

บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

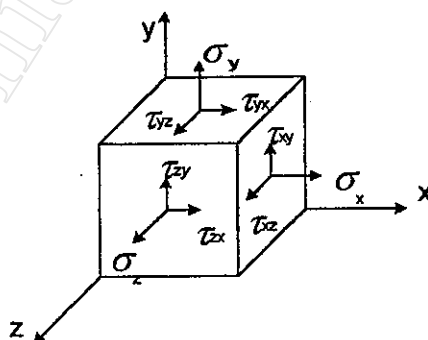
2.1 ทฤษฎีทางด้านการยืดหยุ่น

2.1.1 ความเค้น

ความเค้นเฉลี่ยบนระนาบพื้นที่ ΔA คืออัตราส่วนของแรง ΔF ที่กระทำบนพื้นที่ ΔA ต่อขนาดของพื้นที่ ΔA ที่แรงนั้นกระทำ ถ้ากำหนดให้พื้นที่ ΔA นั้นมีขนาดเล็กมาก ๆ และล้อมรอบจุด P ความเค้นเฉลี่ยจะกลายเป็นความเค้นบนระนาบที่จุด P นั้นและมีทิศทางเดียวกันกับแรงที่กระทำตามสมการ (2.1)

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.1)$$

เมื่อพิจารณาที่จุดในเนื้อวัตถุ สามารถแสดงองค์ประกอบความเค้นได้ตามรูป 2.1



รูป 2.1 องค์ประกอบความเค้น

2.1.2 สมการสมดุล

เมื่อทำการพิจารณาจุดในเนื้อวัสดุ สมการสมดุลสำหรับกรณีสามมิติ

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z = 0 \quad (2.4)$$

เมื่อ F_x , F_y และ F_z เป็นแรงภายนอกที่มากระทำต่อทุกอนุของวัสดุ (Body forces)

2.1.3 ความเครียด

สำหรับกรณีสามมิติ ความเครียดและความเครียดเฉือน คือ

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.6)$$

เมื่อ u , v และ w เป็นการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของจุดในเนื้อวัสดุในทิศทางตามแกน x แกน y และแกน z ตามลำดับ

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของจุดต่างๆในเนื้อวัสดุเป็นไปอย่างต่อเนื่องและมีค่าเดียว องค์ประกอบความเครียดจึงมีความสัมพันธ์กัน

ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียด สำหรับกรณีสามมิติ คือ

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} \quad (2.9)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.10)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.11)$$

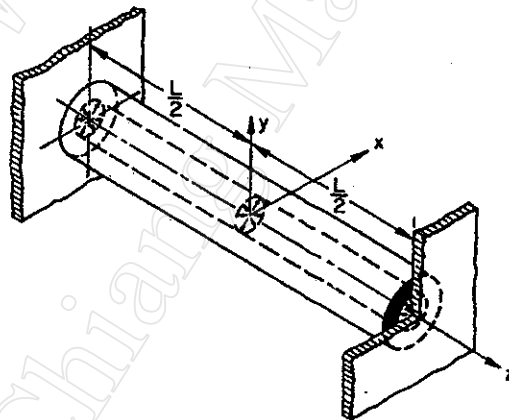
$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.12)$$

2.1.4 ปัญหาสองมิติ

ปัญหาสองมิติสองกลุ่มใหญ่ๆ ที่พบโดยทั่วไปประกอบด้วย ปัญหาความเครียดระนาบ และปัญหาความเค้นระนาบ

2.1.4.1 ความเครียดระนาบ

ปัญหาความเครียดระนาบคือปัญหาที่มีความเครียดเกิดขึ้นเฉพาะในระนาบ และองค์ประกอบความเครียดในระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบนั้นมีค่าเป็นศูนย์



รูป 2.2 ปัญหาความเครียดระนาบของทรงกระบอก
ที่มา Ugural and Fenster [15]

