

บทที่ 4

การวางสลับตำแหน่งข้อมูล

4.1 บทนำ

ในทางปฏิบัติของสื่อสารเข้ารหัส ส่วนใหญ่จะมีความผิดพลาดซึ่งไม่เป็นแบบสุ่มและรหัสแก้ไขความผิดพลาดส่วนใหญ่ก็ถูกวิเคราะห์และออกแบบขึ้นมาใช้งานได้ผลดีกับช่องสัญญาณเข้ารหัสที่มีรูปแบบความผิดพลาดที่เป็นแบบสุ่ม แม้จะมีการออกแบบรหัสแก้ไขความผิดพลาดที่เหมาะสมสำหรับแก้ไขความผิดพลาดแบบเบิสต์ ก็ตาม แต่การนำมาใช้งานค่อนข้างยุ่งยาก

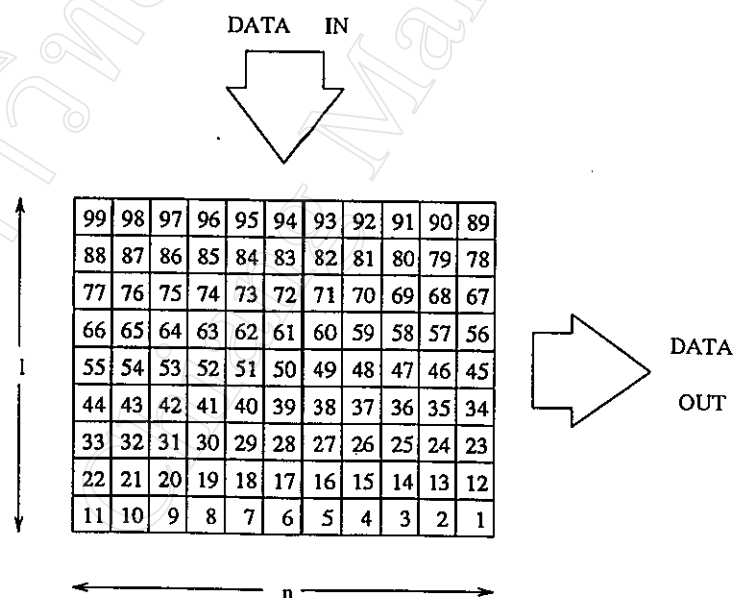
ในกรณีที่พิจารณาช่องสื่อสารเข้ารหัสที่มีความผิดพลาดเป็นแบบเบิสต์นั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการแปลงรูปแบบการเกิดความผิดพลาดแบบเบิสต์ดังกล่าวให้เป็นอย่างน้อยใกล้เคียงรูปแบบความผิดพลาดแบบสุ่ม และวิธีการหนึ่งที่เป็นที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือการวางสลับตำแหน่งข้อมูล (Interleaving) ก่อนที่จะเข้ารหัสเพื่อเป็นการทำให้ตัวถอดรหัสที่ภาครับมองเห็นรูปแบบความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีรูปแบบคล้ายความผิดพลาดแบบสุ่ม

ตัววางสลับตำแหน่งข้อมูล (Interleaver) ซึ่งถูกกำหนดให้อยู่หลังตัวเข้ารหัส (Encoder) และอยู่ก่อน ตัวส่ง (Transmitter) จะทำหน้าที่จัดเรียงลำดับข้อมูลที่เข้ารหัสแล้วเสียใหม่ และที่ประกอบกันคือตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลกลับ (Deinterleaver) จะทำหน้าที่กลับกัน ณ ที่ตัวรับ โดยจะถูกกำหนดให้อยู่ก่อนที่ข้อมูลที่ได้รับได้จะถูกส่งเข้าตัวถอดรหัส

การประยุกต์ใช้งานการวางสลับตำแหน่งข้อมูลส่วนใหญ่จะใช้ร่วมกับรหัสแบบบล็อก (Block Codes) จึงมักเรียกว่าตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลแบบบล็อก (Block Interleaver) หลักการทำงานของตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลแบบบล็อกนั้นจะแบ่งขบวนข้อมูลออกเป็น ส่วน ๆ ในลักษณะสองมิติ กล่าวคือ จะจัดเก็บข้อมูลในแนวแถว (Row) และส่งข้อมูลออกในแนวสดมภ์ (Column) ในทางตรงกันข้ามกันที่ตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลกลับก็จะจัดเก็บข้อมูลที่รับได้ในแนวสดมภ์แล้วส่งไปยังตัวถอดรหัสในแนวแถว ดังนั้นความผิดพลาดที่เกิดในช่องสื่อสารที่เป็นแบบเบิสต์ หรือเกิดติดกันเป็นกลุ่มก็จะถูกแยกออกจากกันหลังจากผ่านตัววางสลับตำแหน่งข้อมูล ด้วยระยะห่างที่เท่ากับจำนวนของแถวของตัววางสลับตำแหน่งข้อมูล

