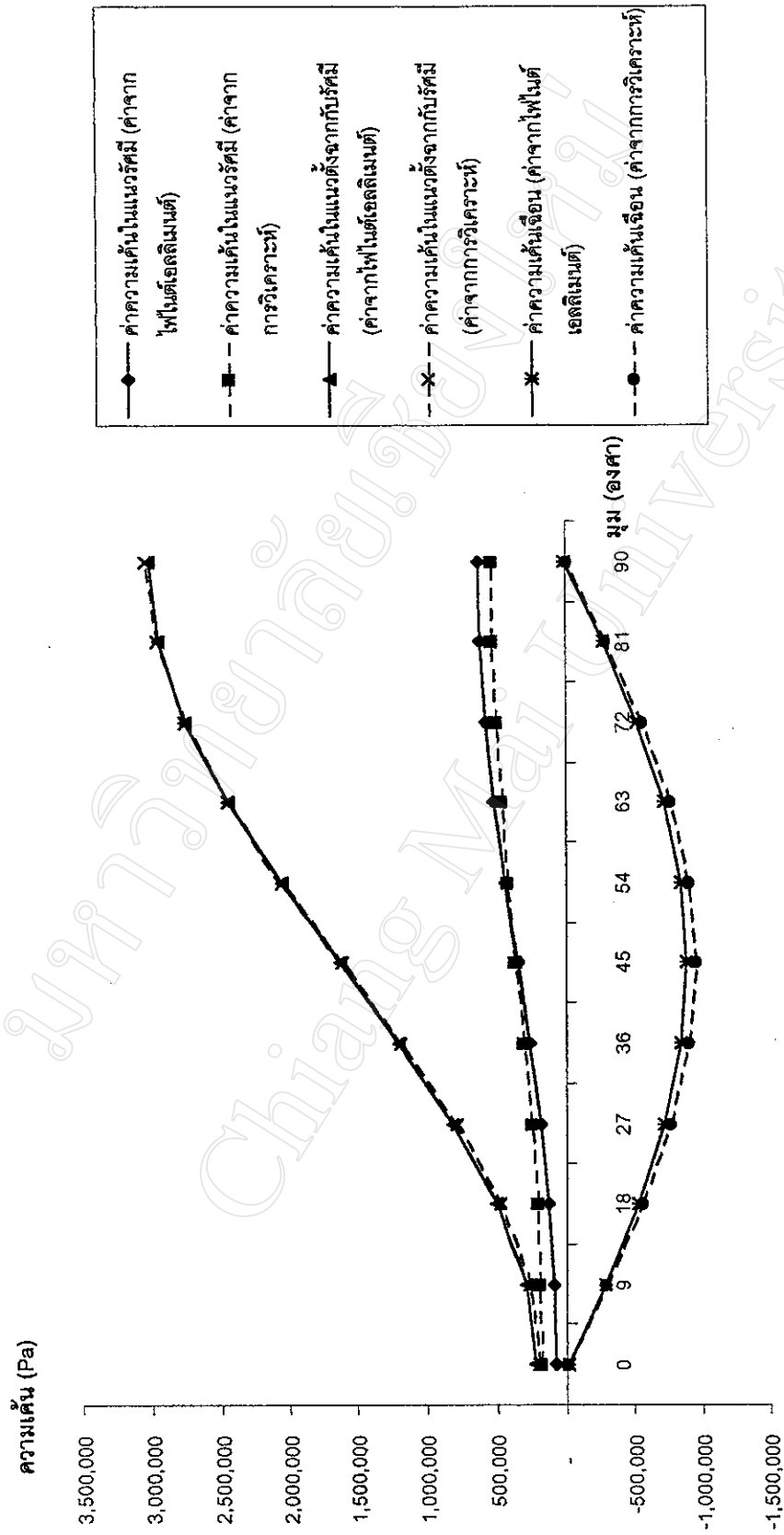
รูป 4.11 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความดันที่ตำแหน่งขอบนอกของวงแหวน ของตัวอย่างวิจัย วัสดุของวงแหวนคืออลูมิเนียม และวัสดุของแผ่นระบายกว้างคือเหล็ก