ยกตัวอย่าง กรณีทรงกระบอกกลวง ยึดที่หัวและท้าย ภายในทรงกระบอกมีความดันกระทำอยู่และมีแรงภายนอกกระทำที่ตรงกลางทรงกระบอก ในระนาบ x-y ดังแสดงในรูป 2.2 ทำให้ไม่มีความเครียดเกิดขึ้นในทิศทาง z ความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด สำหรับกรณีนี้คือ

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (2.13)$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_x) \quad (2.14)$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.15)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.16)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.17)$$

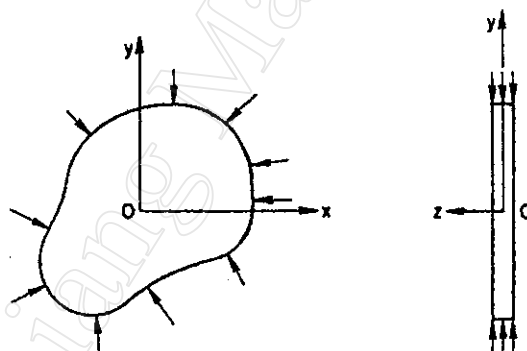
เมื่อ λ คือค่าคงที่ของลาเม

ν คืออัตราส่วนปัวส์ซอง

G คือโมดูลัสเฉือน

2.1.4.2 ความเค้นระนาบ

ปัญหาความเค้นระนาบเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นเมื่อมีองค์ประกอบความเค้นเกิดขึ้นเฉพาะในเดียวกับระนาบ และองค์ประกอบความเค้นในระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบนั้นมีค่าเป็นศูนย์



รูป 2.3 ปัญหาความเค้นระนาบของแผ่นระนาบบาง
ที่มา Ugural and Fenster [15]

ตัวอย่างของกรณีความเค้นระนาบ คือ แผ่นระนาบบางรับแรงกระทำภายนอกในระนาบ x-y ดังแสดงในรูป 2.3 ไม่มีความเค้นเกิดขึ้นในทิศทาง z ความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด (สมการของฮุคส์) สำหรับกรณีนี้คือ

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (2.19)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.21)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.22)$$

2.1.5 ฟังก์ชันความเค้น

ฟังก์ชันความเค้น คือ ฟังก์ชันที่ให้ค่าความเค้นสอดคล้องกับสมการความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเค้นในพจน์ของความเค้น (Compatibility equation) และสมการสมดุล

เมื่อลดรูปสมการสมดุล (2.2), (2.3) และ (2.4) ในกรณีสองมิติที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อวัตถุ ได้สมการ (2.23) และ (2.24) และลดรูปสมการความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเค้น (2.7) ในกรณีความเค้นระนาบตามสมการ (2.18), (2.19) และ (2.20) แล้วกำจัด τ_{xy} ออกไปโดยใช้สมการ (2.23) และ (2.24) ได้สมการ (2.25)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.25)$$

ดังนั้น ฟังก์ชันความเค้นสำหรับปัญหาความเค้นระนาบ คือฟังก์ชันที่ให้ค่าความเค้นสอดคล้องสมการ (2.23), (2.24) และ (2.25) ฟังก์ชันความเค้น Φ ที่ จี. บี. แอริ (G. B. Airy) ได้เสนอแนะไว้ มีความสัมพันธ์กับความเค้นคือ

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (2.26)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.28)$$

แทนค่าความเค้นจากสมการ (2.26), (2.27), (2.28) ลงในสมการ (2.25) ได้ Φ สอดคล้องสมการ (2.29)

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \Phi = 0 \quad (2.29)$$

ดังนั้น Φ เป็นฟังก์ชันไบฮาร์โมนิก

2.1.6 ระบบพิกัดเชิงขั้ว

สมการสมดุลสำหรับปัญหาความเค้นระนาบในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (2.31)$$

