

บทที่ 2

วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ เป็นการศึกษาและพัฒนาารูปแบบกระบวนการสอนที่เน้นการพัฒนาความสามารถการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องการบวกลบจำนวนที่มีสองหลัก การบวกลบระคน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ซึ่งมีเอกสารงานวิจัยและแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาในครั้งนี้ ซึ่งเสนอตามลำดับดังนี้

- 2.1 ความหมายและหลักการที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหา
 - 2.1.1 ความหมายของการแก้ปัญหา
 - 2.1.2 หลักการของการแก้ปัญหา
- 2.2 ประเภทของปัญหา
- 2.3 กระบวนการและขั้นตอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- 2.4 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- 2.5 แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์
 - 2.5.1 ทฤษฎีการเรียนรู้ที่นำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 1) ทฤษฎีการเรียนรู้โดยนัย
 - 2) ทฤษฎีการเรียนรู้พฤติกรรมนิยม
 - 2.5.2 หลักการตามรูปแบบการสอน Cooperative learning
 - 2.5.3 แนวคิด Constructivist
- 2.6 หลักการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา
 - 2.6.1 การพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์
 - 2.6.2 การพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์
 - 2.6.3 การพัฒนาการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- 2.7 แบบทดสอบเพื่อวัดความสามารถแก้ปัญหา
- 2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
- 2.9 กระบวนการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อพัฒนาความสามารถแก้ปัญหา
 - 2.9.1 วิเคราะห์สภาพปัญหาและแนวทางแก้ไข
 - 2.9.2 รูปแบบกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายและหลักการที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา

2.1.1 ความหมายของการแก้ปัญหา

วัลลภา อารีรัตน์ (2532) กล่าวถึงการแก้ปัญหาคือกระบวนการประยุกต์เอาความรู้ที่มีอยู่ไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ หรือสถานการณ์ที่ยังไม่คุ้นเคย

ปราณีต ภูโอบ (2532) กล่าวถึงการแก้ปัญหาว่า เป็นกระบวนการที่ต้องอาศัยความรู้ ความคิด ประสบการณ์ วิธีการและขั้นตอน ในการพิจารณาโครงสร้างและสภาพการณ์ของปัญหา เพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมายที่ต้องการ

กมลรัตน์ หล้าสุวงษ์ (2524) กล่าวถึงการแก้ปัญหาว่า หมายถึงการใช้ประสบการณ์เดิมจากการเรียนทั้งทางตรงและทางอ้อมมาแก้ปัญหาใหม่ที่ประสบ

โสภา สันทัตพร้อม (2535) สรุปความหมายของการแก้ปัญหาว่า เป็นการนำความสามารถทั้งทางด้านความรู้และประสบการณ์เดิมมาใช้ในการแก้ไขสถานการณ์ที่เป็นปัญหาในปัจจุบัน เพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมาย

Krulik และ Rudnick (อ้างถึงในสุลัดดา ลอยฟ้า, 2536) ได้ให้นิยามของการแก้ปัญหา คือ กระบวนการที่ต้องใช้การวิเคราะห์และสังเคราะห์ความรู้และทักษะที่มีอยู่ไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่หรือสถานการณ์แตกต่างออกไป

โรเบิร์ต จอห์นสัน (อ้างถึงในทพวงมหาวิทยาลัย, 2524) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาคือการใช้กระบวนการทางสมองที่ซับซ้อน ต้องอาศัยความรู้พื้นฐานมโนคติและทักษะที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น ๆ

Hatfield, Edwards และ Bitter (1993) ได้ให้นิยามเกี่ยวกับการแก้ปัญหาว่าเป็นความสามารถทางสติปัญญาของมนุษย์ ในการทำความเข้าใจปัญหา พิจารณาความสัมพันธ์ของปัญหาดังกล่าวกับประสบการณ์ที่ผ่านมา มีการคาดเดาคำตอบที่น่าจะเป็นไปได้ และพยายามจนสามารถแก้ปัญหานั้นได้ ซึ่งถือเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งในการดำรงชีวิตในปัจจุบัน

