

บทที่ 2

ทฤษฎี

สำหรับเทคนิค RBS นี้พลังงานของกระสุนจัดว่าไม่สูงมากนัก จึงสามารถใช้กลศาสตร์แบบเก่าในการอธิบายถึงอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นระหว่างอนุภาคกระสุนกับนิวเคลียสและอิเล็กตรอนของอะตอมบนเป้า ซึ่งเป็นอันตรกิริยาทางไฟฟ้าสถิต โดยกระสุนอาจจะอยู่ในรูปของไอออน เช่น ${}^4_2\text{He}^+$ หรือ ${}^{12}_6\text{C}^{++}$ หรืออยู่ในรูปของอนุภาคเช่น โปรตอน(${}^1_1\text{H}^+$) หรือดิวเทรียม(${}^2_1\text{H}^+$) ซึ่งรายละเอียดจะได้กล่าวไว้ในลำดับต่อไป

2.1 อันตรกิริยาระหว่างกระสุนกับอะตอม

สำหรับกระสุนพลังงานระดับกลางที่มี $v > v_B$ เช่น กรณีอนุภาคดิวเทรียม พลังงานจลน์ 140 keV ที่มีความเร็ว $v \sim 1.68v_B$ เมื่อ v_B คือ อัตราเร็วของอิเล็กตรอนในวงโคจรของไฮโดรเจนอะตอมที่สถานะพื้น (ground state) หรือที่เรียกกันว่า Bohr velocity ซึ่งมีค่า $v_B = \frac{e^2}{\hbar} \cong 2.2 \times 10^8 \text{ cm/s}$ เมื่อเคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่างจะเกิดอันตรกิริยากับอะตอมของวัสดุตัวอย่างได้ 2 กระบวนการดังนี้

(i) Inelastic Coulomb scattering

(ii) Elastic Coulomb scattering

2.1.1 Inelastic Coulomb scattering

เป็นกระบวนการที่อนุภาคกระสุน เกิดอันตรกิริยากับอิเล็กตรอนของอะตอม ซึ่งเป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic collision) เนื่องจากอนุภาคกระสุนมีมวลมากกว่ามวลของอิเล็กตรอนมาก ดังนั้นเมื่อมีการชนระหว่างอิเล็กตรอนกับอนุภาคกระสุน แนวทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคกระสุนจะไม่ถูกเบี่ยงเบนมากนัก แต่มีการสูญเสียพลังงานจลน์บางส่วนให้กับอิเล็กตรอนในแต่ละครั้งของการชน ซึ่งการชนระหว่าง 2 อนุภาคนี้อาจเกิดขึ้นได้หลายๆ ครั้งตามเป้าหมายที่อนุภาคกระสุนยัง

คงมีพลังงานจลน์อยู่

เมื่ออิเล็กตรอนได้รับพลังงานมากพอ อิเล็กตรอนสามารถหลุดเป็นอิสระจากอะตอมได้เกิดเป็น อิเล็กตรอนอิสระกับไอออนบวก เราเรียกกระบวนการนี้ว่า การเกิด ionization ซึ่งโดยเฉลี่ยต้องใช้พลังงาน 10 – 30 eV ต่อการเกิดอิเล็กตรอน – ไอออน 1 คู่ แต่บางครั้งก็เพียงแค่ทำให้ อิเล็กตรอนของอะตอมเปลี่ยนระดับพลังงานเท่านั้น ซึ่งเรียกว่า การเกิด excitation ในกระบวนการนี้พลังงานนั้นต้องพอดีที่จะทำให้เกิดการกำทอน (resonance) โดยสรุปแล้วจึงกล่าวได้ว่า กระบวนการเหล่านี้ ทำให้อนุภาคกระสุนสูญเสียพลังงานไปเรื่อย ๆ โดยอัตราการสูญเสียพลังงานของอนุภาคกระสุนนอกจากจะขึ้นอยู่กับสมบัติของอนุภาคกระสุนเองแล้วยังขึ้นอยู่กับสมบัติของวัสดุตัวอย่างด้วย สมบัติเหล่านี้นิยมนามรวมกันอยู่ในคำ stopping power

2.1.1.1 Stopping power

นิยามค่า Stopping power ($\mathcal{E}$) ด้วย [Nastasi et al., 1996]

$$\mathcal{E} = - \frac{1}{N} \frac{dE}{dx}$$

เมื่อ N คือ ความหนาแน่นของอะตอมต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร (atom/cm^3)

$\frac{dE}{dx}$ คือ อัตราการสูญเสียพลังงานของอนุภาคกระสุนต่อหนึ่งหน่วยระยะทางที่

อนุภาคกระสุนเคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่าง หรือเรียกสั้นๆ ว่า energy loss rate (eV/cm)

โดยทางทฤษฎีนั้นการสูญเสียพลังงานของอนุภาคกระสุนอันเนื่องมาจากอันตรกิริยาระหว่างอนุภาคกระสุนกับนิวเคลียสก็มีโอกาสเกิดขึ้นได้เช่นกัน ดังนั้นโดยรวมแล้วจึงต้องกล่าวว่า

$$\frac{dE}{dx} = \left. \frac{dE}{dx} \right|_n + \left. \frac{dE}{dx} \right|_e$$

หรือ

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n + \mathcal{E}_e$$

*G.F.Knoll [1979] เรียกค่านี้ว่า linear stopping power

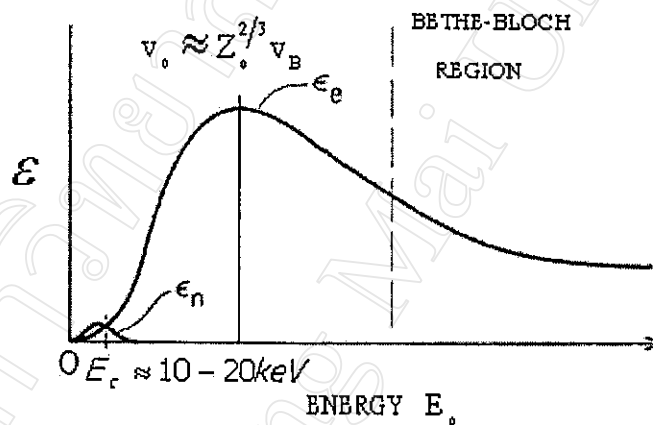
เมื่อ $\epsilon_n = \frac{1}{N} \frac{dE}{dx} |_n$ คือ nuclear stopping power ที่เป็นผลมาจากอันตรกิริยาระหว่าง

อนุภาคกระสุนกับนิวเคลียสของอะตอม

$\epsilon_e = \frac{1}{N} \frac{dE}{dx} |_e$ คือ electronic stopping power ที่เป็นผลมาจากอันตรกิริยา

ระหว่างอนุภาคกระสุนกับอิเล็กตรอนของอะตอม

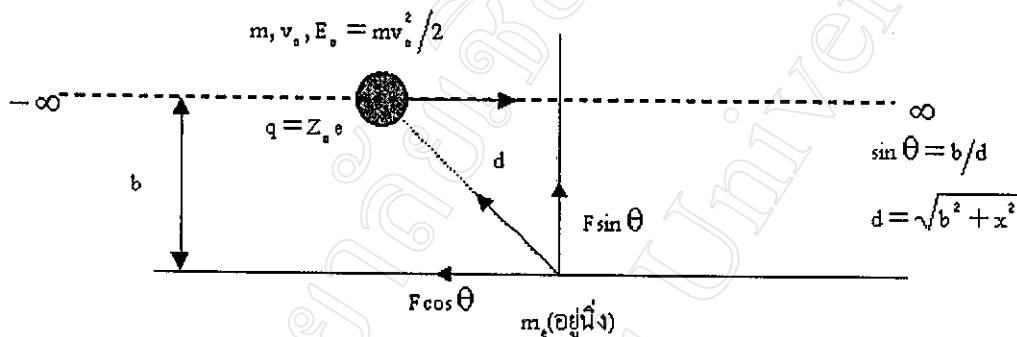
ทั้ง nuclear stopping power และ electronic stopping power ต่างก็ขึ้นอยู่กับความเร็วหรือพลังงานเริ่มต้น (E_0) และเลขอะตอม (Z_0) ของอนุภาคกระสุน ถ้าอนุภาคกระสุนมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_0 น้อยกว่า Bohr velocity (v_B) แล้วค่า nuclear stopping power จะมีความสำคัญมากขึ้น แต่ถ้า v_0 มากกว่า v_B แล้ว electronic stopping power จะโดดเด่นกว่ามาก ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 2.1 [Nastasi et al., 1996]



รูปที่ 2.1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ϵ_e และ ϵ_n กับพลังงานจลน์เริ่มต้นของอนุภาคกระสุน E_0 ที่มีเลขอะตอม Z_0