เมื่อ F_r และ F_θ เป็นแรงภายนอกที่กระทำต่อทุกอนุของวัตถุ

เมื่อไม่คิดแรงภายนอกที่กระทำต่อทุกอนุของวัตถุ ความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วที่ได้จากฟังก์ชันความเค้น $\Phi(r, \theta)$ สำหรับปัญหาความเค้นระนาบ คือ

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad (2.32)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad (2.33)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \quad (2.34)$$

เมื่อ Φ เป็นฟังก์ชันความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วสอดคล้องสมการ $\nabla^4 \Phi = 0$ โดยที่

$$\nabla^4 () = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 ()}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial ()}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 ()}{\partial \theta^2} \right)$$

ความเครียดในระบบเชิงขั้วมีค่าตามสมการ

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \quad (2.36)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \quad (2.37)$$

เมื่อ u และ v เป็นการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดในเนื้อวัสดุในทิศทางตามแนวรัศมี และแนวตั้งฉากกับแนวรัศมี ตามลำดับ

กฎของฮุคส์ (Hooke's Law) ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad (2.38)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (2.39)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \quad (2.40)$$

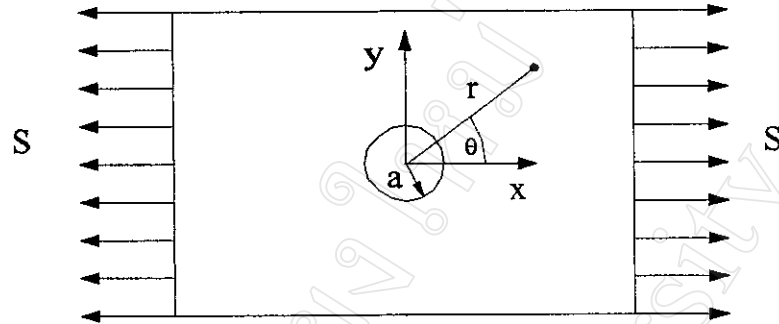
2.1.7 กรณีแผ่นระนาบกว้างมีรูกลมรับแรงดึงภายนอกแผ่กระจายสม่ำเสมอในแนวเดียวกัน

พิจารณาแผ่นระนาบกว้างมีรูกลมรัศมี a รับแรงดึงสม่ำเสมอแนวเดียวขนาด S ดังแสดงในรูป 2.4 ทำการหาค่าความเค้นในพิกัดเชิงขั้ว โดยการหาค่าความเค้นจะหาค่าโดยวิธีวิเคราะห์จากค่าฟังก์ชันความเค้น

ค่าที่ขอบของปัญหา ที่ขอบในของรูกลมไม่มีแรงกระทำ และที่ขอบนอกของแผ่นระนาบกว้างจะใช้ค่าที่ขอบเดียวกับแผ่นระนาบกว้างรับแรงดึงแนวเดียว คือ

$$r = a ; \quad \sigma_r = 0, \tau_{r\theta} = 0$$

$$r = \infty ; \quad \sigma_r = \frac{S}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{S}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -\frac{S}{2}(\sin 2\theta)$$



รูป 2.4 แผ่นระนาบกว้างมีรูกลมรับแรงดึงภายนอกแผ่กระจายสม่ำเสมอในแนวเดียวกัน

เลือกใช้ฟังก์ชันความเค้น

$$\Phi(r, \theta) = f_1(r) + f_2(r) \cos 2\theta$$

จาก $\nabla^4 \Phi = 0$ ทำการแก้สมการได้ค่า

$$f_1(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$$

$$f_2(r) = C_5 r^2 + C_6 r^4 + \frac{C_7}{r^2} + C_8$$

หาค่าความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยแทนค่าฟังก์ชันความเค้นในสมการความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว ได้ค่าความเค้นคือ

$$\sigma_r = C_1(1 + 2 \ln r) + 2C_2 + \frac{C_3}{r^2} - (2C_5 + \frac{6C_7}{r^4} + \frac{4C_8}{r^2}) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = C_1(3 + 2 \ln r) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + (2C_5 + 12C_6 r^2 + \frac{6C_7}{r^4}) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = (2C_5 + 6C_6 r^2 - \frac{6C_7}{r^4} - \frac{2C_8}{r^2}) \sin 2\theta$$