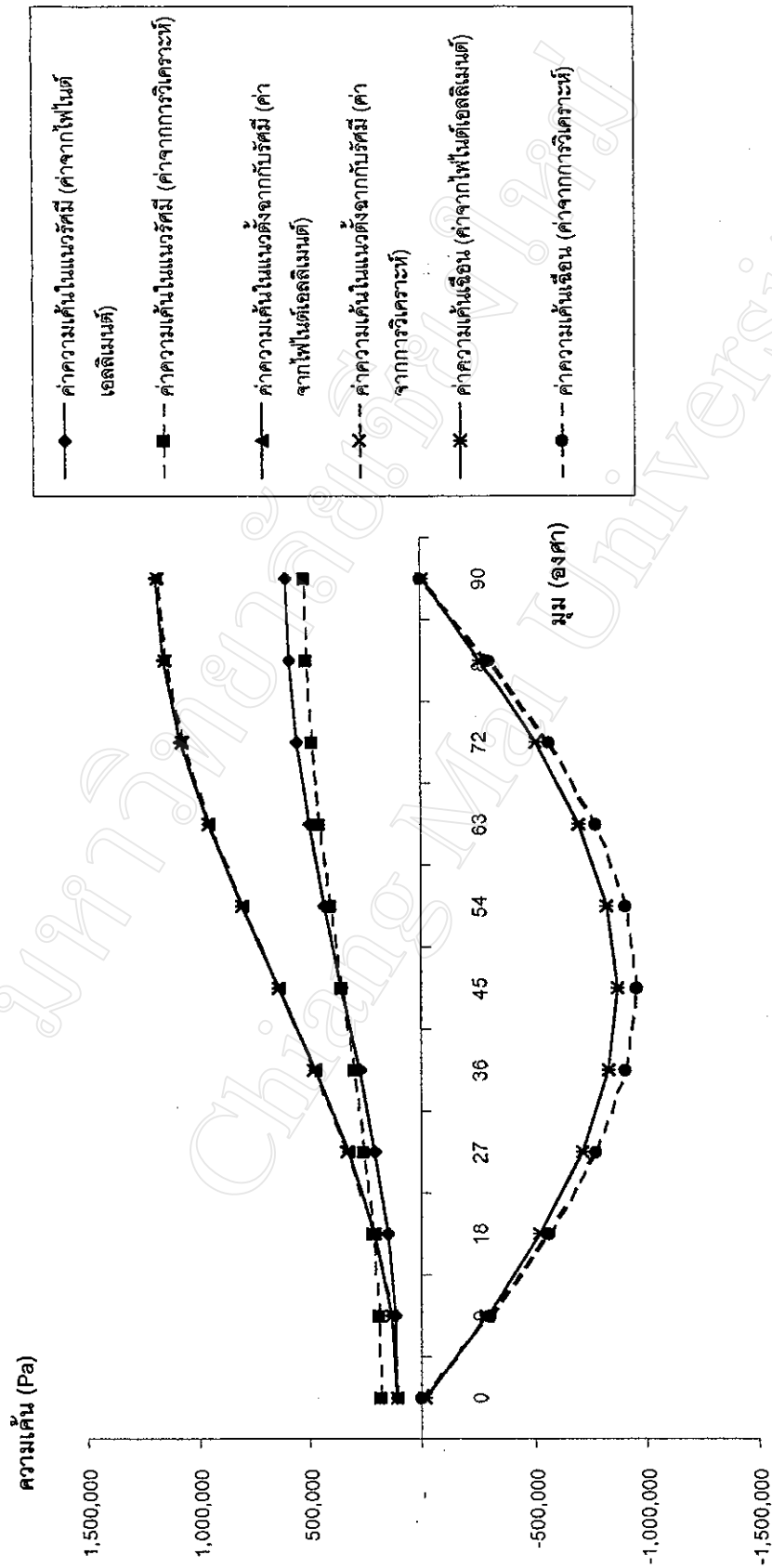
รูป 4.12 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ตำแหน่งขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม ของตัวอย่างวิจัย วัสดุของวงแหวนคืออลูมิเนียม และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างคือเหล็ก



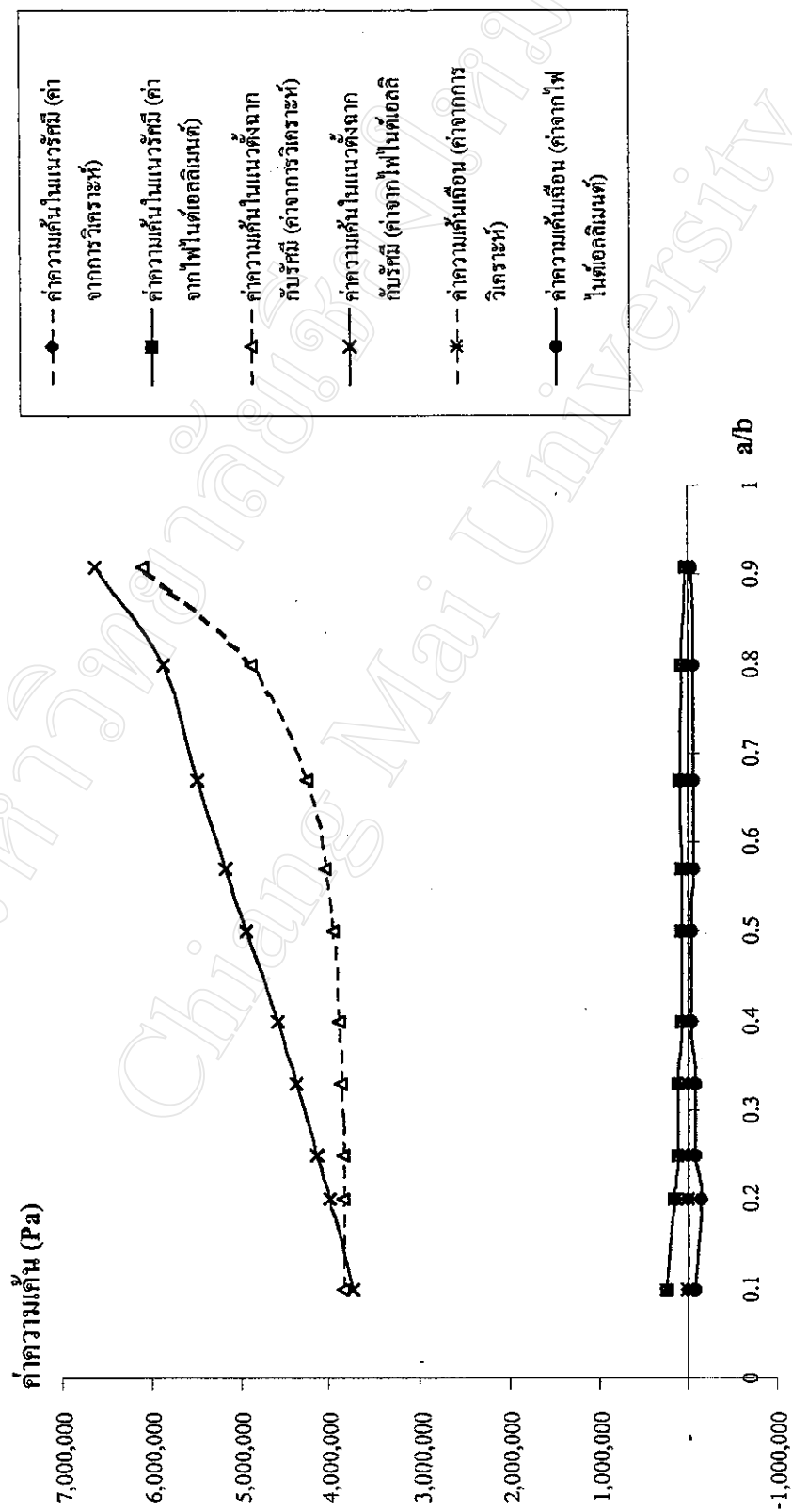
รูป 4.13 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ตำแหน่งขอบในของวงแหวน ของตัวอย่างวิจัย วัสดุของวงแหวนคือเหล็ก และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างคืออลูมิเนียม