จากรูปที่ 2.1 จะพบว่าที่พลังงาน $E_0 > E_c$ ค่าของ ϵ_n มีค่าลดลงเมื่อ E_0 (หรือความเร็ว v_0) มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งอาจจะประมาณได้ว่า $\epsilon \sim \epsilon_e$ ดังนั้นที่บริเวณ $v_0 > v_B Z_0^{2/3}$ ซึ่งมีพลังงาน $E_0 \gg E_c$ นั้น จะได้ว่า $\epsilon = \epsilon_e$

จากแนวคิดของ Bohr ในปี 1913 สามารถหาค่า $-\frac{dE}{dx}$ สำหรับกรณีเมื่ออนุภาคกระสุน เป็นอนุภาคประจุไฟฟ้า เช่น อนุภาคอัลฟา , โปรตอน หรือในกรณีของงานวิจัยนี้ก็จะ เป็นอนุภาคดิวทีรอน (${}^2\text{H}^+$ หรือ D^+) ที่มี $v_0 > v_B Z_0^{2/3}$ กล่าวคือเมื่ออนุภาคกระสุน มวล m ประจุ $Z_0 e$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_0 เข้าไปในวัสดุ จะมีการสูญเสียพลังงานให้กับอิเล็กตรอนมวล m_e ประจุ e ที่สมมุติว่าอยู่นิ่งในอะตอมในรูปของการถ่ายเทโมเมนตัมให้กับอิเล็กตรอนในทิศทางที่ตั้งฉากกับแนวทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคกระสุนที่วิ่งผ่านไป ในเทอมของ impact parameter (b) ดังรูปที่ 2.2 [Nastasi et al. , 1996]



รูปที่ 2.2 แสดงแนวแรงที่อนุภาคกระสุนกระทำกับอิเล็กตรอนขณะเคลื่อนจาก $x = -\infty$ แล้ววิ่งเข้ามา จนผ่านไปถึง $x = +\infty$

จากรูป 2.2 จะพบว่าแรงลัพธ์ที่กระทำต่ออิเล็กตรอนขณะที่อนุภาคกระสุน เคลื่อนที่จาก $x = -\infty$ จนถึง $x = +\infty$ นั้นจะอยู่ในแนวแกน y โดย

$$|\vec{F}_y| = |\vec{F}| \sin \theta$$

เมื่อ $\vec{F}$ คือแรงคูลอมบ์ระหว่างอนุภาคกระสุนกับอิเล็กตรอน $= \frac{kZ_0 e^2}{d^2}$

$$\text{ดังนั้น} \quad F_y = \frac{Z_0 e^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \quad (2.2)$$

เมื่อ $k = 1$ ใน Electrostatic unit (esu)

ถ้าอิเล็กตรอนได้รับอิมพัลส์ ก็จะเกิดมีโมเมนตัม (p_e) กล่าวคือ

$$\begin{aligned} p_e &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt \\ &= \frac{1}{v_0} \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

โดยที่ $dt = \frac{dx}{v_0}$ และถือว่าการที่อนุภาคกระสุนเกิดมีอันตรกิริยากับอิเล็กตรอนที่เบากว่าหลายพันเท่า จะไม่ทำให้ความเร็วของอนุภาคกระสุนเปลี่ยนไปมากในแต่ละครั้งของการชน จากสมการ 2.2 และ 2.3 จะได้

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{1}{v_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0 e^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} dx \\ &= \frac{2Z_0 e^2 b}{v_0} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(b^2 + x^2)^{3/2}} dx \\ &= \frac{2Z_0 e^2}{bv_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

และจากความสัมพันธ์ของพลังงานจลน์กับโมเมนตัม จะได้ว่าอิเล็กตรอนนี้มีพลังงานจลน์

$$E_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{2Z_0^2 e^4}{m_e b^2 v_0^2} \quad (2.5)$$

พลังงาน E_e นี้คือปริมาณที่อนุภาคกระสุนสูญเสียไปในแต่ละครั้งของการชนกับอิเล็กตรอน 1 ตัว แต่อนุภาคกระสุนนั้นสามารถมีอันตรกิริยากับอิเล็กตรอนได้หลาย ๆ ตัวในเวลาเดียวกัน

ดังนั้นเมื่ออนุภาคกระสุน วิ่งเข้าไปในวัสดุตัวอย่างที่สมมุติว่าประกอบด้วยอะตอมชนิดเดียวที่มีเลขอะตอม Z และมีความหนาแน่นของอะตอมเท่ากับ N (atom/cm³) ในช่วงระยะ Δx

และในบริเวณวงแหวน b ถึง $b+db$ นั้น อนุภาคกระสุนจะสัมผัสกับอิเล็กตรอนทั้งหมดเท่ากับ $(2\pi b)(db)(\Delta x)NZ$ ตัว เพราะฉะนั้นพลังงานที่สูญเสียไปของอนุภาคกระสุนในช่วงระยะทาง Δx ให้กับอิเล็กตรอนทั้งหลาย คือ

$$\Delta E = E_c (2\pi b)(db)(\Delta x)NZ \quad (2.6)$$

แทนสมการ 2.5 ลงในสมการ 2.6 จะได้

$$\Delta E = NZ \Delta x [2Z_o^2 e^4 / m_e v_o^2] 2\pi (db/b) \quad (2.7)$$

ถ้า impact parameter อยู่ในช่วง b_{min} ถึง b_{max} และ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = dx$ จะได้ว่า energy loss

ต่อ unit length ให้กับอิเล็กตรอนของอะตอมคือ

$$-\frac{dE}{dx}|_c = NZ [2Z_o^2 e^4 / m_e v_o^2] 2\pi \int_{b_{max}}^{b_{min}} \frac{db}{b}$$

$$-\frac{dE}{dx}|_c = \frac{4\pi Z_o^2 e^4}{m_e v_o^2} NZ \ln \left[\frac{b_{max}}{b_{min}} \right] \quad (2.8)$$

ซึ่งค่า b_{max} สามารถหาได้จากพลังงานต่ำสุดที่อนุภาคกระสุนสูญเสียให้กับอิเล็กตรอน โดยพลังงานต่ำสุดนี้ก็คือ พลังงานที่พอดีที่ทำให้เกิดการ excitation นั่นคือ $E_c \cong I$

ดังนั้น

$$I = \frac{2Z_o^2 e^4}{m_e b_{max}^2 v_o^2}$$

หรือ

$$b_{max} = \sqrt{\frac{2Z_o^2 e^4}{m_e v_o^2 I}} = \frac{2Z_o e^2}{(2m_e v_o^2 I)^{1/2}}$$

โดยเมื่อพิจารณาจากการทดลอง [Chu and Powers, 1972] และจากการคำนวณตามทฤษฎีของ Lindhard และ Scharff ให้ผลสอดคล้องกันว่า [Nastasi et al., 1996]

$$I(\text{eV}) \cong 10Z$$

และกรณีที่อนุภาคกระสุนชนกับอิเล็กตรอนแบบ head-on อนุภาคกระสุนจะถ่ายเทโมเมนตัมให้กับอิเล็กตรอนมากที่สุด คือ (ดูรายละเอียดที่ภาคผนวก ข)

$$P_{\max} = 2m_e v_o$$

จากสมการ 2.4

$$P_{\max} = \frac{2Z_o e^2}{b_{\min} v_o}$$

ดังนั้น

$$2m_e v_o = \frac{2Z_o e^2}{b_{\min} v_o}$$

หรือ

$$b_{\min} = \frac{Z_o e^2}{m_e v_o^2}$$

นำค่า $b_{\min}$ และ $b_{\max}$ แทนในสมการ 2.8 จะได้

$$-\frac{dE}{dx}_e = \frac{4\pi Z_o^2 e^4}{m_e v_o^2} NZ \ln \left[\frac{2m_e v_o^2}{I} \right]$$

หรือ

$$-\frac{dE}{dx}_e = \frac{2\pi Z_o^2 e^4}{E_o} NZ \left(\frac{m}{m_e} \right) \ln \left[\frac{2m_e v_o^2}{I} \right] \quad (2.9)$$

ส่วนในกรณีที่ $v_o \gg v_B$ จะต้องใช้สมการ [Knoll, 1979]

$$-\frac{dE}{dx}_e = \frac{4\pi Z_o^2 e^4}{m_e v_o^2} NZ \ln \left[\frac{2m_e v_o^2}{I} - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right]; \quad \beta = v_o/c \quad (2.10)$$

ซึ่งสมการ 2.10 นี้เรียกกันว่า Bethe – Bloch formula อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่า ถ้า $v_0 \ll c$ แล้วสมการ 2.10 จะลดรูปไปสู่สมการ 2.9 นั่นเอง