Copeland (1982) ให้ความหมายการแก้ปัญหาคือสรุปว่า เป็นกระบวนการที่ต้องใช้ความรู้ความสามารถและทักษะ (Function essential) หลายๆ อย่างรวมกันเพื่อนำมาใช้ในการชีวิตประจำวันรอบๆ ตัวเราประกอบด้วยความเข้าใจในความคิดรวบยอด และเทคนิคการคำนวณในปัญหาการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แทนความสัมพันธ์ของปัญหา การหาเหตุผลเชิงอุปนัยและนิรนัยเพื่อหาข้อสรุปวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล การแปลความหมายข้อมูล การทดสอบสมมติฐาน การแสดงผลลัพธ์ที่ได้เป็นต้น ผู้เรียนต้องรู้จักหน้าที่สำคัญของโจทย์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ นิยามปัญหาคิดหาแนวทางแก้ปัญหาคือต่อไป โดยมีจุดเน้นที่ความเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหามากกว่าการได้มาซึ่งคำตอบ

Kaur (1993) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคือออกเป็น 3 ประการคือ การแก้ปัญหาเปรียบเสมือนเป้าหมาย (goal) ที่จะทำการแก้ปัญหานั้นได้อย่างไร ซึ่งจะต้องใช้

กระบวนการ (process) และทักษะพื้นฐาน (basic skill) ต่างๆ ประกอบเข้ากัน เช่น ทักษะการพิจารณาเนื้อหาของโจทย์ ชนิดของโจทย์ วิธีแก้โจทย์ การคิดคำนวณ

สรุปความหมายการแก้ปัญหามา หมายถึง กระบวนการหรือวิธีการที่ซับซ้อนที่ผู้เรียนต้องอาศัยใช้ความรู้ ความคิด มโนคติ ประสบการณ์ และทักษะพื้นฐานต่างๆ ที่มีอยู่ไปประยุกต์ใช้เพื่อให้บรรลุตามเป้าหมายในสถานการณ์ปัญหาใหม่ หรือสถานการณ์ปัญหาที่แตกต่างออกไป

2.1.2 หลักการของการแก้ปัญหา

กมลรัตน์ หล้าสูงษ์ (2528) ได้อธิบายเกี่ยวกับการแก้ปัญหามา หมายถึง ประสบการณ์เดิมจากการเรียนรู้ทางตรง และทางอ้อม มาแก้ปัญหามาใหม่ที่ประสบ ซึ่งการแก้ปัญหามาแต่ละครั้งจะสำเร็จหรือได้ผลดีขึ้นอยู่กับองค์ประกอบต่อไปนี้

1. ระดับความสามารถของเขาวัดปัญหามา ผู้เรียนที่มีระดับเขาวัดปัญหามาสูงย่อมสามารถแก้ปัญหามาได้ดีกว่าผู้เรียนที่มีระดับเขาวัดปัญหามาต่ำ
2. การเรียนรู้ในการแก้ปัญหามาได้สำเร็จและรวดเร็วเกิดจากการที่ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างแท้จริง สามารถจับหลักการต่าง ๆ ในขณะที่เรียนรู้ได้อย่างเข้าใจต้องแท้เมื่อประสบปัญหามาเช่นนี้อีก หรือปัญหามาที่คล้ายคลึงกันจะแก้ปัญหามาได้อย่างรวดเร็วถูกต้อง
3. การรู้จักคิดแบบเป็นเหตุเป็นผล โดยอาศัยสิ่งต่าง ๆ ดังนี้
 - 3.1 ข้อเท็จจริงและความรู้จากประสบการณ์เดิม
 - 3.2 มุ่งหมายในการคิดและการแก้ปัญหามา
 - 3.3 ระยะเวลา การรู้จักคิดอย่างมีเหตุจำเป็นต้องอาศัยเวลา ดังนั้นผู้ฉลาดมักจะทิ้งระยะเวลาสักระยะหนึ่งเมื่อประสบปัญหามา เพื่อไตร่ตรองหาเหตุผลที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหามาวิธีการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหามามากแตกต่างกันออกไป แล้วแต่ประสบการณ์ของผู้เรียนและสภาพของปัญหามาที่เกิดขึ้น ดังนี้