ในบางกรณีที่ต้องใช้รหัสแบบคอนวอลูชันนอล จำเป็นต้องใช้ตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลแบบเข้าจังหวะ (Synchronous Interleaving) [22] แต่ในงานวิจัยนี้จะไม่พิจารณา กรณีของการใช้รหัสแบบคอนวอลูชันนอล ซึ่งยุ่งยากและไม่ตรงกับวัตถุประสงค์ของงานวิจัยสำหรับตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลมีค่าเท่ากับขนาดความยาวของรหัสแบบบล็อกที่เข้ามา และจำนวนแถวของตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลจะเรียกว่าเป็นความลึกของการวางสลับตำแหน่งข้อมูล (Depth of the Interleaving) ซึ่งงานวิจัยนี้จะพิจารณา ความสัมพันธ์ระหว่างความลึกของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลกับจำนวนรอบของการยกกำลัง (Iterated Power) ของเมตริกซ์ส่งผ่านของแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟที่จำลองแบบของการเกิดความผิดพลาดในช่องสื่อสาร ซึ่งการดำเนินการนี้จะเป็นการทำให้ช่องสื่อสารเสมือนว่าเกิดความผิดพลาดแบบสุ่มมากขึ้นกว่าความเป็นจริงที่ความผิดพลาดเกิดเป็นแบบเบิร์ต

การทำงานของตัววางสลับตำแหน่งข้อมูล สามารถแสดงได้ด้วยเมตริกซ์ขนาด $1 \times n$ โดยที่ 1 คือความลึกของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลและ n คือความยาวของรหัส ดังรูป 4.1

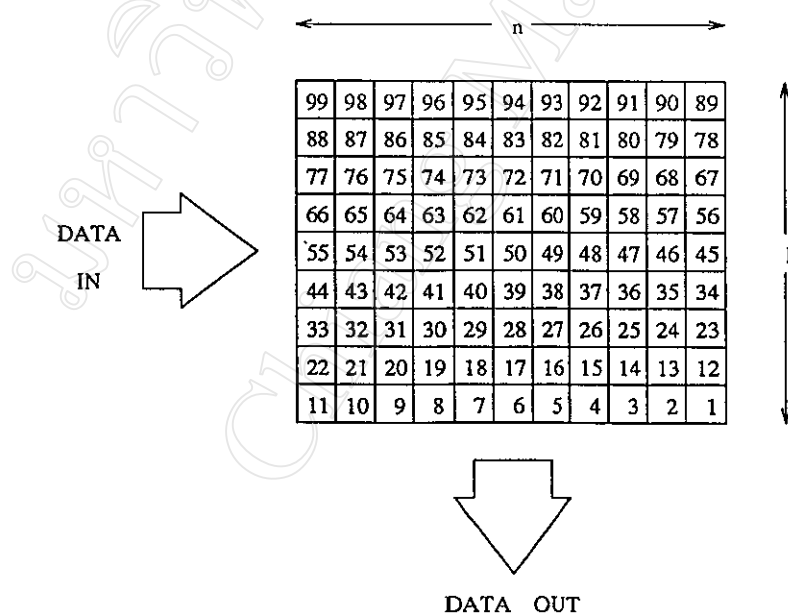


รูป 4.1 ตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลขนาด $1 \times n$

การวางสลับตำแหน่งของข้อมูลสามารถทำได้ดังนี้ เริ่มแรกที่ตัวส่งขบวนข้อมูลจะถูกแบ่งออกเป็นบล็อกความยาว n บิต และอ่านเข้าสู่แถวลำดับ (Array) ในแนวแถว หลังจากบล็อกของข้อมูล จำนวน 1 บล็อกถูกเก็บเต็มแถวลำดับแล้วตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลก็จะส่งข้อมูลออกในแนวสดมภ์ ตัวอย่างของแถวลำดับดังในรูป 4.1 ค่า n เท่ากับ 11 และ 1 เท่ากับ 9 ระหว่างการอ่านข้อมูลเข้าและอ่านข้อมูลออก แถวลำดับนั้น ลำดับของข้อมูลจะถูกจัดเรียงใหม่จาก 1 2 3 4 ... เป็น 1 12 23 34 ... ตามลำดับ ตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลกลับ จะทำงานกลับกันที่ตัวรับ โดยทำการจัดเรียงข้อมูลที่ผ่านมาการวางสลับตำแหน่งมาแล้วกลับสู่ลำดับข้อมูลที่มีเหมือนเดิมก่อนการวางสลับตำแหน่ง ตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลกลับ ซึ่งมีขนาดของแถวลำดับเท่ากับตัววางสลับตำแหน่ง จะแบ่งข้อมูลที่รับมาออกเป็นบล็อกขนาด 1 บิต และอ่านเก็บไว้ในแนวสดมภ์ หลังจากตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลกลับอ่านบล็อกข้อมูล จำนวน n บล็อก จนเต็มแถวลำดับแล้ว จะส่งข้อมูลที่ถูกวางสลับตำแหน่งกลับออกจากแถวลำดับในแนวแถว ลำดับของขบวนข้อมูลที่รับมาก็จะถูกจัดเรียงใหม่ จาก 1 12 23 34 ... เป็น 1 2 3 4 ... ตามลำดับ ดังนั้นจึงได้ลำดับของขบวนข้อมูลกลับคืนเหมือนเดิมที่ตัวรับ

การทำงานของตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลกลับสามารถแสดงได้ด้วยเมตริกซ์ ขนาด

$1 \times n$ ดังรูป 4.2 แต่ลักษณะการอ่านข้อมูลเข้าและอ่านข้อมูลออกจะกลับกันกับตัววางสลับตำแหน่งข้อมูล ในรูป 4.1