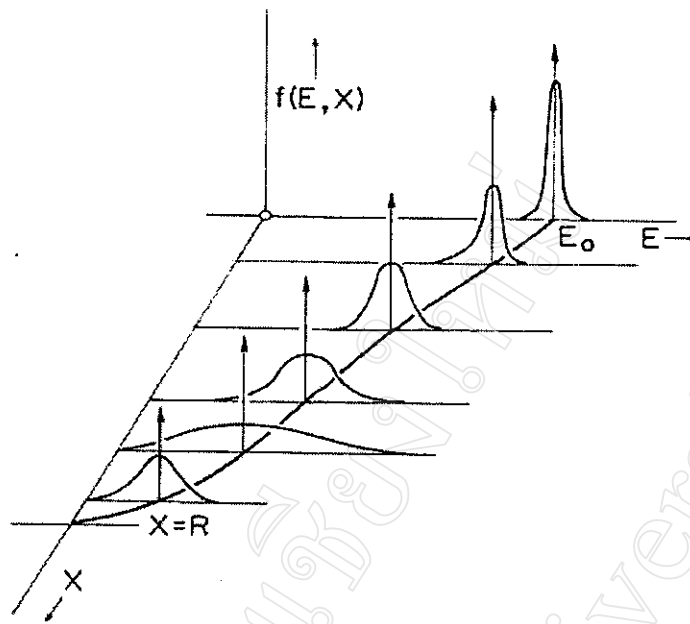
ดังนั้น electronic stopping power (ϵ_e) ที่เกิดจากการสูญเสียพลังงานของอนุภาคกระสุนให้กับอิเล็กตรอนของอะตอมในวัสดุตัวอย่างต่อหนึ่งหน่วยความยาว คือ

$$\epsilon_e = \frac{2\pi Z_0^2 e^4}{E_0} Z \left(\frac{m}{m_e} \right) \ln \left[\frac{2m_e v_0^2}{I} \right] \quad (2.11)$$

จากสมการ 2.11 พบว่า ϵ_e จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับเลขอะตอม Z ของเป้าและเลขอะตอม Z_0 ของอนุภาคกระสุน แต่เป็นสัดส่วนผกผันกับค่าพลังงานของอนุภาคกระสุน ดังนั้นการสูญเสียพลังงานของอนุภาคกระสุนต่างชนิดกัน ภายในวัสดุตัวอย่างเดียวกันและที่พลังงานเดียวกัน , การสูญเสียพลังงานของอนุภาคกระสุนชนิดเดียวกันภายในวัสดุตัวอย่างที่ต่างชนิดกัน และการสูญเสียพลังงานของอนุภาคกระสุนที่มีพลังงานต่างกัน ในวัสดุตัวอย่างชนิดเดียวกันก็จะแตกต่างกัน ซึ่งนั่นหมายความว่า การกระจายของพลังงานของอนุภาคกระสุนที่เคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่างและระยะที่อนุภาคกระสุนเคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่างได้ไกลสุดก็จะแตกต่างกันออกไป ซึ่งอธิบายได้ด้วยเทอมที่เรียกว่า energy straggling และ range ตามลำดับ

2.1.1.2 Energy straggling

เมื่อลำอนุภาคกระสุนเคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่างนั้น อันตรกิริยาที่เกิดขึ้นจะเป็นแบบสุ่มซึ่งมีผลให้เกิดการกระจายของค่าพลังงานของลำอนุภาคกระสุนที่เคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่าง ดังนั้นถ้าพล็อตความสัมพันธ์ระหว่างการกระจายของพลังงาน ($f(E,x)$) กับพลังงานของลำอนุภาคกระสุน (E) และระยะทางที่อนุภาคกระสุนเคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่าง (x) ดังรูปที่ 2.3 โดยที่ความกว้างของการกระจายของพลังงานก็คือ energy straggling ที่แปรเปลี่ยนกับระยะทางที่อนุภาคกระสุนนี้เคลื่อนในวัสดุตัวอย่าง

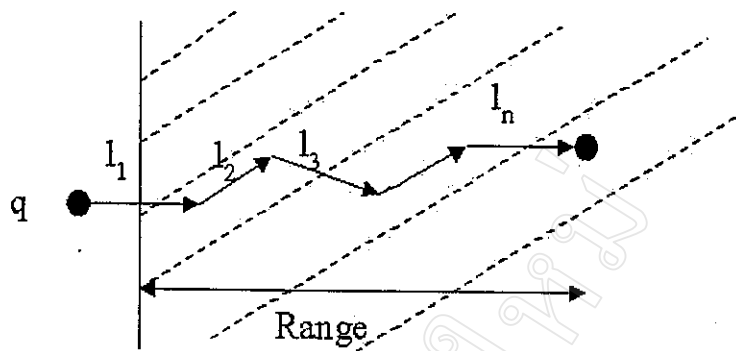


รูปที่ 2.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจายของพลังงานของลำอนุภาคกระสุน
ที่เคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่างด้วยระยะ x และพลังงาน E [Knoll, 1979]

จากรูป 2.3 นั้นจะแสดงให้เห็นว่าจะมีการกระจายของค่าพลังงาน $f(E, x)$ นี้จะกว้างมากขึ้นเมื่ออนุภาคกระสุนเคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่างด้วยระยะ x ที่มากขึ้น หรือแสดงให้เห็นว่า เมื่ออนุภาคกระสุนเคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่างด้วยระยะ x ที่เพิ่มขึ้นก็จะเกิด energy straggling มากขึ้น แต่ที่ระยะที่ใกล้ๆกับระยะที่อนุภาคกระสุนเคลื่อนเข้าไปในวัสดุตัวอย่างได้ไกลสุด ($x = R$) นั้น $f(E, x)$ จะมีค่าแคบลงเนื่องจากพลังงานของอนุภาคกระสุนนี้ลดลงอย่างมากจนเกือบหมด

2.1.1.3 Range

เมื่ออนุภาคกระสุนมีประจุไฟฟ้าเคลื่อนเข้าไปในตัวกลาง จะเกิดอันตรกิริยาระหว่างอนุภาคกระสุนกับอะตอมดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ซึ่งอนุภาคกระสุนมีการสูญเสียพลังงานจนบางส่วนไป ดังนั้นอนุภาคกระสุนจะเคลื่อนในตัวกลางได้ในระยะทางจำกัด โดยอาจจะมีการรูปแบบของการเคลื่อนที่เป็นแบบซิกแซก ดังรูปที่ 2.4 ซึ่งระยะทางทั้งหมดที่อนุภาคกระสุนเคลื่อนจากผิวของตัวกลางไปยังบริเวณที่อนุภาคกระสุนสูญเสียพลังงานจนหมด (หยุด) ในตัวกลาง เรียกว่า path length และระยะทางที่ไกลสุดที่อนุภาคกระสุนจะเคลื่อนที่ไปได้ในตัวกลางในแนวเส้นตรง เรียกว่า Range (R)



ตัวกลาง

รูปที่ 2.4 แผนภาพแสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคกระสุนในตัวกลาง โดย path length

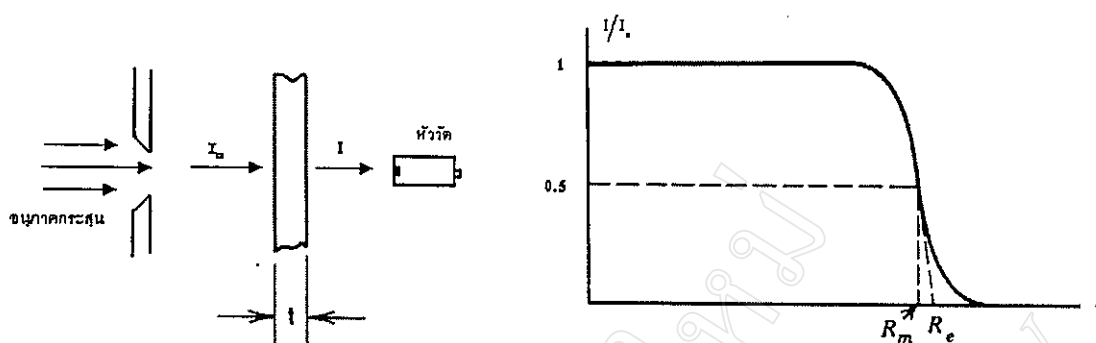
$$= \sum_{i=1}^n l_i$$

ในกรณีของอนุภาคกระสุนที่มีมวลหนัก การเคลื่อนที่ในตัวกลางจะมีลักษณะเกือบจะเป็นเส้นตรง ทำให้ประมาณได้ว่า path length $\cong$ R และอาจมองได้ว่า Range คือ ความหนาแน่นสุดของตัวกลางที่สามารถหยุดอนุภาคกระสุนได้ ดังนั้นนิยามของ Range ก็คือ

$$R = \int_{E_0}^0 \frac{dE}{(-dE/dx)} \quad (2.12)$$

เมื่อ E คือ พลังงานจลน์ของอนุภาคกระสุนที่กำลังเคลื่อนที่ในตัวกลาง

ค่า Range สามารถหาได้จากการทดลองดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 การทดลองวัดจำนวนอนุภาคกระสุน หลังจากผ่านตัวกลาง ที่มีความหนา t ต่าง ๆ (I) เทียบกับเมื่อไม่มีตัวกลาง (I_0)