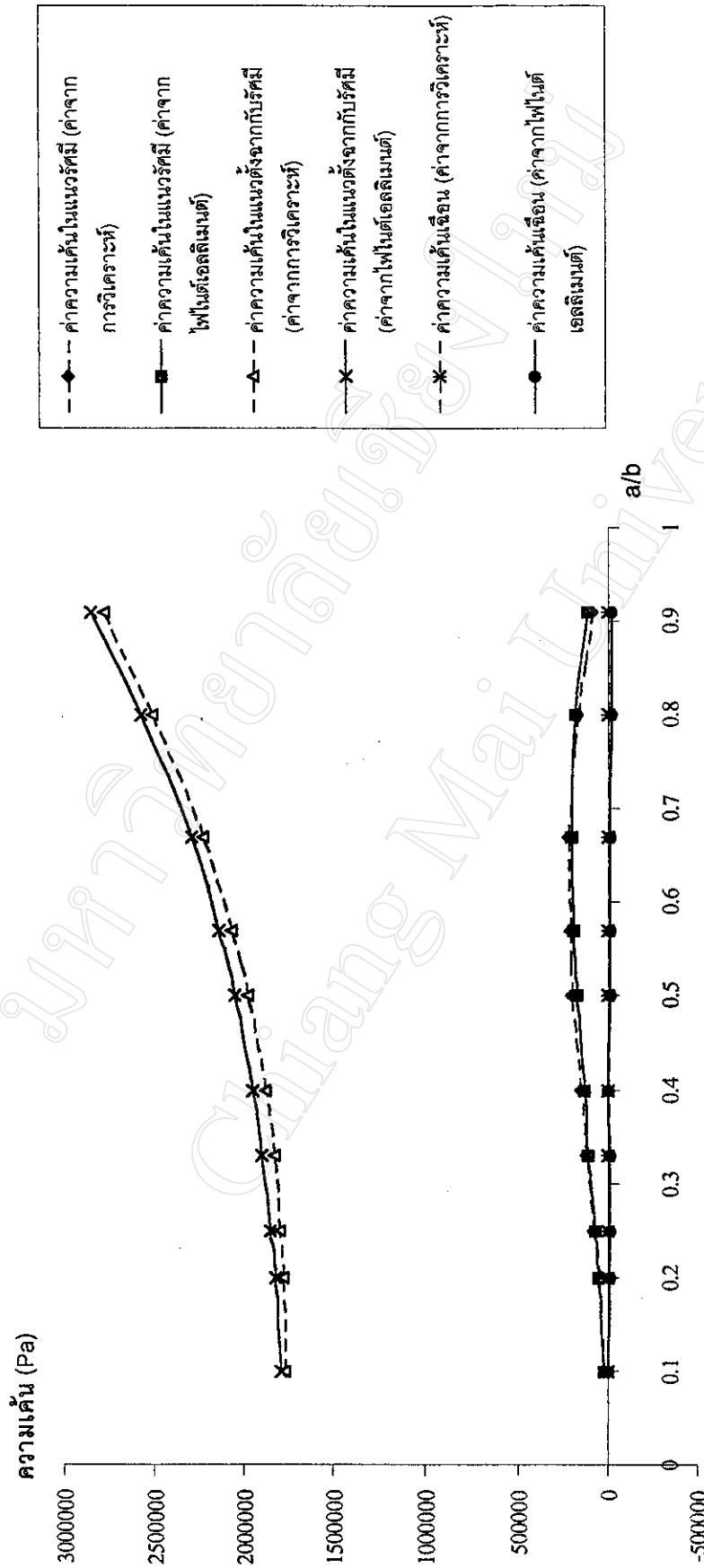
รูป 4.14 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ตำแหน่งขอบนอกของวงแหวน ของตัวอย่างวิจัย วัสดุของวงแหวนคือเหล็ก และวัสดุของแผ่นระบายกว้างคืออลูมิเนียม