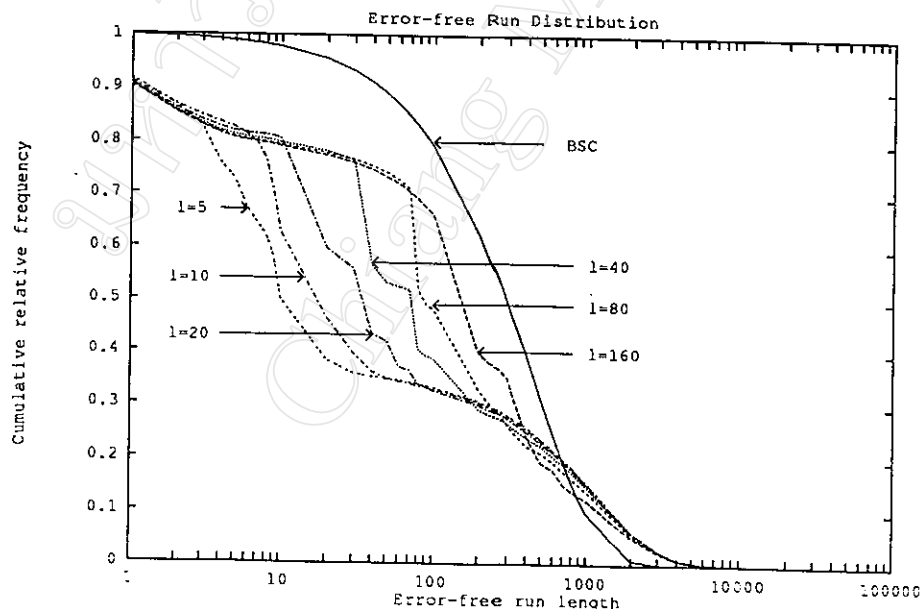


รูป 4.2 ตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลกลับขนาด $1 \times n$

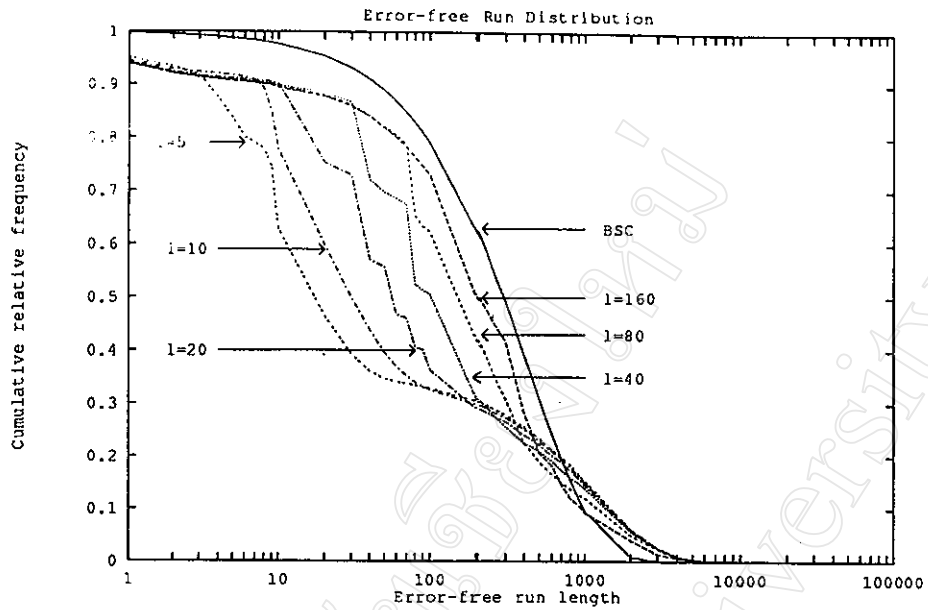
4.2 ความลึกของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลกับการเป็นแบบสุ่มของรูปแบบความผิดพลาด

ดังกล่าวแล้วข้างต้นว่าการวางสลับตำแหน่งข้อมูลจะทำให้ช่องสื่อสารเข้ารหัส มีความผิดพลาดเป็นแบบสุ่มมากขึ้น ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการศึกษาแนวความคิดดังกล่าว