จากการทดลองนี้พบว่า ที่ความหนาของตัวกลาง t มีค่าน้อย ๆ อนุภาคกระสุนถึงแม้จะสูญเสียพลังงานไปบ้างแต่ก็ยังสามารถทะลุออกมาได้ ดังนั้นจำนวนอนุภาคกระสุนที่ไปถึงยังหัววัดก็จะเท่ากับจำนวนอนุภาคกระสุนที่ออกจากแหล่งกำเนิด จนกระทั่งที่ความหนาของตัวกลาง t มีค่าเข้าใกล้กับระยะทางที่สั้นที่สุดของทางเคลื่อนของอนุภาคกระสุนในตัวกลาง จะมีจำนวนอนุภาคกระสุนที่ไปถึงยังหัววัดลดลง และถ้ายังเพิ่มความหนา t ขึ้นเรื่อย ๆ ก็จะมีอนุภาคกระสุนบางส่วนสูญเสียพลังงานจนหมดในตัวกลาง ซึ่งทำให้จำนวนอนุภาคกระสุนที่มาถึงยังหัววัดมีค่าลดลงหรือ I/I_0 มีค่าลดลงจนกระทั่งมีค่าเป็นศูนย์

จากรูปที่ 2.5 สามารถหาค่า Range จะมีค่าเท่ากับความหนาของตัวกลาง t ที่สามารถหยุดอนุภาคกระสุนได้ คือ ที่ความหนาที่ให้ I/I_0 เท่ากับศูนย์ และถ้าความหนา t ที่ให้จำนวนอนุภาคกระสุนทะลุออกมาได้ครึ่งหนึ่งของจำนวนอนุภาคกระสุนจากแหล่งกำเนิดคือ Mean range (R_m) หรือบางครั้งในหนังสือบางเล่มอาจจะพูดถึง extrapolate range (R_e) แทน range เมื่อ extrapolate range คือ ความหนาของตัวกลาง t ที่ให้ I/I_0 มีค่าเท่ากับศูนย์โดยการ extrapolate แบบเชิงเส้นบริเวณเส้นโค้งที่กำลังลดลงของค่า I/I_0 .

การคำนวณค่า Stopping power และ Range นี้สามารถคำนวณได้จากสมการ 2.11 และ 2.12 ของอนุภาคกระสุน เช่น อนุภาคอัลฟา , โปรตอน , นิวตรอน ฯลฯ ที่เคลื่อนด้วยความเร็ว $v_0 > Z_0^{2/3} v_B$ เข้าไปในตัวกลางหรือวัสดุตัวอย่าง หรืออาจให้โปรแกรม SRIM^{*} ช่วยในการคำนวณก็ได้ เช่น

^{*} [Ziegler, Available : <http://www.srim.org/SRIM/SRIMLEGL>HTML> (no date).]

ตารางที่ 2.1 แสดงค่า $\epsilon' = \frac{dE}{dx}$ คือ electronic stopping power เมื่อ พลังงานเริ่มต้นของอนุภาค กระสุนมีค่าสูงหรือที่ $v_0 > Z_0^{2/3} v_B$ ในโปรแกรม SRIM

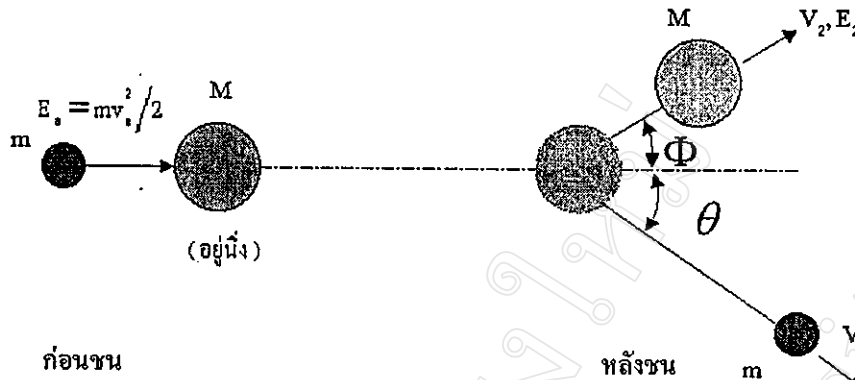
ตัวกลาง	140 keV $^2\text{H}^+$		280 keV $^4\text{He}^+$	
	ϵ' (eV/1E15atoms/cm ²)	R (Å)	ϵ' (eV/1E15atoms/cm ²)	R (Å)
Si	26.98	14800	67.54	14000
Cu	22.57	8148	56.46	7482
Au	33.65	5996	84.1	5483

2.1.2 Elastic coulomb scattering

อันตรกิริยานี้เป็นกรณีของการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์อันเป็นผลของ Coulomb repulsive force ระหว่างอนุภาคกระสุนกับนิวเคลียสของอะตอม พฤติกรรมของอนุภาคกระสุนที่กระเจิงออกจากจุดที่เกิดการชนกับนิวเคลียสของอะตอมบนวัสดุตัวอย่างที่ถือว่าอยู่นิ่ง จะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์สำคัญ 2 ตัว ได้แก่ kinematic factor (K) และ differential scattering cross-section $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$

2.1.2.1 kinematic factor (K)

สำหรับกระบวนการเกิดการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ระหว่างอนุภาค 2 ตัวนั้นสามารถใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานจลน์และโมเมนตัม เพื่อใช้ในการอธิบายการถ่ายเทพลังงานและโมเมนตัมจากอนุภาคหนึ่งไปยังอนุภาคอีกตัวได้ ซึ่งในกระบวนการกระเจิงย้อนกลับ (backscattering) นั้นอนุภาคกระสุนมวล m มีความเร็ว v_0 พลังงาน E_0 ($E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$) เคลื่อนไปชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์กับนิวเคลียสของธาตุบนเป้าหมายมวล M ที่อยู่นิ่งในตอนแรก หลังจากการชนแล้วอนุภาคกระสุนจะกระเจิงไปในทิศทาง θ ส่วนมวล M กระดอนไปในทิศทาง ϕ จากแนวการเคลื่อนที่เดิมด้วยความเร็ว v_1 และ v_2 และพลังงาน E_1 และ E_2 ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 แสดงการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ระหว่างอนุภาค m และ M ในกรอบอ้างอิง LAB

จากกฎการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัมในทิศทางที่ขนานและตั้งฉากกับแนวทางการเคลื่อนที่เดิมของอนุภาคกระสุน จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการ

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \quad (2.12)$$

$$mv_0 = mv_1 \cos \theta + Mv_2 \cos \phi \quad (2.13)$$

$$0 = -mv_1 \sin \theta + Mv_2 \sin \phi \quad (2.14)$$

จากสมการ 2.13 และ 2.14 สามารถกำจัดมุม ϕ ได้โดยให้ทางขวามือของสมการทั้ง 2 นี้เหลือแต่ตัวแปร ϕ แล้วยกกำลังสองทั้ง 2 ข้างและนำมาบวกกันจะได้

$$(Mv_2)^2 = (mv_0)^2 + mv_1^2 - 2mv_0^2 v_1 \cos \theta \quad (2.15)$$

จากสมการ 2.15 และ 2.16 จะได้

$$\frac{v_1}{v_0} = \left[m \cos \theta \pm \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta} \right] / (m + M) \quad (2.16)$$

อนุภาคกระสุนมวลเบากว่ามวลของธาตุบนเป้า ($m < M$) สมการ 2.16 จึงมีค่าเป็นบวกหรือ

$$\frac{v_1}{v_o} = \left[(M^2 - m^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + m \cos \theta \right] / (m + M) \quad (2.17)$$

สมการ 2.17 เป็นอัตราส่วนของความเร็วของอนุภาคกระสุนที่กระเจิงไปที่มุม θ กับความเร็วเริ่มต้นของอนุภาคกระสุน ดังนั้นสามารถเขียนสมการ 2.17 ในรูปของอัตราส่วนของพลังงานจลน์ของอนุภาคกระสุนที่กระเจิงไปที่มุม θ (E_1) กับพลังงานจลน์เริ่มต้น E_o คือ

$$\frac{E_1}{E_o} = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2}{\frac{1}{2} m v_o^2} = \frac{[(M^2 - m^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + m \cos \theta]^2}{(m + M)^2} \quad (2.18)$$

ในวงการนี้นิยมเรียกอัตราส่วน E_1/E_o ว่า kinematic factor (K) ดังนั้นจะได้

$$K = \frac{[(M^2 - m^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + m \cos \theta]^2}{(m + M)^2}$$

หรือ

$$K = \left\{ \frac{[1 - (m/M)^2 \sin^2 \theta]^{1/2} + (m/M) \cos \theta}{1 + (m/M)} \right\}^2 \quad (2.19)$$