1. การแก้ปัญหามาโดยการใช้พฤติกรรมแบบเดียว
2. การแก้ปัญหามาแบบลองผิดลองถูก
3. การแก้ปัญหามาโดยการเปลี่ยนแปลงทางความคิด
4. การแก้ปัญหามาโดยวิธีการทางวิทยาศาสตร์

สำหรับการแก้ปัญหามาโดยวิธีการทางวิทยาศาสตร์ การแก้ปัญหามาในระดับนี้ถือว่าเป็นระดับสูงสุดและใช้ได้ดีที่สุด โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการแก้ปัญหามาที่ยาก ซับซ้อนการแก้ปัญหามาด้วยวิธีนี้จะต้องอาศัยองค์ประกอบต่าง ๆ ดังนี้

1. ระดับเขาวัดปัญหามา โดยต้องมีระดับเขาวัดปัญหามาอย่างน้อยระดับปกติขึ้นไป (I.Q. =

2. การคิดแบบมีเหตุผลคือ รู้จักไตร่ตรองสภาพต่างๆ ที่เกิดขึ้นว่าอะไรเป็นเหตุและทำให้เกิดผลอะไรบ้าง
3. ประสบการณ์เดิม ซึ่งจากการเรียนรู้ทั้งทางตรงและทางอ้อม
4. เวลาในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาวิธีนี้ จำเป็นต้องอาศัยเวลาเพื่อไตร่ตรอง หาเหตุผลตั้งสมมติฐาน ก่อนนำไปใช้แก้ปัญหาจริงๆ ต่อไป ซึ่งมีรายละเอียด คือ
 - 4.1 พิจารณาโดยอาศัยการสังเกต
 - 4.2 ตั้งสมมติฐานจากประสบการณ์เดิมต่างๆ
 - 4.3 ทดสอบสมมติฐาน
 - 4.4 คงสมมติฐานที่ถูกต้องไว้ แต่ถ้าผิดให้สมมติฐานเดิมทิ้งไป ย้อนกลับไปพิจารณาปัญหาแล้วตั้งสมมติฐานขึ้นใหม่
 - 4.5 นำสมมติฐานที่ดีที่สุดไปใช้ อาจเป็นการใช้ทั้งหมด หรือประยุกต์ไปใช้เฉพาะบางส่วนที่เหมาะสมกับสภาพปัญหา

Piaget (1962) ได้อธิบายถึงความสามารถในการแก้ปัญหา ตามทฤษฎีทางด้านการพัฒนาการในแง่ที่ว่า ความสามารถทางด้านนี้ จะเริ่มพัฒนาการมาตั้งแต่ขั้นที่ 3 คือ Stage of Concrete Operations เด็กมีอายุประมาณ 7-8 ปี จะเริ่มมีความสามารถในการแก้ปัญหาแบบง่ายๆ ภายในขอบเขตจำกัด ต่อมาถึงระดับการพัฒนาการขั้นที่ 4 คือ Stage of Formal Operation เด็กมีอายุประมาณ 11-12 ปี เด็กจะมีความคิดความสามารถหาเหตุผลดีขึ้น และสามารถคิดแก้ปัญหาแบบซับซ้อนได้ เด็กสามารถเรียนรู้ในสิ่งที่เป็นนามธรรมชนิดซับซ้อนได้