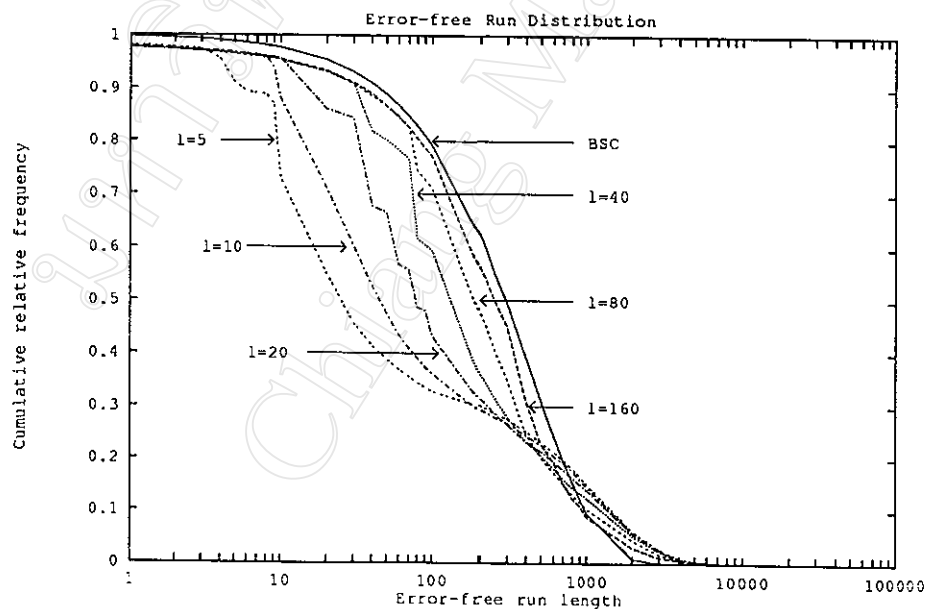
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาซี ถูกเขียนขึ้นมาบนเพื่อจำลองการทำงานของตัววางสลับตำแหน่งข้อมูลบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล โดยรายละเอียดของคำสั่งโปรแกรมภาษาซี อยู่ในภาคผนวก ข เนื่องจากขบวนการข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยมีสี่ชุดที่มีคุณลักษณะค่าสถิติความผิดพลาดที่เหมือนกัน ดังนั้นเพื่อลดการทำซ้ำ จึงจะทำการทดสอบข้อมูล “data 1” เพียงชุดเดียว ข้อมูล “data 1” จะถูกวางสลับตำแหน่งข้อมูลด้วยค่า n และ l ต่าง ๆ ดังนี้ l เท่ากับ 5 10 20 40 80 และ 160 ส่วน n เท่ากับ 6 12 24 48 และ 384 บิต ตามลำดับ ข้อมูลใหม่ที่ถูกวางสลับตำแหน่งแล้วสำหรับค่า n เดียวกันและค่า l ต่างๆกันจะถูกนำมาวาดกราฟเปรียบเทียบการกระจายของช่วงปราศจากความผิดพลาด (Error-free Run Distribution) กับช่องสื่อสารแบบสมมาตรสองสถานะ (BSC) ซึ่งถือว่ามีรูปแบบความผิดพลาดเป็นแบบสุ่มและมีอัตราบิตผิดพลาด (BER) เฉลี่ยเดียวกับข้อมูล “data 1” ต้นแบบ โดยได้จากการคำนวณ ดังรูป 4.3 รูป 4.4 รูป 4.5 รูป 4.6 รูป 4.7 สำหรับ n เท่ากับ 6 12 24 48 และ 384 บิต ตามลำดับ



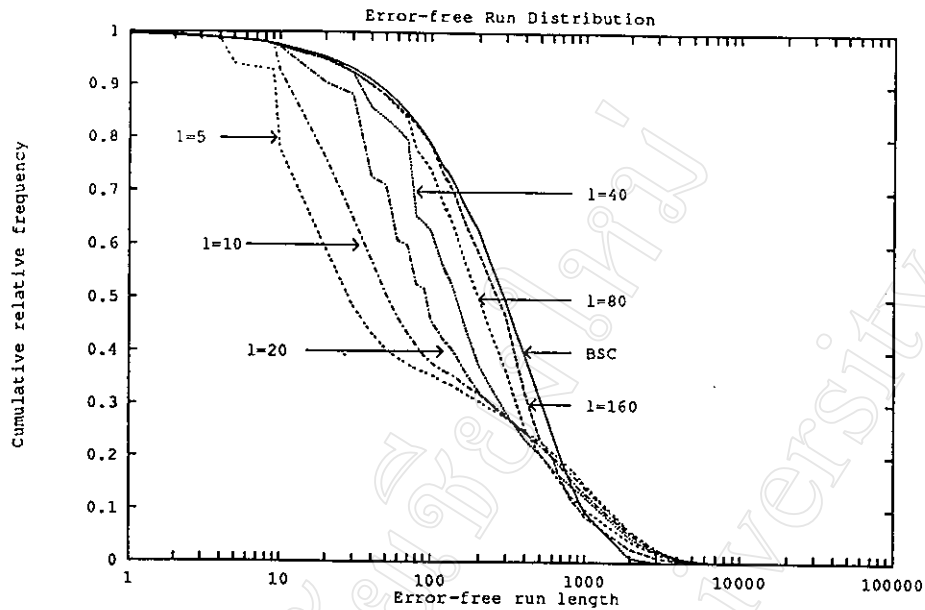
รูป 4.3 การกระจายของช่วงปราศจากความผิดพลาดของข้อมูล “data 1” ที่ถูกวางสลับตำแหน่งด้วยค่า l ต่าง ๆ ของบล็อกข้อมูลความยาว 6 บิต



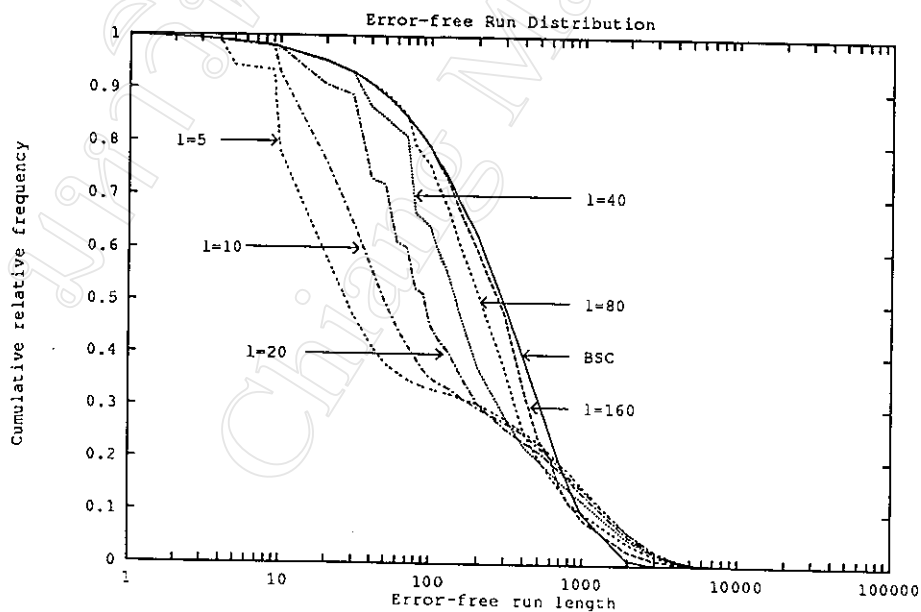
รูป 4.4 การกระจายของช่วงปราศจากความผิดพลาดของข้อมูล "data 1" ที่ถูก
วางสลับตำแหน่งด้วยค่า l ต่าง ๆ ของบล็อกข้อมูลความยาว 12 บิต