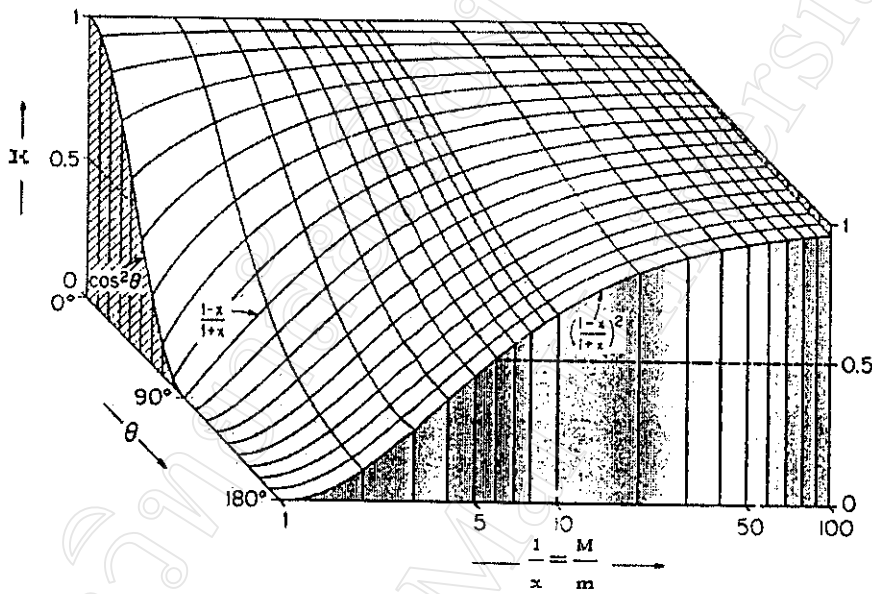
ถ้าพิจารณาการเกิดการกระเจิงย้อนกลับจากสมการ 2.19 โดยให้ $m/M = x$ ที่มุม θ เท่ากับ 180 องศา และ 90 องศา จะได้

$$K(\theta = 180^\circ) = \{(1 - x)/(1 + x)\}^2$$

$$K(\theta = 90^\circ) = \{(1 - x)/(1 + x)\}$$

จากข้างต้นพบว่าค่า K ที่มุม 180 องศา จะมีค่าน้อยกว่า K ที่ 90 องศา เพราะเทอมในวงเล็บมีค่าน้อยกว่า 1 และถ้ามวลของอนุภาคกระสุนเท่ากับมวลของธาตุบนเป้า ($x=1$) จะพบว่า K จะมีค่าเป็นศูนย์ที่มุม θ เท่ากับ 90 องศา และจะมีค่าเพิ่มขึ้นกับ $\cos^2 \theta$ เมื่อมุม θ มีค่าน้อยกว่า

90 องศา นั้นแสดงว่าอนุภาคกระสุนที่เคลื่อนไปชนกับอะตอมที่อยู่หนึ่งโดยมีมวลเท่ากันนั้นไม่สามารถเกิดการกระเจิงย้อนกลับได้ ($\theta > 90^\circ$) แต่จะเกิดเฉพาะการกระเจิงไปข้างหน้า ($\theta < 90^\circ$) เพราะฉะนั้นในการเกิดการกระเจิงย้อนกลับหลังจากการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ระหว่างอนุภาคกระสุนกับนิวเคลียสของธาตุบนเป้าได้ก็ต่อเมื่ออนุภาคกระสุนมีมวลน้อยกว่ามวลของอะตอมบนเป้าเสมอ (หรือ $x < 1$) ที่สามารถยืนยันได้จากการ plot กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง K กับมุมที่กระเจิงจากแนวการเคลื่อนที่เดิมของอนุภาคกระสุน θ และ $\frac{1}{x}$ ดังรูปที่ 2.7 [Chu et al., 1978]



รูปที่ 2.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง K กับมุม θ และ $\frac{1}{x}$

กรณีการกระเจิงย้อนกลับ ($\theta > 90$ องศา) จากรูปที่ 2.7 จะพบว่า

- ถ้าเป้าประกอบด้วยธาตุหนัก ค่า K จะมีค่ามาก
- อนุภาคกระสุนมวลหนัก จะให้ค่า K น้อยกว่าเมื่อใช้อนุภาคกระสุนมวลเบาที่ มุม θ เดียวกัน
- ที่มุม θ มาก ๆ จะให้ค่า K น้อยกว่าที่มุม θ น้อย

กล่าวโดยรวมได้ว่า K ยังมีค่าน้อยยิ่งดี เนื่องจากค่า K น้อย ๆ จะทำให้พลังงาน E_1 ยังมีค่าห่างจากพลังงานเริ่มต้น E_0 ของอนุภาคกระสุนมากขึ้น ดังนั้นในทางปฏิบัติจึงนิยมใช้อนุภาคอัลฟาเป็นอนุภาคกระสุน ซึ่งมีมวลหนักพอสมควรและเทคนิคของ ion source ก็ไม่ยุ่งยากมากนัก และอีกตัวแปรหนึ่งที่ส่งผลให้ค่า K มีค่าน้อย ๆ ก็คือมุมที่เลือกวางหัววัดสำหรับกระบวนการกระเจิงย้อนกลับ θ เช่นที่มุม θ เท่ากับ 180 องศา นั้นจะให้ค่า K น้อยสุด แต่ในทางปฏิบัตินั้นเป็นไปได้

เนื่องจาก ถ้าวางหัววัดไว้ที่มุม 180 องศาจะไปขวางลำอนุภาคกระสุน ดังนั้นมุม θ ส่วนใหญ่ก็จะน้อยกว่า 180 องศา เช่น ที่มุม 170 องศาเป็นต้น ซึ่งตัวอย่างของการคำนวณค่า kinematic factor นี้โดยใช้โปรแกรมฟอร์แทรนสามารถดูได้จากภาคผนวก ก1 และตัวอย่างของค่า kinematic factor ดังตารางที่ ค1

2.1.2.2 differential scattering cross – section

สำหรับการกระเจิงของฝูงอนุภาคกระสุนมวล m เมื่อมีอันตรกิริยาแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ กับ repulsive force center ที่อยู่นิ่งนั้น อนุภาคมวล m จะมีทิศทางการเคลื่อนที่เบี่ยงเบน (scattering) ด้วยมุม θ ไปจากทิศทางเดิม และจะเคลื่อนในแนวเส้นตรงต่อไปหลังจากเคลื่อนผ่านจุดศูนย์กลางแรงที่อยู่นิ่ง (fixed force center) แล้ว ซึ่งจำนวนอนุภาค m ที่กระเจิงจากจุดศูนย์กลางแรงที่อยู่นิ่ง (จากเป้าหมายเคลียส 1 ตัว) ไปเข้ายังหัววัดใน 1 วินาที จะเป็นไปตามสมการ

$$dN(\theta) = \Phi_{inc} \Delta\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.20)$$

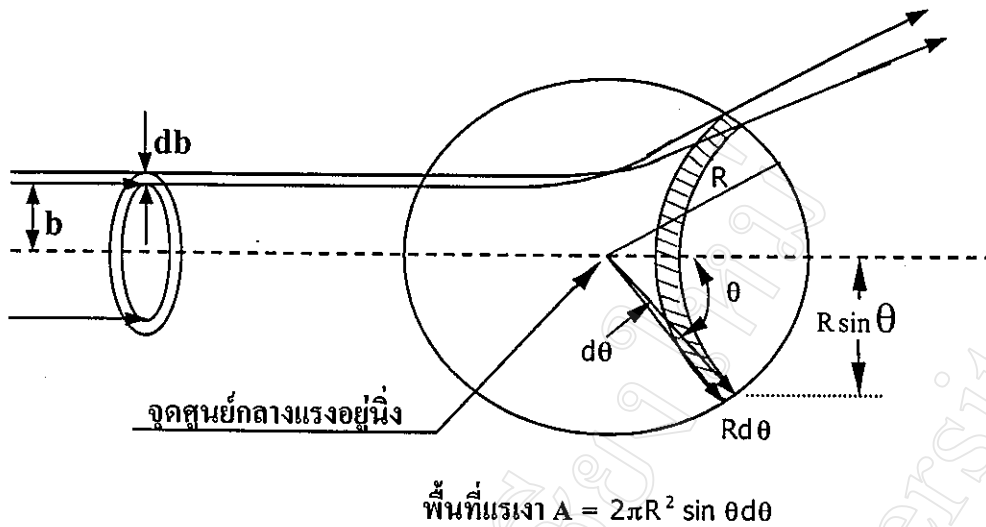
เมื่อ $dN(\theta)$ คือ จำนวนอนุภาค m ที่กระเจิงเข้าไปยัง solid angle $\Delta\Omega$

Φ_{inc} คือ incident flux หรือจำนวนอนุภาค m ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ตั้งฉาก ต่อหนึ่งหน่วยเวลา

$\Delta\Omega$ คือ solid angle ของหัววัด

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ คือ elastic scattering differential cross – section (หน่วย b/Sr)