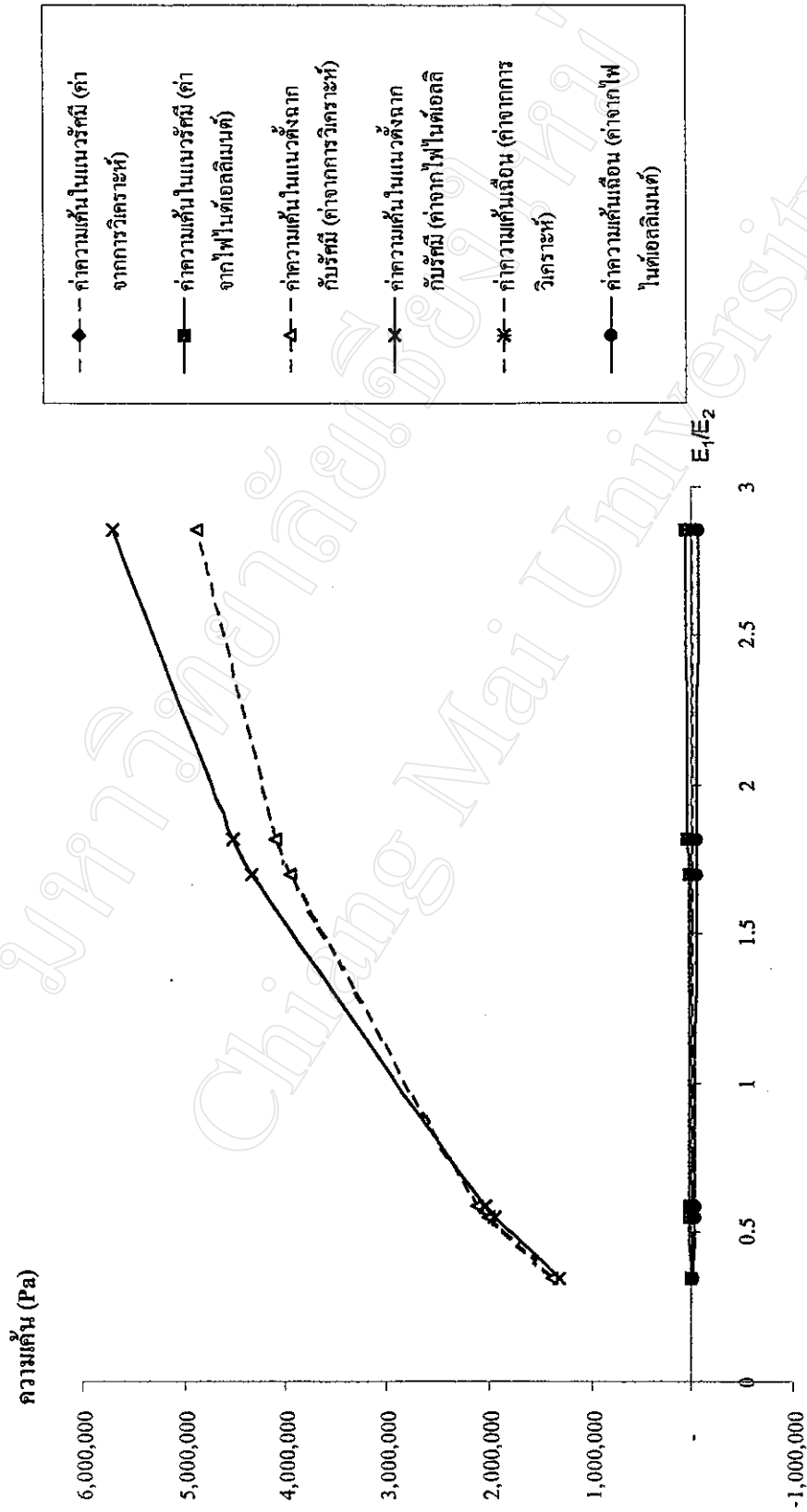
รูป 4.15 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ตำแหน่งขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูกลม ของตัวอย่างวิจัยวัสดุของวงแหวนคือเหล็ก และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างคืออลูมิเนียม