รูป 4.5 การกระจายของช่วงปราศจากความผิดพลาดของข้อมูล "data 1" ที่ถูก
วางสลับตำแหน่งด้วยค่า l ต่าง ๆ ของบล็อกข้อมูลความยาว 24 บิต



รูป 4.6 การกระจายของช่วงปราศจากความผิดพลาดของข้อมูล "data 1" ที่ถูก
วางสลับตำแหน่งด้วยค่า l ต่าง ๆ ของบล็อกข้อมูลความยาว 48 บิต

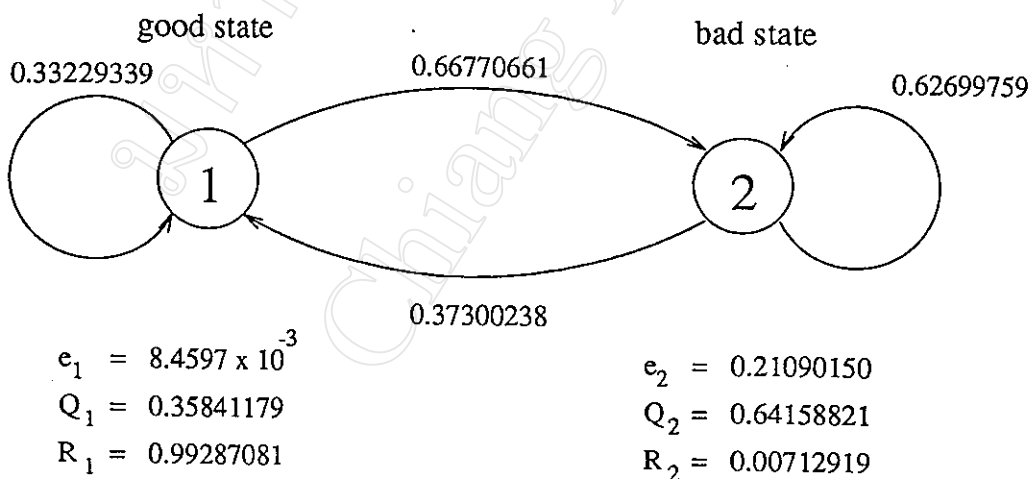


รูป 4.7 การกระจายของช่วงปราศจากความผิดพลาดของข้อมูล "data 1" ที่ถูก
วางสลับตำแหน่งด้วยค่า l ต่าง ๆ ของบล็อกข้อมูลความยาว 384 บิต

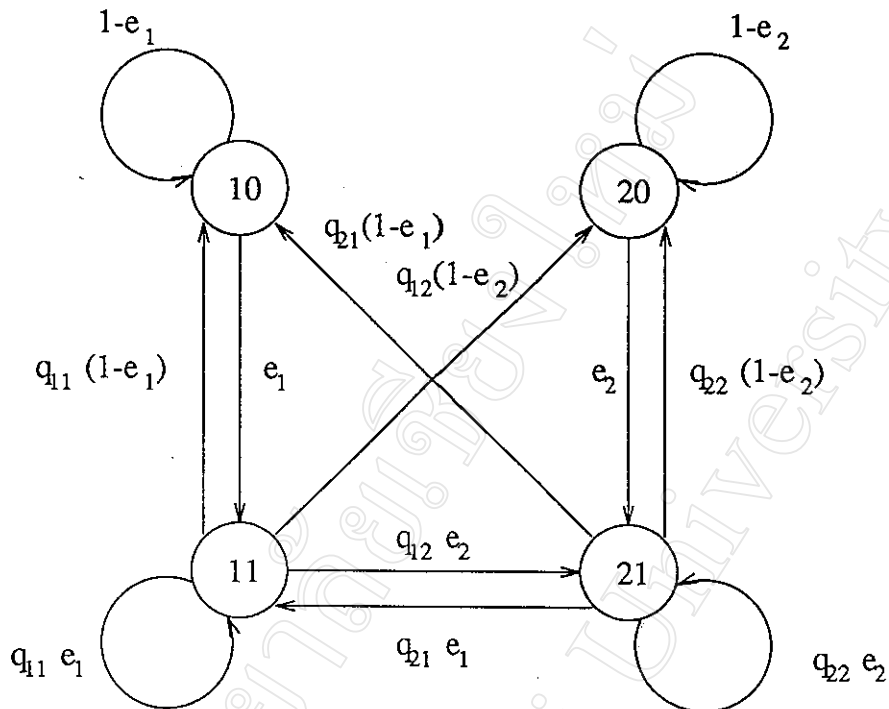
ผลจากการสังเกตรูปภาพเปรียบเทียบพบว่าประเด็นแรกเมื่อความลึกของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลมีค่ามากขึ้น ค่าสถิติที่วัดคือการกระจายของช่วงปราศจากความผิดพลาดของขบวนข้อมูลที่ถูกวางสลับตำแหน่ง จะมีค่าเข้าใกล้ค่าสถิติที่ได้จากช่องสื่อสารสมมาตรสองสถานะ ซึ่งสรุปได้ว่าขบวนข้อมูลมีความผิดพลาดเป็นแบบสุ่มมากขึ้น ประเด็นที่สอง ณ ที่ค่า n หรือความยาวรหัสมากกว่า 24 bit และที่ 1 เท่ากับ 160 รูปภาพการกระจายของช่วงปราศจากความผิดพลาดของขบวนข้อมูลที่ถูกวางสลับตำแหน่งจะใกล้เคียงกับของช่องสื่อสารสมมาตรสองสถานะมาก จึงสรุปได้ว่าความลึกของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลค่าเท่ากับ 160 ทำให้รูปแบบความผิดพลาดเป็นแบบสุ่มที่ตัวรับ ซึ่งจะได้พิจารณาวิธีการหาค่าความลึกที่เหมาะสมของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลในหัวข้อต่อไป