และถ้าพิจารณาจำนวนอนุภาค m ที่เคลื่อนเข้ามาใกล้กับจุดศูนย์กลางแรงด้วย impact parameter (b) ที่เป็นระยะตั้งฉากระหว่างแนวแกนอ้างอิงที่ผ่านจุดศูนย์กลางแรงกับแนวทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค m ตอนเริ่มต้น ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แผนภาพแสดงการกระเจิงของอนุภาค m ที่วิ่งเข้าหาเป้าในย่าน b ถึง $b+db$ แล้วถูกกระเจิงไปยังมุม θ ถึง $\theta+d\theta$ เนื่องจาก repulsive force ที่บริเวณจุดศูนย์กลางแรง

โดยจำนวนของอนุภาคมวล m ตอนเริ่มต้นที่เคลื่อนที่ที่อยู่ในระยะ impact parameter b ถึง $b+db$ มีค่าเท่ากับ $(2\pi b) db \Phi_{inc}$ และจำนวนของอนุภาคที่กระเจิงเข้าไปยัง solid angle $\Delta\Omega$ ที่อยู่ระหว่างมุม θ ถึง $\theta+d\theta$ เท่ากับ $\Phi_{inc} \Delta\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$ ซึ่ง $\Delta\Omega$ คือ solid angle ที่รองรับด้วยพื้นที่ที่แรง A กล่าวคือ

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \frac{2\pi R \sin \theta (R d\theta)}{R^2} \\ &= 2\pi \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.21)$$

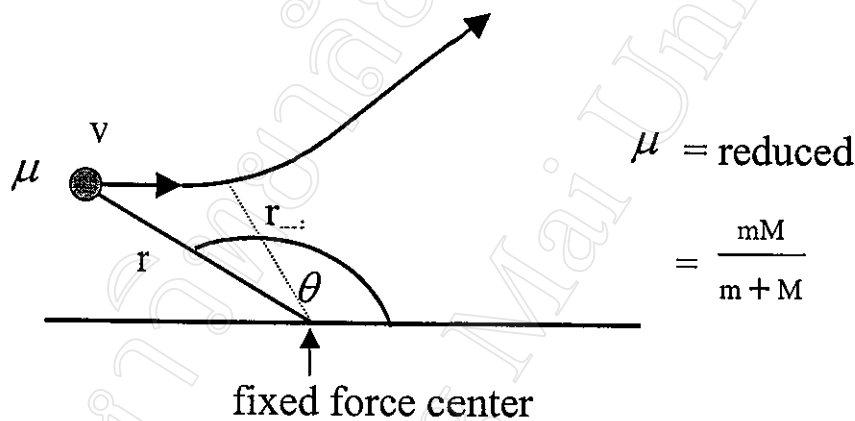
ในกรณีของการกระเจิงแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์นั้น อนุภาคไม่สามารถถูกสร้างหรือถูกทำลาย และแต่ละค่าของ impact parameter b ถึง $b+db$ (เฉพาะภายในวงแหวนรัศมี b ถึง $b+db$) ใน 1 วินาที จะเท่ากับจำนวนอนุภาค m ที่กระเจิงเข้าไปยังแถบแรง A (ภายในพื้นที่วงแหวนที่มีมุมกระเจิงจาก θ ถึง $\theta+d\theta$) ใน 1 วินาที หรือเขียนได้ว่า

$$(2\pi b) db \Phi_{inc} = (2\pi \sin \theta d\theta) \Phi_{inc} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$$

จะได้

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (2.22)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการจะทราบสมการของค่า differential scattering cross – section ที่สมบูรณ์นั้น จำเป็นต้องทราบความสัมพันธ์ระหว่าง impact parameter กับมุมกระเจิง θ (scattering angle) โดยจะหาได้จาก การพิจารณาจลนพลศาสตร์ (kinetic) ของการชนกันของอนุภาค 2 ตัวอันเป็น เรื่องของ two – body problem คือ เมื่อมีอนุภาคกระสุนมวล m เคลื่อนไปชนแบบยืดหยุ่น สมบูรณ์กับนิวเคลียสของอะตอมบนเป้าหมายมวล M อนุภาคกระสุน m จะกระเจิงไปในทิศทาง θ และนิวเคลียสมวล M จะกระดอนไปในทิศทาง ϕ ซึ่งมีความยุ่งยากในการคำนวณ จึงจำเป็นต้องลดรูปจาก two – body problem ลงไปสู่ one – body problem โดยใช้ Relative - system ดังแสดงในรูป 2.9 แล้วจึงค่อยทำการ transform กลับสู่ LAB system ในตอนหลัง



รูปที่ 2.9 ในสนาม repulsive force อนุภาคมวล μ มีแนวทางการเคลื่อนที่แบบไฮเพอร์โบลา

ในการพิจารณาการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์นี้ จะมีค่าโมเมนตัมเชิงมุม (L) คงที่ตลอดการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล μ ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ใน 2 มิติ ในที่นี้จะพิจารณาการเคลื่อนที่ใน ระบบ polar coordinate (r, θ) โดยอนุภาค μ เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงเส้น v ที่ประกอบด้วย v_r และ v_θ

เมื่อ

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

$$v_\theta = r\omega = r\dot{\theta}$$

จาก $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

ดังนั้นที่บริเวณใกล้ ๆ กับจุดศูนย์กลางแรง อนุภาค μ จะมี

$$L = \mu r v_{\theta} = \mu r^2 \dot{\theta}$$

และที่ระยะไกล ๆ จากจุดศูนย์กลางแรง อนุภาค μ ที่เคลื่อนด้วยความเร็ว v ในระยะ impact parameter b จะมี

$$L = \mu v b$$

จากโมเมนตัมเชิงมุมที่คงที่ตลอดการเคลื่อนที่ จะได้ว่า

$$\mu v b = \mu r^2 \dot{\theta}$$

หรือ

$$\dot{\theta} = \frac{vb}{r^2} \quad (2.24)$$

อนุภาค μ ที่บริเวณจุดศูนย์กลางแรงจะมีพลังงาน E_o

$$E_o = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) \quad (2.25)$$

เมื่อ $V(r)$ คือ พลังงานศักย์ของการกระเจิง ณ บริเวณจุดศูนย์กลางแรง

$$V(r) = \frac{Z_o Z e^2}{r} \quad (2.26)$$

โดยที่ $Z_o e$ และ $Z e$ คือประจุของอนุภาคมวล m และ M ตามลำดับ

จากสมการ 2.24 และ 2.25 และใช้ $E_o = \frac{\mu v^2}{2}$

$$\dot{r} = v \left[1 - \frac{V(r)}{E_o} - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.27)$$

แต่ $\dot{r} = dr/dt$ และ $\dot{\theta} = d\theta/dt$ ดังนั้น

$$\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{d\theta}{dr} = \frac{vb}{r^2} \cdot \frac{1}{v \left[1 - \frac{V(r)}{E_0} - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

จะได้

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{b}{r^2 \left[1 - \frac{V(r)}{E_0} - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\int_{\theta/2}^{\pi/2} d\theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{bdr}{r^2 \left[1 - \frac{V(r)}{E_0} - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

หรือ

$$\theta = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \left[1 - \frac{V(r)}{E_0} - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.28)$$

ให้ $u \equiv \frac{1}{r}$ และ $\alpha = Z_0 Ze^2$ แทนในสมการ 2.26 จะได้

$$V(u) = \alpha u \quad (2.29)$$

จากสมการ 2.28 และ 2.29 จะได้

$$\theta = \pi - 2 \int_0^{1/r_{\min}} \frac{du}{\left[\frac{1}{b^2} - \frac{\alpha u}{E_0 b^2} - u^2 \right]}$$

และจากภาคผนวก ก1 จะได้

$$\theta = \pi - 2 \left[\sin^{-1} \left(\frac{-(bu + \frac{\alpha}{2bE_0})}{(1 + \frac{\alpha^2}{4E_0^2 b})} \right) \right]_{1/r_{\min}}^0 \quad (2.30)$$

โดยที่ระยะทาง $r_{\min}$ นี้คือ ระยะน้อยสุด ซึ่งขึ้นอยู่กับพลังงานรวมของอนุภาคและรูปแบบของพลังงานศักย์ $V(r)$ ซึ่งพลังงานรวม E_0 จะต้องมีความค่าคงที่สำหรับการกระเจิงแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} E_0 &= K.E + P.E = \text{ค่าคงที่} \\ &= \frac{1}{2} \mu (v_r^2 + v_\theta^2) + V(r) \\ &= \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \\ &= \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + V'(r) \end{aligned}$$

เมื่อ $V'(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \equiv \text{effective potential energy}$

โดยอนุภาค μ จะเคลื่อนเข้าใกล้กับจุดศูนย์กลางแรง ด้วยระยะ $r_{\min}$ ก็ต่อเมื่อ $V'(r)$ มีค่าเท่ากับ E ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} E_0 &= V(r_{\min}) + \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2} \\ &= V(r_{\min}) + \frac{b^2 E_0}{r_{\min}^2} \end{aligned}$$

หรือ
$$0 = 1 - \frac{V(r_{\min})}{E_0} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} \quad (2.31)$$