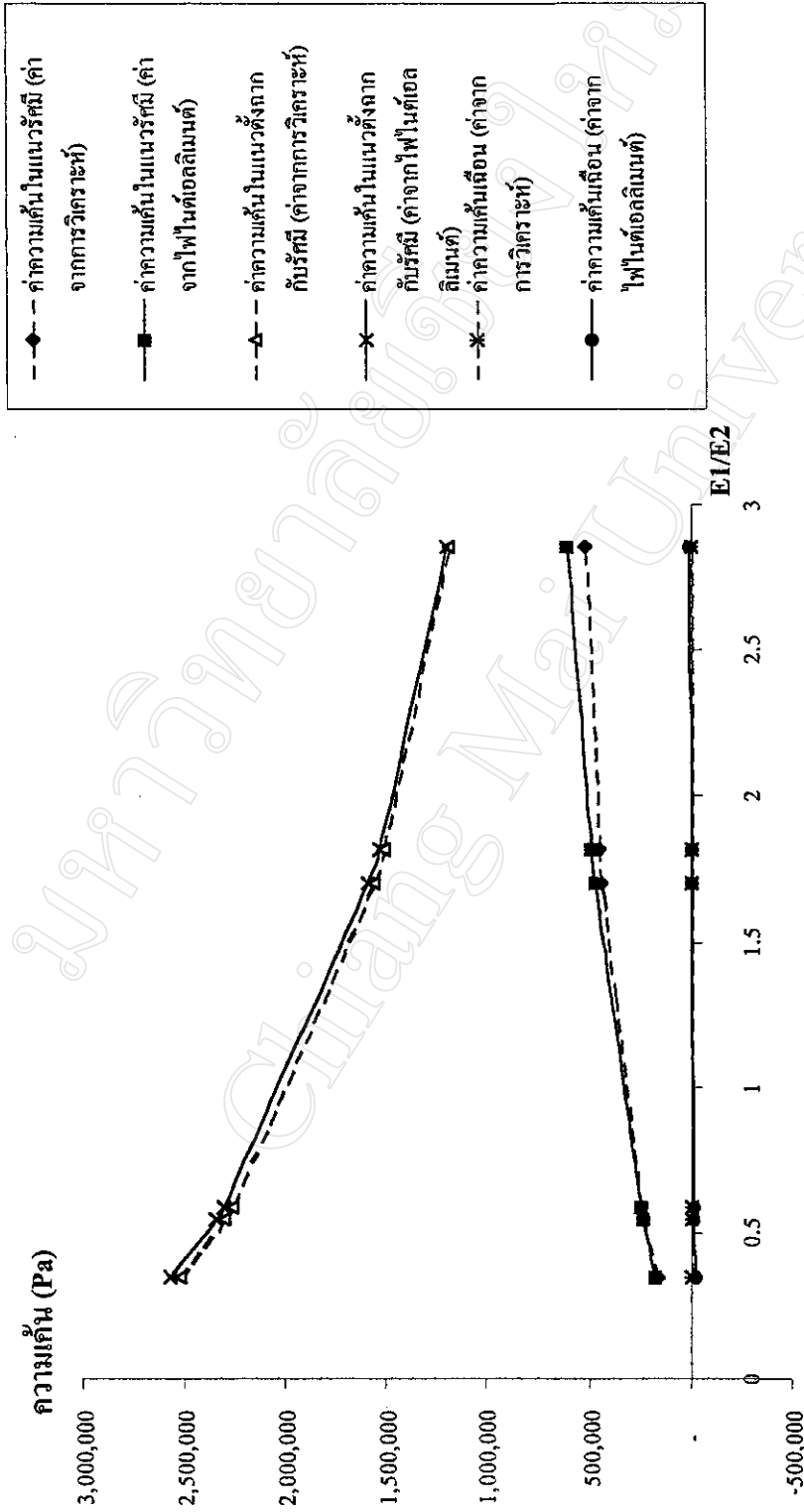
รูป 4.16 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วน a/b กับค่าความเค้น ที่ขอบในของวงแหวน มุม $\theta = 90^\circ$ ของตัวอย่างวิจัย วัสดุของวงแหวนคือเหล็ก และวัสดุของแผ่นระบายความร้อนกว้างมีรูปกลมคืออลูมิเนียม



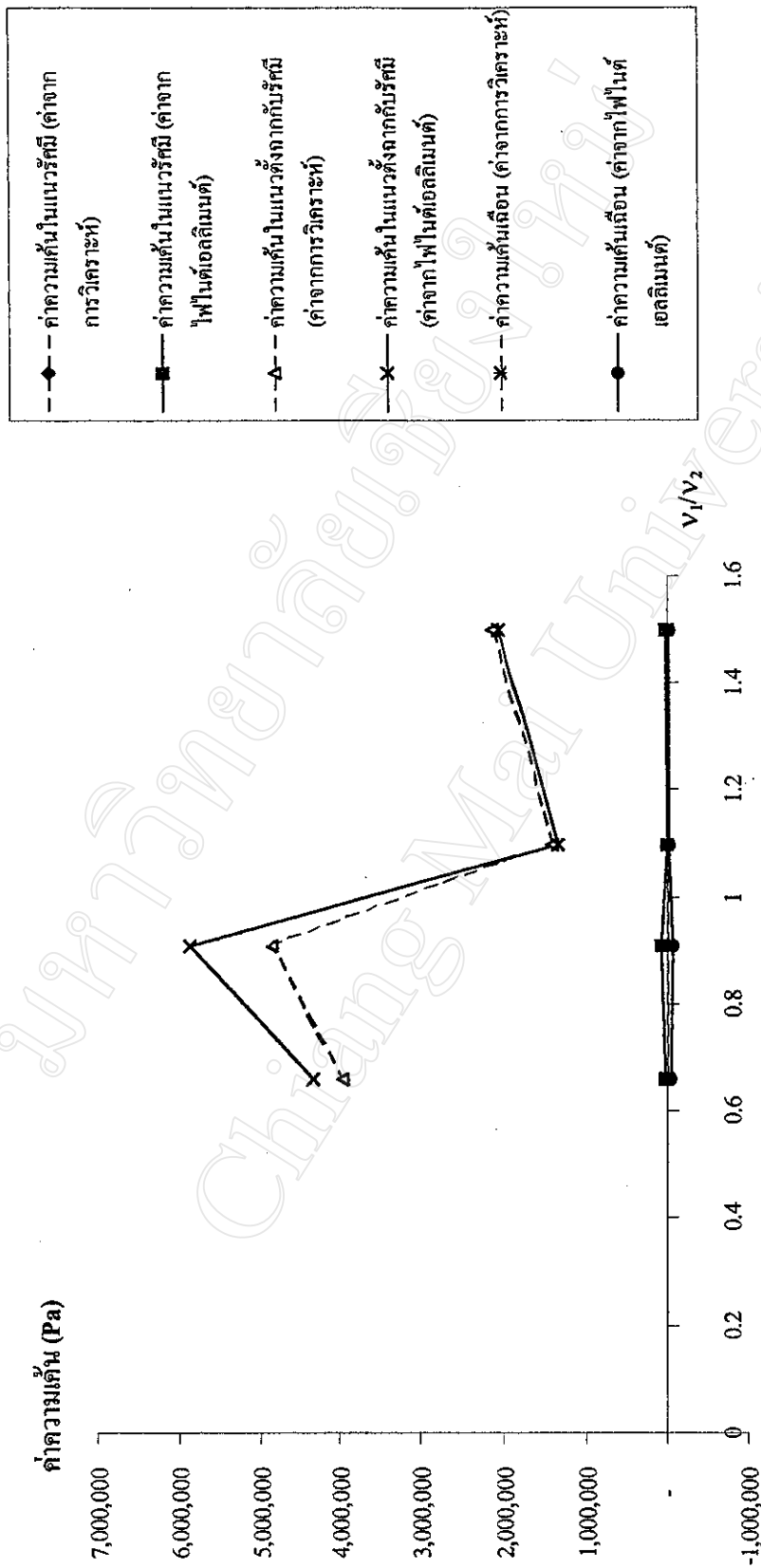
รูป 4.17 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วน a/b กับค่าความเค้น ที่ขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม มุม $\theta = 90^\circ$ ของตัวอย่างวิจัย วัสดุของวงแหวนคืออลูมิเนียม และวัสดุของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลมคือเหล็ก