4.3 การหาค่าความลึกที่เหมาะสมของการวางสลับตำแหน่งข้อมูล

ช่องสื่อสารเข้ารหัสที่สามารถจำลองแบบได้ด้วยแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟหลังจากผ่านการวางสลับตำแหน่งข้อมูลด้วยความลึก N สามารถแทนได้ด้วยแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟ ที่มีเมตริกซ์ส่งผ่าน ยกกำลัง N [25] แต่เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์แบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสองสถานะของข้อมูล “data 1” ดังรูป 4.8 จะถูกเขียนในรูปแบบใหม่ ดังรูป 4.9



รูป 4.8 แบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสองสถานะของข้อมูล “data 1”



รูป 4.9 แบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสี่สถานะ

หมายเลขที่กำกับในแต่ละสถานะประกอบด้วยเลขสองหลักถูกกำหนดไว้ดังนี้ คือ ตัวเลขแรกจะแทนสถานะเดิมในแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสองสถานะ ตัวเลขที่สองจะแทนสถานะของบิตที่รับได้ที่เครื่องรับ โดยเลข “0” หมายถึงบิตที่รับได้ถูกต้อง และเลข “1” หมายถึงบิตที่รับได้มีความผิดพลาด และ “ q_{ij} ” คือ ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ i ไปสู่สถานะ j หลังเกิดบิตผิดพลาด โดยที่ค่า e_1 และ e_2 เป็นค่าเดิม คืออัตราบิตผิดพลาดเฉลี่ยในแต่ละสถานะของแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสองสถานะและเมตริกซ์ส่งผ่านของแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสี่สถานะเขียนได้ ดังรูป

4.10

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} p_{10\ 10} & p_{10\ 11} & p_{10\ 21} & p_{10\ 20} \\ p_{11\ 10} & p_{11\ 11} & p_{11\ 21} & p_{11\ 20} \\ p_{21\ 10} & p_{21\ 11} & p_{21\ 21} & p_{21\ 20} \\ p_{20\ 10} & p_{20\ 11} & p_{20\ 21} & p_{20\ 20} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1-e_1 & e_1 & 0 & 0 \\ q_{11}(1-e_1) & q_{11}e_1 & q_{12}e_2 & q_{12}(1-e_2) \\ q_{21}(1-e_1) & q_{21}e_1 & q_{22}e_2 & q_{22}(1-e_2) \\ 0 & 0 & e_2 & 1-e_2 \end{bmatrix} \\
 P &= \begin{bmatrix} 0.999154 & 0.000846 & 0 & 0 \\ 0.332012 & 0.000281 & 0.140820 & 0.526886 \\ 0.372686 & 0.000315 & 0.132235 & 0.494763 \\ 0 & 0 & 0.210901 & 0.789098 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

รูป 4.10 เมตริกซ์ส่งผ่านของแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสี่สถานะ

เมตริกซ์ส่งผ่านในรูป 4.10 ที่ได้รับการยกกำลัง N ค่าต่าง ๆ คือ N เท่ากับ 5 10 20 40 80 และ 160 ตามลำดับ แสดงในรูป 4.11

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.997151 & 0.000844 & 0.000423 & 0.001582 \\ 0.517617 & 0.000438 & 0.101643 & 0.380302 \\ 0.546853 & 0.000463 & 0.095472 & 0.357212 \\ 0.278970 & 0.000236 & 0.152017 & 0.568778 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.995420 & 0.000843 & 0.000788 & 0.002949 \\ 0.678045 & 0.000574 & 0.067780 & 0.253601 \\ 0.697395 & 0.000590 & 0.063695 & 0.238319 \\ 0.520100 & 0.000440 & 0.101119 & 0.378341 \end{bmatrix}$$

$$P^{20} = \begin{bmatrix} 0.993515 & 0.000841 & 0.001190 & 0.004453 \\ 0.854496 & 0.000723 & 0.030534 & 0.114246 \\ 0.862971 & 0.000731 & 0.028745 & 0.107552 \\ 0.785311 & 0.000665 & 0.045138 & 0.168886 \end{bmatrix}$$

$$P^{40} = \begin{bmatrix} 0.992316 & 0.000840 & 0.001443 & 0.005401 \\ 0.965642 & 0.000818 & 0.007074 & 0.026467 \\ 0.967268 & 0.000819 & 0.006730 & 0.025182 \\ 0.952367 & 0.000806 & 0.009876 & 0.036950 \end{bmatrix}$$

$$P^{80} = \begin{bmatrix} 0.992041 & 0.000840 & 0.001501 & 0.005617 \\ 0.991059 & 0.000839 & 0.001709 & 0.006393 \\ 0.991119 & 0.000839 & 0.001696 & 0.006347 \\ 0.990571 & 0.000839 & 0.001812 & 0.006779 \end{bmatrix}$$

$$P^{160} = \begin{bmatrix} 0.992031 & 0.000840 & 0.001504 & 0.005626 \\ 0.992029 & 0.000840 & 0.001504 & 0.005627 \\ 0.992030 & 0.000840 & 0.001504 & 0.005627 \\ 0.992029 & 0.000840 & 0.001504 & 0.005627 \end{bmatrix}$$