แต่ถ้า $u \equiv \frac{1}{r_{\min}}$ สมการ 2.31 จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$b^2 u^2 + \frac{\alpha u}{E_0} - 1 = 0 \quad (2.32)$$

สมการ 2.32 เป็นสมการ Quadratic ของตัวแปร u ซึ่งมีคำตอบของ u คือ

$$u = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{b} \left[\frac{-\alpha}{2bE_0} \pm \left(\left(\frac{\alpha}{2bE_0} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} \right] \quad (2.33)$$

แต่ u มีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ จากสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{b} \left[\frac{-\alpha}{2bE_0} + \left(\left(\frac{\alpha}{2bE_0} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} \right] \quad (2.34)$$

และนำ $\frac{1}{r_{\min}}$ ไปแทนในขอบเขตของการ integrate ในสมการ 2.30 จะได้

$$\theta = \pi - 2 \left\{ \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{\frac{\alpha}{2bE_0}}{\left(1 + \left(\frac{\alpha}{2bE_0} \right)^2 \right)^{1/2}} \right) \right\}$$

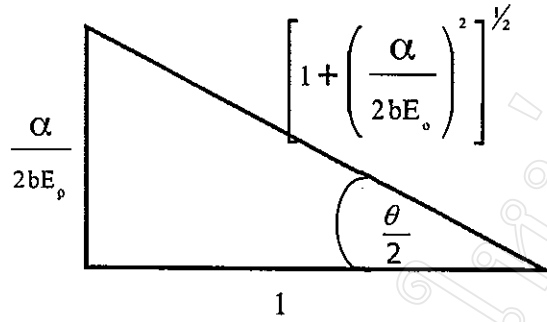
หรือ

$$\frac{\theta - \pi}{2} = \frac{-\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{\alpha}{2bE_0} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{2bE_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.35)$$

จากสมการ 2.35 จะได้

$$\sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2bE_0}}{\left[1 + \left(\frac{\alpha}{2bE_0} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.36)$$

ซึ่งสมการ 2.36 สามารถเขียนอยู่ในรูปตรีโกณมิติ ได้ว่า



จะได้

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{2bE_o}$$

หรือ

$$b = \frac{\alpha}{2E_o} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(2.37)

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{db}{d\theta} &= \frac{\alpha}{2E_o} \frac{d}{d\theta} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{\alpha}{2E_o} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\sin(\theta/2)}{1 - \cos(\theta/2)} \right] \\ &= \frac{\alpha}{4E_o \sin^2(\theta/2)} \end{aligned}$$

และ

$$b \cdot \frac{db}{d\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2E_o} \right)^2 \frac{\cot(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}$$

จากสมการ 2.23 และ 2.38 จะได้

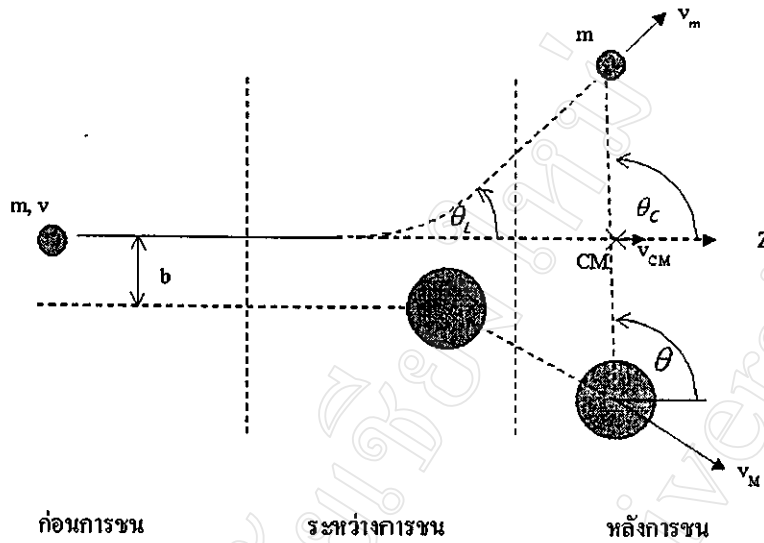
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2E_o} \right)^2 \frac{\cot(\theta/2)}{\sin \theta \sin^2(\theta/2)}$$

หรือ

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \left(\frac{Z_o Z e^2}{4E_o} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

(2.39)

แต่มุมกระเจิง θ ใน R-system นี้เท่ากับ มุมกระเจิงใน Center-of-Mass (CM) system ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 2.10 [Foderaro, 1971]



รูปที่ 2.10 แสดงความสัมพันธ์ของมุมกระเจิงใน Relative system θ กับ CM system θ_c และ LAB system θ_L

ดังนั้นสมการ 2.39 จึงเขียนได้ใหม่ว่า

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_c) = \left(\frac{Z_o Z e^2}{4E_o} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta_c/2)} \quad \text{เมื่อ } \theta = \theta_c \quad (2.40)$$

สมการ 2.40 คือ differential cross-section หรือ Rutherford differential cross-section ที่เป็นที่รู้จักกันดีใน CM-system แต่ในการศึกษาเรื่องของการกระเจิงย้อนกลับนั้น นิยมพูดถึงเทอมต่างๆ ใน LAB-system ซึ่งสามารถ transform จาก CM-system ไปสู่ LAB-system ได้ดังภาคผนวก ก 2 นั่นคือในที่สุดจะได้ว่า

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_L) = \left(\frac{Z_o Z e^2}{2E_o} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta_L/2)} \frac{\{[1 - ((m/M)\sin\theta_L)^2]^{1/2} + \cos\theta_L\}^2}{[1 - ((m/M)\sin\theta_L)^2]^{1/2}} \quad (2.41)$$

เมื่อ E_o คือ พลังงานเริ่มต้นของอนุภาคกระสุนมวล m

θ_L คือ มุมกระเจิงของอนุภาคกระสุนหลังจากชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์กับนิวเคลียสของเป้าใน LAB-system

จากความสัมพันธ์ข้างต้น จะพบว่า $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_L)$ ขึ้นอยู่กับ m, E_0 และ θ_L โดยถ้า

- อนุภาคกระสุนมีพลังงาน E_0 ลดลงนั้น $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_L)$ จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นซึ่งแปรผกผันกับกำลังสองของ E_0
- มุม θ_L มีค่าเข้าใกล้ 180 องศา นั้น $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_L)$ จะมีค่าลดลงเนื่องจาก $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_L)$ จะแปรผกผันกับกำลังสี่ของ $\sin(\theta_L/2)$ โดยประมาณ เมื่อ $m \ll M$
- $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_L)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Z มีค่ามากขึ้น
- อนุภาคกระสุนมวลหนัก m ก็จะทำให้ค่า $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_L)$ น้อยกว่ากรณีที่เป็นกระสุนมวลเบา

ซึ่งตัวอย่างการคำนวณค่า differential scattering cross-section โดยใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรนที่เขียนขึ้นสามารถดูได้จากภาคผนวก ค(2) และตัวอย่างของค่า differential scattering cross-section เป็นไปตามตาราง ค2

2.2 อำนาจการจำแนกของระบบการวัด

ในทางปฏิบัตินั้น ในวัสดุตัวอย่างอาจประกอบไปด้วยนิวเคลียสชนิดต่าง ๆ หลายชนิด ซึ่งมีมวลแตกต่างกัน ถ้าพิจารณาจาก 2 ชนิดที่มีมวลแตกต่างกัน ΔM ก็จะทำให้ค่าพลังงานกระเจิงย้อนกลับของอนุภาคกระสุนที่แตกต่างกัน ΔE_1 เมื่อวางหัววัดไว้ที่มุม θ ปริมาณทั้ง 2 มีความสัมพันธ์กันดังต่อไปนี้

$$\text{จาก} \quad K = \frac{E_1}{E_0}$$

$$\text{หรือ} \quad E_1 = KE_0$$

Differentiation ของสมการข้างต้นคือ

$$\frac{dE_1}{dK} = E_0$$

จาก Chain rule :

$$\frac{dE_i}{dM} \cdot \frac{dM}{dK} = E_o$$

$$dM = \left(\frac{dM}{dK} \right) \frac{dE_i}{E_o}$$

หรือ

$$\Delta M = \left(\frac{dK}{dM} \right)^{-1} \frac{\Delta E_i}{E_o} \quad (2.42)$$

เมื่อ M คือ มวลของไอโซโทปบนเป้า
 E_o คือ พลังงานเริ่มต้นของอนุภาคกระสุน

จากสมการ 2.19 จะได้

$$\frac{dK}{dM} = \frac{2A}{(m+M)^2} \left[\frac{M}{B} - \frac{A}{m+M} \right] \quad (2.43)$$

$$A = m \cos \theta_L + B$$

$$B = \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta_L}$$

เมื่อนำ $\left(\frac{dK}{dM} \right)^{-1}$ จากสมการ 2.43 แทนในสมการ 2.42 จะได้

$$\Delta M = \frac{B(m+M)^3}{2A[Mm + M^2 - AB]} \cdot \frac{\Delta E_i}{E_o} \quad (2.44)$$