เทียบค่าที่ขอบกับความเค้นที่ได้หาค่าคงที่ ได้ค่าคงที่คือ

$$C_1 = 0, C_2 = \frac{S}{4}, C_3 = -\frac{a^2 S}{2}, C_5 = -\frac{S}{4}, C_6 = 0, C_7 = -\frac{a^4 S}{4}, C_8 = \frac{a^2 S}{2}$$

แทนค่าคงที่ลงในสมการความเค้น ได้สมการความเค้นสำหรับปัญหานี้คือ

$$\sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \quad (2.41)$$

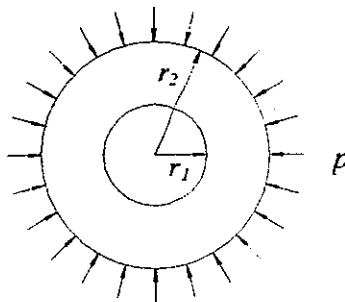
$$\sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (2.42)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \quad (2.43)$$

สมการความเค้นที่ได้จากกรณีแผ่นระนาบกว้างรับแรงดึงภายนอกแผ่กระจายสม่ำเสมอในแนวเดียวกัน ก็คือ สมการของ Kirsh เมื่อแทนค่า r ด้วยรัศมีของรูกลม จะพบว่าค่าความเค้นเข้มที่เกิดขึ้นจะเป็น 3 เท่าของของค่าความเค้นที่กระทำที่ขอบแผ่นระนาบกว้าง และเกิดค่าความเค้นเข้มที่ตำแหน่ง มุม $\theta = 90^\circ$

2.1.8 กรณีแหวนวงกลมรับความดันสม่ำเสมอภายนอก

พิจารณาแหวนวงกลมรัศมีภายใน r_1 รัศมีภายนอก r_2 รับความดันสม่ำเสมอภายนอก ขนาด p ดังแสดงในรูป 2.5 ทำการหาค่าความเค้นในพิกัดเชิงขั้ว โดยการหาค่าความเค้นจะหาค่าโดยวิธีวิเคราะห์จากค่าฟังก์ชันความเค้น



รูป 2.5 แหวนวงกลมรับความดันสม่ำเสมอภายนอก

ค่าที่ขอบของปัญหา

$$\begin{aligned} r=r_1 & ; \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \\ r=r_2 & ; \quad \sigma_r = -p, \quad \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned}$$

ฟังก์ชันความเค้นที่เลือกใช้

$$\Phi(r) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D$$

ค่าความเค้นได้จากการแทนค่าฟังก์ชันความเค้นลงในสมการความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว (2.32), (2.33) และ (2.34)

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

แทนค่า $B=0$ เพื่อที่จะได้การเคลื่อนตัวเพียงค่าเดียว ซึ่งจะใช้ได้กับค่าที่ขอบของปัญหานี้ (อ้างอิงจาก Little [9])

ค่าความเค้นของกรณีนี้คือ

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C$$

ทำการแทนค่าที่ขอบในสมการความเค้น ทำการหาค่าคงที่ได้

$$A = \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2}, \quad 2C = \frac{-r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2}$$

ความเค้นสำหรับกรณีนี้คือ

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \quad (2.44)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \quad (2.45)$$