รูป 4.11 ค่ายกกำลังต่าง ๆ ของเมตริกซ์ส่งผ่านของแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสี่สถานะ

จะสังเกตเห็นว่ายิ่งค่า N มีค่ามากขึ้น ค่าต่าง ๆ ในเมตริกซ์ส่งผ่านมีแนวโน้มเข้าสู่สถานะสมดุล (Equilibrium State) หรือสถานะคงตัว (Steady State) โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ค่า N เท่ากับ 160 ซึ่งสอดคล้องในเบื้องต้นกับข้อสรุปในหัวข้อ 4.2 ที่ว่าลักษณะของรูปแบบความผิดพลาดของขบวนการข้อมูล เป็นแบบสุ่มเมื่อผ่านการวางสลับตำแหน่งข้อมูลด้วยความลึกของการวางสลับตำแหน่งข้อมูล 160

เพื่อให้การหาค่าความลึกของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลง่ายขึ้น จึงเสนอวิธีการหาโดยอาศัยความสัมพันธ์ของพหามิตีออร์ต่าง ๆ ในเชิงคณิตศาสตร์

พิจารณาเมตริกซ์ A ซึ่งมีขนาด $n \times n$ ดังนั้นระบบเจาะจง (Eigensystem) ของ A คือ [3]

$$Ax_i = x_i \lambda_i \quad (4.1)$$

เมื่อ x_i คือ เวกเตอร์เจาะจง (Eigenvectors) ของ A
 λ_i คือ ค่าเจาะจง (Eigenvalue) ของ A

สมการคุณสมบัตินี้ (Characteristics Equation) ของ A คือ

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (4.2)$$

เมื่อ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) จากทฤษฎีเมตริกซ์ได้ว่า [12]

$$A^{(N)} = R \Lambda^N R^{-1} \quad (4.3)$$

เมื่อ N คือเลขจำนวนเต็มบวก
 (N) คือจำนวนครั้งของการวนซ้ำ (Iteration) ของเมตริกซ์ส่งผ่าน
 Λ คือเมตริกซ์ทะแยง (Diagonal Matrix) ที่มี λ_i เป็นสมาชิก และ $1 \leq i \leq n$
 R คือเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มี x_i เป็นสมาชิก

ถ้าให้ A คือเมตริกซ์ $[a_{ij}]$ R คือเมตริกซ์ $[r_{ij}]$ R_1 คือเมตริกซ์ $[S_{ij}]$ โดยที่ i, j เป็นเลขจำนวนเต็มอยู่ระหว่าง 1 ถึง n สมการ (4.3) เขียนใหม่ในอีกรูปแบบหนึ่งได้ว่า

$$[a_{ij}^{(N)}] = \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k^N r_{ik} S_{kj} \right] \quad (4.4)$$

ในกรณีแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสี่สถานะซึ่งมีเมตริกซ์ส่งผ่านขนาด 4×4 ซึ่งก็คือมี $n=4$ จะเขียนเทอมแรกของด้านขวามือในสมการที่ (3.4) ในกรณี $i=1$ และ $j=1$ ได้ว่า

$$a_{11}^{(N)} = \lambda_1^N r_{11} S_{11} + \lambda_2^N r_{12} S_{21} + \lambda_3^N r_{13} S_{31} + \lambda_4^N r_{14} S_{41} \quad (4.5)$$

จากทฤษฎีเมื่อ N เข้าใกล้ ∞ ค่าเวกเตอร์ความน่าจะเป็น (Probability Vector) ของ ในแต่ละแถว จะมีค่าเท่ากัน และ $|\lambda| \leq 1$ สำหรับทุกค่าของ λ โดยที่ λ_1 จะมีค่ามากที่สุดและเข้าใกล้ 1 และทำให้ได้ว่า $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้นในทางปฏิบัติเพื่อให้เมตริกซ์ A เข้าสู่สถานะสมดุล (Equilibrium State) จึงต้องให้ค่า N มีค่ามากเพียงพอที่จะทำให้เทอมที่สอง สาม และสี่ ในสมการที่ (4.5) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมที่หนึ่ง ดังนั้นจึงกำหนดค่าตัวแปรหนึ่งขึ้นมาเพื่อหาค่า N ที่เหมาะสม โดยการกำหนดให้ ϵ เป็นปัจจัยความเที่ยง (Precision Factor) ซึ่งก็คืออัตราส่วนของเทอมที่ 2 ต่อเทอมที่ 1 ดังนี้

$$\epsilon = \lambda_2^N r_{12} S_{21} / \lambda_1^N r_{11} S_{11} \quad (4.6)$$

ทำให้ได้ว่า

$$N = \text{Log}[r_{11} S_{11} \epsilon / r_{12} S_{21}] / \text{Log}[\lambda_2 / \lambda_1] \quad (4.7)$$