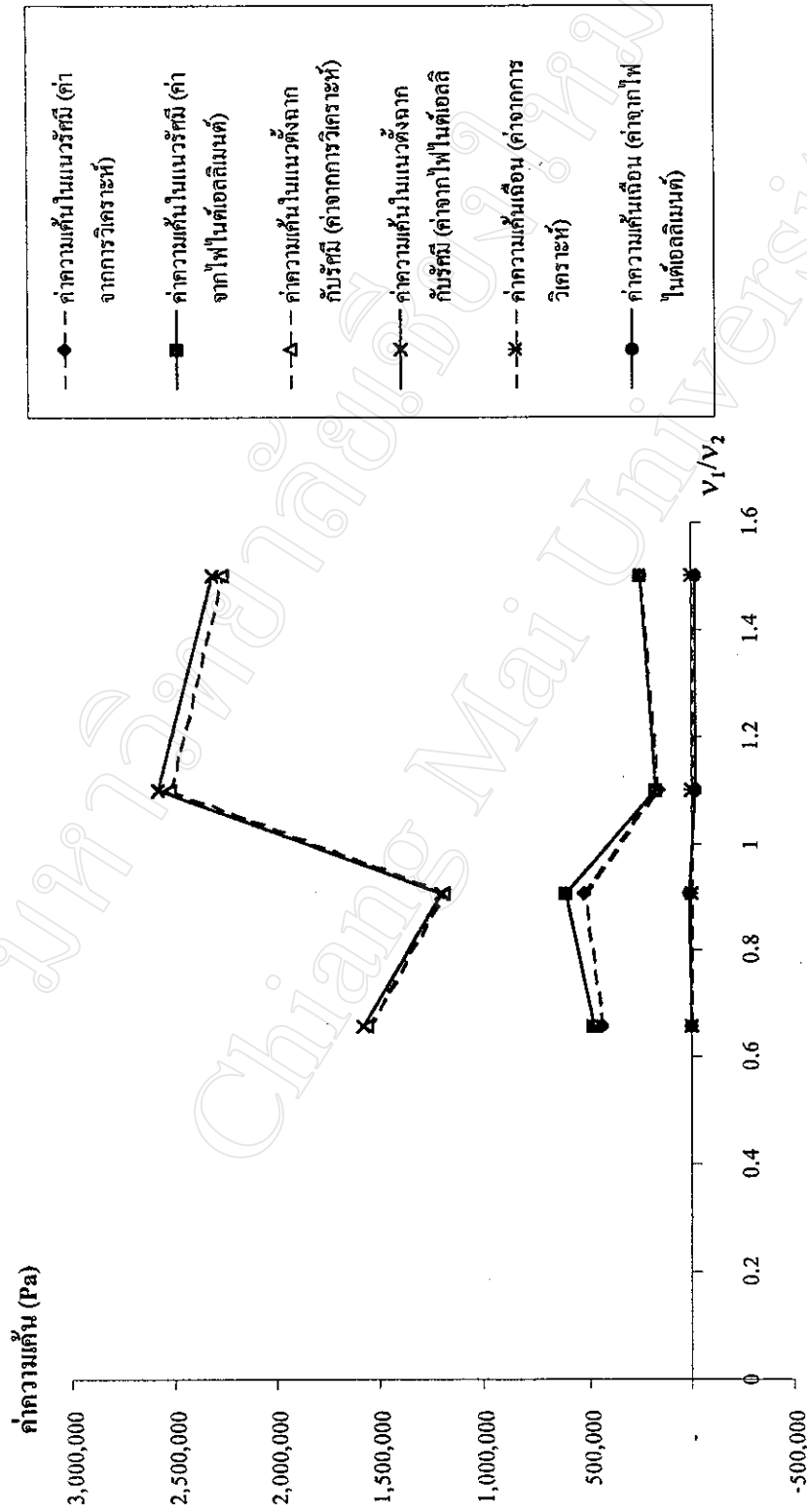
รูป 4.18 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วน E_1/E_2 กับค่าความเค้น ที่ขอบในของวงแหวน มุม $\theta = 90^\circ$ ของตัวอย่างวิจัยที่อัตราส่วน $a/b = 0.8$