2.2 ทฤษฎีทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (Approximation Method) ซึ่งใช้หลักการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเนื้อที่หลายๆชิ้นที่เรียกว่า เอลิเมนต์ เอลิเมนต์ต่างๆเหล่านี้อาจจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้านใดก็ได้ แล้วสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์โดยสมการที่สร้างขึ้นมานี้จะต้องสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาได้ประกอบกันเข้าตามเงื่อนไขที่จุดต่อเป็นระบบสมการชุดใหญ่ ซึ่งความหมายทางกายภาพก็คือการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมเข้าด้วยกันทำให้เกิดเป็นรูปร่างตามปัญหา จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ให้มาลงในระบบสมการชุดใหญ่ แล้วทำการแก้สมการดังกล่าว ได้ผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการที่ตำแหน่งจุดต่อต่างๆ

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับกลศาสตร์ของแข็งในสองมิติ

สมการที่ได้จะเป็นความสัมพันธ์ระหว่างการขจัด ความเครียด และความเค้น ภายในเนื้อวัสดุภายใต้การกระทำของแรงภายนอก เอลิเมนต์ที่พิจารณาจะเป็นเอลิเมนต์ที่มีสนามภายในเป็นสนามของการขจัด (Displacement-base element) โดยมีความสัมพันธ์ของความเครียดและความเค้น คือ

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\} \quad (2.46)$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (2.47)$$

เมื่อ

$\{u\}$ คือ เวกเตอร์ของสนามการขจัดในเอลิเมนต์

$[D]$ คือ เมตริกซ์ของโอเปอเรเตอร์อนุพันธ์ (Derivative operator matrix)

$\{\varepsilon\}$ คือ เวกเตอร์ของสนามความเครียดในเอลิเมนต์

$[E]$ คือ เมตริกซ์ของความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดภายใน
สภาวะการยึดหยุ่น

$\{\sigma\}$ คือ เวกเตอร์ของสนามความเค้นภายในเอลิเมนต์

สนามการขจัดโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นค่าสนามภายในเอลิเมนต์และเป็นค่าฟังก์ชันของการขจัดที่โหนด กล่าวคือ

$$\{u\} = [N]\{d\} \quad (2.48)$$

เมื่อ

$[N]$ คือ ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function) ซึ่งจะขึ้นอยู่กับรูปร่างของเอลิเมนต์
 $\{d\}$ คือ ค่าการขจัดที่จุดต่อของเอลิเมนต์เป็นค่าเวกเตอร์ที่แยกมาจาก
 เวกเตอร์การขจัดของชิ้นงาน $\{D\}$ ที่ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของการแก้
 สมการ $[K]\{D\} = \{F\}$

เวกเตอร์การขจัดของชิ้นงานหาได้จาก

$$\{D\} = [K]^{-1} \{F\} \quad (2.49)$$

เมื่อ

$\{D\}$ คือ เวกเตอร์ของการขจัดของชิ้นงาน
 $[K]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแรงของชิ้นงาน (Global stiffness matrix) เป็น
 เมตริกซ์รวมที่ประกอบจาก เมตริกซ์ความแข็งแรง (Stiffness
 matrix) ของทุกเอลิเมนต์
 $\{F\}$ คือ เวกเตอร์ของภาระที่กระทำกับชิ้นงาน (Global force vector) เป็น
 เวกเตอร์รวมที่ประกอบมาจากเวกเตอร์ของแรงที่กระทำที่จุดต่อ
 (Element force vector)

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของการวิเคราะห์ความเค้นสำหรับกลศาสตร์ของแข็งใน
 สองมิติ คือ

$$[k]\{d\} = \{f\} \quad (2.50)$$

เมื่อ

$[k]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแรงของเอลิเมนต์
 $\{f\}$ คือ เวกเตอร์ของแรงที่กระทำที่จุดต่อ

โดยที่ $[K]$ หาได้จาก

$$[K] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (2.51)$$

เมื่อ

$[B]$ คือ เมตริกซ์ของอนุพันธ์ของสนามตัวแปร

$[E]$ คือ เมตริกซ์ของความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดภายใน
สภาวะการยึดหยุ่น

V คือ ปริมาตรของเอลิเมนต์