และเมื่อ λ_1 เข้าใกล้ 1 ทำให้

$$N = \text{Log}[r_{11} S_{11} \epsilon / r_{12} S_{21}] / \text{Log}[\lambda_2] \quad (4.8)$$

การวิเคราะห์หาค่า N ที่เหมาะสมของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลของข้อมูล “data 1”
ทำได้โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของเมตริกซ์ P ในรูป 4.10 แทนลงในเมตริกซ์ A ได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} 0.999154 & 0.000846 & 0 & 0 \\ 0.332012 & 0.000281 & 0.140820 & 0.526886 \\ 0.372686 & 0.000315 & 0.132235 & 0.494763 \\ 0 & 0 & 0.210901 & 0.789098 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

และค่าเฉพาะ และเวกเตอร์เฉพาะ คือ

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 0.920768 \\ \lambda_3 &= 4.6557 \times 10^{-7} \\ \lambda_4 &= -1.06508 \times 10^{-7} \\ X_1 &= [0.0622568, 0.0622562, 0.0622563, 0.062256]^T \\ X_2 &= [0.00605892, -0.561391, -0.526795, -0.84379]^T \\ X_3 &= [-0.00170936, 2.01881, -13.427, 3.58863]^T \\ X_4 &= [-0.000892079, 1.05358, 1.00929, -0.269751]^T \end{aligned} \quad (4.10)$$

ดังนั้น เมตริกซ์ R คือ

$$R = \begin{bmatrix} 0.062257 & 0.006059 & -0.001709 & -0.000892 \\ 0.062256 & -0.561391 & 2.018810 & 1.053580 \\ 0.062256 & -0.526795 & -13.427000 & 1.009290 \\ 0.062256 & -0.843790 & 3.58863 & -0.269751 \end{bmatrix}$$

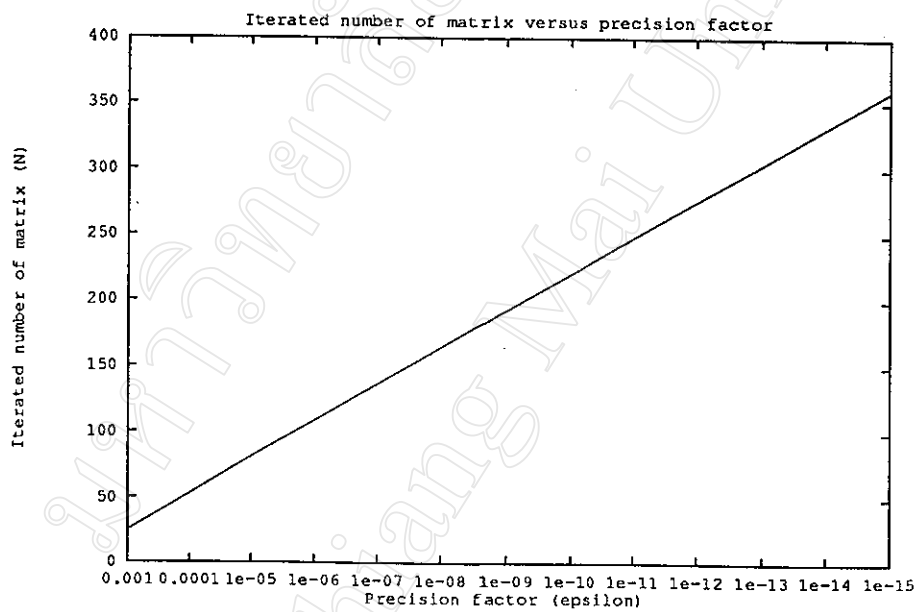
และ เมตริกซ์ R^{-1} คือ

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 15.934500 & 0.013492 & 0.024152 & 0.090364 \\ 1.276840 & 0.001082 & -0.269519 & -1.008410 \\ 0.003629 & 0.062367 & -0.065289 & -0.000706 \\ -0.268174 & 0.829421 & -0.019935 & -0.541311 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

ดังนั้นตัวแปรต่าง ๆ ในสมการ (4.8) คือ

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= 0.062257 \\
 r_{12} &= 0.006059 \\
 S_{11} &= 15.9345 \\
 S_{21} &= 1.27684 \\
 \lambda_1 &= 1 \\
 \lambda_2 &= 0.920768
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

และถ้าแทนค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ เหล่านี้ในสมการ (4.8) จะได้ความสัมพันธ์ของจำนวนครั้งของการวนซ้ำของเมตริกซ์ส่งผ่าน (N) และค่าปัจจัยความเที่ยง (E) ดังรูป 4.12



รูป 4.12 ความสัมพันธ์ของค่าปัจจัยความเที่ยงกับจำนวนครั้งของการวนซ้ำของเมตริกซ์ส่งผ่าน

ตัวอย่างเช่น หากต้องการค่าปัจจัยความเที่ยงมีค่า 10^{-8} ซึ่งนับว่าเป็นค่าที่ทำให้เทอมที่สองมีค่าน้อยกว่าเทอมที่หนึ่งอย่างมากในสมการ (4.5) และเมตริกซ์ส่งผ่านเข้าสู่สถานะสมดุล จะได้ค่า N เท่ากับ 160 ซึ่งก็คือค่าความลึกที่เหมาะสมของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลนั่นเอง

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าสามารถคำนวณหาค่าความลึกที่เหมาะสมของการวางสลับตำแหน่งข้อมูลจากค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟสองสถานะที่นำเสนอในบทที่ 3 โดยอาศัยสมการ (4.8)