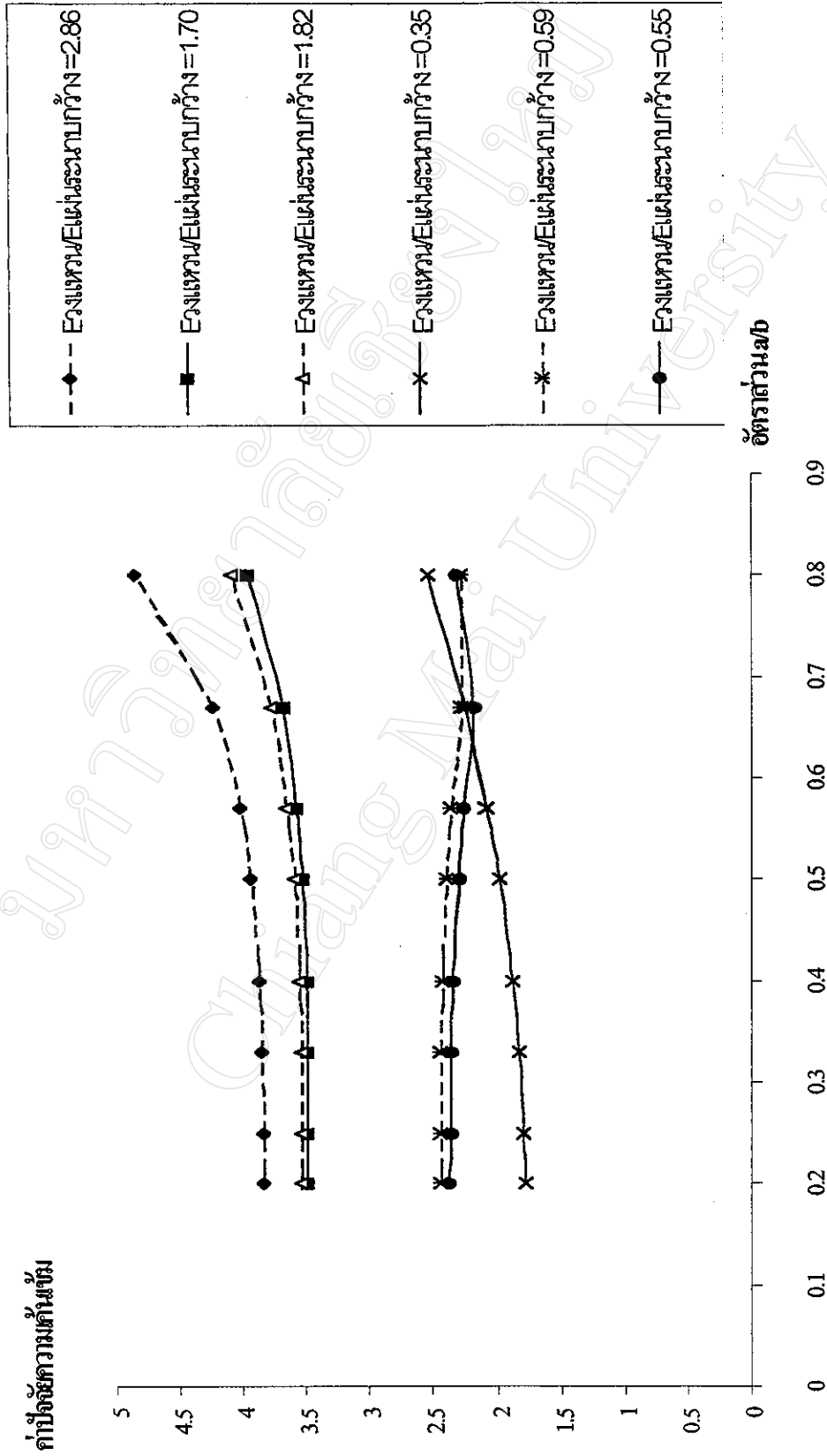
รูป 4.19 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วน E_1/E_2 กับค่าความเค้น ที่ขอบในของแผ่นขนาดกว้างมีรูปกลม มุม $\theta = 90^\circ$ ของตัวอย่างวิจัยที่อัตราส่วน $a/b = 0.8$



รูป 4.20 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วน V_1/V_2 กับค่าความดัน ที่ขอบในของวงแหวน มุม $\theta = 90^\circ$
ของตัวอย่างวิจัยที่อัตราส่วน $a/b = 0.8$



รูป 4.21 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วน V_1/V_2 กับค่าความดัน ที่ขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูปกลม มุม $\theta = 90^\circ$
ของตัวอย่างวิจัยที่อัตราส่วน $a/b = 0.8$