โดยทั่วไปแล้วหัววัดที่ใช้วัดนั้นจะมีอำนาจการจำแนกเชิงพลังงาน (energy resolution) จำกัดค่าหนึ่ง สมมุติเท่ากับ δE ซึ่งถ้าค่าพลังงานที่กระเจิงย้อนกลับของอนุภาคกระสุนหลังจากชนกันนิวเคลียสของธาตุ (หรือไอโซโทป) ที่ต่างกัน 2 ชนิด มีความแตกต่างกัน ΔE_i น้อยกว่าค่า δE ของหัววัด ระบบการทดลองนั้นจะไม่สามารถแยกความแตกต่างของนิวเคลียส 2 ชนิดนี้ได้

ถ้า δE ของหัววัดจะเป็นตัวกำหนดว่าระบบการทดลองนั้นสามารถเห็นความแตกต่างของไอโซโทปที่มีมวลใกล้เคียงกันได้มากเพียงใด ดังนั้น ณ จุดที่ $\Delta E_i = \delta E$ สมการ 2.44 จะให้ค่า ΔM ที่น้อยที่สุด ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์เป็น δM และได้ถูกใช้เป็นตัวบอกถึงอำนาจการจำแนก

เชิงมวล (mass resolution) ของระบบการทดลองนั้น แต่สมการ 2.44 ยังบอกด้วยว่าค่า δM ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์อื่นอีกหลายตัว ดังจะเห็นได้จากตารางที่ 2.2 [Chu et al., 1978]

ตารางที่ 2.2 จะแสดงให้เห็นเงื่อนไขของค่าอำนาจการจำแนกเชิงมวล (δM) ของระบบการทดลอง เมื่อหัววัดที่ใช้คือ SS B ตั้งอยู่ที่มุม $\theta = 180$ องศา

Projectile	Detector resolution δE (FWHM) (keV)	Incident energy E_0 (MeV)	$\delta E/E_0$	Mass resolution δM (FWHM)	
				เมื่อ $M \approx 100$ u	เมื่อ $M \approx 200$ u
^1H	5	0.5	0.0100	26	102
	5	1.0	0.0050	13	51
	5	1.5	0.0033	9	34
	5	2.0	0.0025	7	26
^4He	16	0.5	0.032	23	87
	16	1.0	0.016	12	43
	16	1.5	0.012	9	32
	16	2.0	0.008	6	22
^{12}C	37	0.5	0.024	25	78
	48	1.0	0.078	16	51
	57	1.5	0.038	13	40
	61	2.0	0.031	10	33
^{20}Ne	49	0.5	0.098	26	72
	71	1.0	0.071	19	52
	86	1.5	0.057	15	42
	96	2.0	0.048	13	35

จากตารางที่ 2.2 พบว่า δM จะดีขึ้น (มีค่าน้อยลง) เมื่อพลังงาน E_0 ของอนุภาคกระสุนมีค่าเพิ่มขึ้น และ δM ยังขึ้นกับ δE ซึ่งถ้า δE มีค่าน้อยลงจะให้ δM จะดีขึ้น เมื่อ δE ของหัววัด SS B นี้จะขึ้นอยู่กับมวล m และพลังงาน E_0 ของอนุภาคกระสุนด้วย จากการศึกษาโดย Bergstrom et al. (1968) พบว่ากรณีที่อนุภาคกระสุนเป็น ^{12}C และ ^{20}Ne นั้น δE จะมีค่ามากขึ้นเมื่อพลังงาน E_0 ของอนุภาคกระสุนมีค่ามากขึ้น แต่ยกเว้นกรณีที่อนุภาคกระสุนเป็น ^1H และ ^4He นั้น δE จะมีค่าประมาณ 5 keV และ 16 keV ตามลำดับ สำหรับพลังงาน E_0 มีค่า 0.5 – 2

MeV ตัวอย่างเช่น สเปกตรัมเชิงพลังงานในรูปที่ 1.5 จะพบว่า สเปกตรัมเชิงพลังงานของอนุภาคอัลฟาที่กระเจิงย้อนกลับหลังจากชนกับนิวเคลียสของธาตุนิกเกิล (Ni) และเหล็ก (Fe) ไปยังหัววัด SSB ที่มุม 170 องศา นั้นไม่สามารถแยกออกจากกันได้อย่างชัดเจน เมื่ออนุภาคอัลฟานี้มีพลังงานเริ่มต้น (E_0) เท่ากับ 1.9 MeV เนื่องจาก δM ของระบบ (จากสมการ 2.44) มีค่าเท่ากับ 2.4 u เมื่อ δE ของระบบมีค่าเท่ากับ 16 keV (จากตารางที่ 2.2) และ M คือมวลของนิกเกิล ซึ่งจากการคำนวณ δM นี้พบว่ามีค่าน้อยกว่าความแตกต่างระหว่างมวลของธาตุนิกเกิลและเหล็ก (ΔM) โดยที่

$$(\Delta M) = M_{Ni} - M_{Fe} \approx 2u$$

เมื่อมวลของนิกเกิล M_{Ni} เท่ากับ 57.93 u และมวลของเหล็ก M_{Fe} เท่ากับ 55.93 u ซึ่งจากการคำนวณข้างต้น พบว่าระบบนี้สามารถจำแนกธาตุที่มีมวลแตกต่างกันได้ตั้งแต่ 2.4 u ขึ้นไปซึ่งก็คืออำนาจการจำแนกเชิงมวลของระบบ

แต่สำหรับกรณีที่อนุภาคกระสุนเป็นอนุภาคดิวทีรอน พลังงานขนาดกลาง เช่น 140 keV นั้นไม่สามารถใช้หัววัด SSB ในการวัดพลังงานที่กระเจิงย้อนกลับ E_1 ของอนุภาคดิวทีรอนได้ เนื่องจากติดปัญหาที่ intrinsic noise ของหัววัดที่สูงอยู่ในระดับเดียวกับสัญญาณของอนุภาคกระเจิง จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนเป็นหัววัด MCP ที่ไม่มีปัญหาเรื่องนี้ อีกทั้งยังสามารถตอบสนอง (sensitivity) ได้ไว ทำให้สามารถวัดเวลาในการเคลื่อนที่ของอนุภาคได้แม่นยำ แต่ใช้วัดเชิงพลังงานโดยตรงไม่ได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องเปลี่ยนจากการวัดพลังงาน E_1 โดยตรงมาเป็นการวัดเวลาของอนุภาคดิวทีรอนที่ใช้ในการเคลื่อนที่ ซึ่งเทคนิคนี้จะถูกเรียกสั้นๆว่า TOF – RBS (time – of – flight RBS)

โดยอำนาจการจำแนกเชิงพลังงาน δE_1 ของระบบ TOF – RBS จะสัมพันธ์กับอำนาจการจำแนกเชิงเวลา (timing resolution) ของระบบ δt ดังสมการ

$$\delta E_1 \text{ (keV)} = \frac{0.088}{L \text{ (cm)}} \sqrt{\frac{E_1^3 \text{ (keV)}}{m \text{ (u)}}} \delta t \text{ (ns)} \quad (2.45)$$

เมื่อ L คือระยะทางที่อนุภาคดิวทีรอนเคลื่อนที่จากเป้าไปยังหัววัด MCP (flight path) ซึ่งเทคนิค TOF นั้นมีหลายแบบ เช่น ในกรณีของ Mendenhall และ Weller ดังกล่าวในบทที่ 1 ใช้หัววัด MCP 2 ตัวแล้ววัด TOF ระหว่าง 2 หัววัดนี้ แต่สำหรับในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการทำลำอนุภาคดิวทีรอน ให้เป็นห้วงและใช้หัววัด MCP 1 ตัววัด TOF ระหว่างสัญญาณจาก MCP และ

สัญญาณจากห้วงคิวทีรอน ดังนั้น δt ของระบบ TOF – RBS ก็จะขึ้นอยู่กับอำนาจการจำแนกเชิงเวลาของระบบอิเล็กทรอนิกส์ และความกว้างของสัญญาณห้วงคิวทีรอน ดังนี้

$$\delta t(\text{ns}) = 2dt \quad (2.46)$$

เมื่อ $dt = \sqrt{(dt_{\text{pulse}})^2 + (dt_{\text{elec}})^2 + (dt_{\text{detec}})^2}$

โดยที่ dt_{elec} คือ timing error ของระบบอิเล็กทรอนิกส์

dt_{pulse} คือ timing error ของความกว้างของห้วงคิวทีรอน

dt_{detec} คือ timing error ของ geometrical timing resolution ของหัววัด ซึ่งจะกล่าวถึงในรายละเอียดในหัวข้อ 5.1.2

เมื่อแทนค่าสมการ 2.46 ในสมการ 2.45 ทำให้ได้ ΔE ของระบบ TOF – RBS เพื่อที่จะนำไปหาอำนาจการจำแนกเชิงมวลของระบบ ΔM ต่อไปในสมการ 2.44