รูป 4.22 กราฟแสดงผลค่าปัจจัยความเค้นเสริมที่ได้จากปัญหาตัวอย่างวิจัย

4.2 การวิจารณ์ผลการวิจัย

4.2.1 จากผลการวิจัยปัญหาแผ่นระนาบกว้างมีรูกลมและมีแผ่นรูวงแหวนติดอยู่ในรูกลม โดยเป็นวัสดุต่างชนิดกัน รับแรงดึงแผ่กระจายสม่ำเสมอแนวเดียวกัน ปัจจัยที่มีผลต่อค่าของความเค้น คือ ขนาดรูกลมของแผ่นระนาบกว้าง, ขนาดของวงแหวน, คุณสมบัติของวัสดุวงแหวน และคุณสมบัติของแผ่นระนาบกว้างมีรูกลม

4.2.2 ขนาดของวงแหวนและขนาดของรูกลมของแผ่นระนาบกว้างมีผลต่อความเค้นคือ

1) เมื่อวงแหวนมีการเปลี่ยนขนาดโดยที่อัตราส่วนของรัศมีในต่อรัศมีนอกของวงแหวนเท่าเดิม ค่าความเค้นเข้มที่ได้จะมีค่าเท่าเดิมไม่เปลี่ยนแปลง เพราะว่าเป็นค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในแผ่นระนาบกว้าง

2) เมื่ออัตราส่วนของรัศมีในต่อรัศมีนอกของวงแหวน มีค่าลดลงนั่นคือวงแหวนมีขนาดใหญ่ขึ้น ค่าความเค้นเข้มที่เกิดขึ้นจะมีค่าลดลง และอัตราส่วนของรัศมีในต่อรัศมีนอกของวงแหวน มีค่าเพิ่มขึ้นนั่นคือวงแหวนมีขนาดเล็กลง ค่าความเค้นเข้มที่เกิดขึ้นจะมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับสูตรที่ได้จากการวิเคราะห์ และสอดคล้องกับทางด้านกายภาพ นั่นคือถ้าวงแหวนมีขนาดเล็กลงก็มีพื้นที่น้อยลง อิทธิพลของการกระจายความเค้นจะมากขึ้น

4.2.3 ค่าโมดูลัสของยังก็ มีผลต่อความเค้นที่เกิดขึ้น คือ ถ้าค่าโมดูลัสของยังของวงแหวนมีค่ามากกว่าค่าโมดูลัสของยังของแผ่นระนาบกว้างมีรูกลม ค่าความเค้นเข้มจะเกิดที่ตำแหน่งขอบในของวงแหวน $\theta=90^\circ$ และถ้าค่าโมดูลัสของยังของวงแหวนมีค่าน้อยกว่าค่าโมดูลัสของยังของแผ่นระนาบกว้างมีรูกลม ค่าความเค้นเข้มจะเกิดที่ตำแหน่งขอบในของแผ่นระนาบกว้างมีรูกลม $\theta=90^\circ$ สอดคล้องกับทางด้านกายภาพคือ ปัญหานี้เป็นปัญหาที่พัฒนามาจากสมการของ Kirsh ค่าความเค้นเข้มจะเกิดที่ขอบในของรูกลมที่ $\theta=90^\circ$ เมื่อทำการติดแหวนเข้าภายในรูกลม ถ้าวงแหวนเป็นวัสดุที่แข็งแรงน้อยกว่าแผ่นระนาบกว้าง อิทธิพลของการกระจายความเค้นส่งผลให้ค่าความเค้นที่ขอบในของวงแหวนมีค่าน้อยกว่าค่าความเค้นที่ขอบในของแผ่นระนาบกว้าง และถ้าวงแหวนเป็นวัสดุที่แข็งแรงกว่าแผ่นระนาบกว้าง อิทธิพลของการกระจายความเค้นส่งผลให้ค่าความเค้นที่ขอบในของวงแหวนมีค่ามากกว่าค่าความเค้นที่ขอบในของแผ่นระนาบกว้าง ซึ่งจะสามารถใช้ประโยชน์ในการลดค่าความเค้นเข้มของวัสดุที่เหมือนกับปัญหานี้โดยเลือกวัสดุวงแหวนเป็นวัสดุที่มีความแข็งแรงน้อยกว่าวัสดุของแผ่นระนาบกว้าง

4.2.4 ค่าอัตราส่วนปัวซองเป็นอีกค่าที่มีผลต่อค่าความเค้นของปัญหานี้ แต่เป็นค่าที่มีผลน้อยเมื่อเทียบกับค่าปัจจัยที่มีผลอื่น

4.2.5 ค่าความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์และค่าความเค้นที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของกรณีวัสดุของวงแหวนมีค่าโมดูลัสของยังก็มากกว่าวัสดุของแผ่นระนาบกว้าง มีค่าเปอร์เซ็นต์แตกต่างมากกว่าเปอร์เซ็นต์แตกต่างของกรณีวัสดุของวงแหวนมีค่าโมดูลัสของยังก็น้อยกว่าค่าโมดูลัสของยังของแผ่นระนาบกว้าง เนื่องจากปัญหาที่ทำการวิเคราะห์นี้ประยุกต์มากจากสมการของ Kirsh เมื่อวัสดุของวงแหวนมีค่าโมดูลัสของยังก็น้อยกว่าของแผ่นระนาบกว้าง การกระจายความเค้นจะมีค่าเปอร์เซ็นต์ต่างน้อยกว่าอีกกรณีหนึ่ง