Gagne (1970) ได้อธิบายถึงความสามารถด้านคิดค้นกับปัญหาว่า เป็นรูปแบบของการเรียนรู้อย่างหนึ่งที่ต้องอาศัยการเรียนรู้ประเภทหลักการที่มีความเกี่ยวข้องกัน ตั้งแต่สองประเภทขึ้นไปและใช้หลักการนั้นประสมประสานกัน จนเป็นความสามารถชนิดใหม่ที่เรียกว่าความสามารถทางด้านการคิดแก้ปัญหา โดยการเรียนรู้ประเภทหลักการนี้ต้องอาศัยความสามารถในการมองเห็นลักษณะร่วมของสิ่งเร้าทั้งหลาย

Good (1973) ได้ให้ความเห็นว่า วิธีการทางวิทยาศาสตร์คือ การแก้ปัญหา นั่นเอง ซึ่ง Good ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นแบบหรือวิธีการดำเนินการซึ่งอยู่ในสภาวะที่มีความยากลำบากยุ่งยาก หรืออยู่ในสภาวะที่พยายามตรวจสอบข้อมูลที่หามาได้ ซึ่งความเกี่ยวข้องกันปัญหามีการตั้ง-สมมติฐาน และมีการตรวจสอบสมมติฐานภายใต้การควบคุมมีการรวบรวมเก็บข้อมูลจากการทดลองเพื่อหาความสัมพันธ์ที่จะทดแทนสมมติฐานนั้น ว่าเป็นจริงหรือไม่

Suydam (1982) ได้สรุปหลักการที่ควรคำนึงในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นผลจากการวิเคราะห์และสังเคราะห์ จากการวิจัยเกี่ยวกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. เทคนิคและกลวิธีในการแก้ปัญหา สามารถสอนหรือเรียนรู้ได้ นอกเหนือจากประสบการณ์การแก้ปัญหา นักเรียนควรได้รับการเสนอแนะเทคนิค วิธีที่มีประสิทธิภาพและหลากหลายในการแก้ปัญหาด้วย

2. ไม่มีเทคนิควิธีการแก้ปัญหาคัดที่สามารถใช้ในการแก้ปัญหได้ทุกรูปแบบการแก้ปัญหาหนึ่งอาจใช้เทคนิควิธีการแก้ปัญหามากมาย วิธี

3. การสอนให้นักเรียนรู้จักเทคนิควิธีการแก้ปัญหามากมาย วิธี จะเป็นการเตรียมนักเรียนให้พร้อมที่จะเลือกเทคนิควิธีที่เหมาะสมแต่ละสถานการณ์ปัญหาที่เขาเผชิญ

4. ควรจัดประสบการณ์ให้มีโอกาสในการแก้ปัญหา ในหลายรูปแบบและเป็นปัญหาซึ่งนักเรียนต้องใช้ความพยายามในการแก้ปัญหารวมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนใช้เทคนิควิธีต่างๆ หลายวิธีเพื่อให้ตระหนักว่าการแก้ปัญหาไม่จำเป็นจะต้องมีวิธีการแก้ปัญหาเพียงวิธีเดียว

5. ปัญหาควรเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน เพราะความสามารถในการแก้ปัญหสัมพันธ์กับระดับการพัฒนาการของนักเรียน

สรุปแนวคิดและหลักการของการแก้ปัญหาคือ การแก้ปัญหาคือการรู้จักคิดอย่างมีเหตุผลเป็นแบบแผนหรือวิธีดำเนินการที่มักแตกต่างกันออกไปตามประสบการณ์ของผู้แก้ปัญหา และสภาพของปัญหาที่เกิดขึ้น

2.2 ประเภทของปัญหา

ทบทวนมหาวิทยาลัย (2524) แบ่งประเภทของปัญหาเป็นหลายประเภทดังนี้

1. ปัญหาที่เป็นการค้นหาข้อความจริง หรือข้อสรุปใหม่ที่นักเรียนยังไม่เคยรู้มาก่อน
2. ปัญหาซึ่งมาจากการอธิบายในชั้นเกี่ยวกับเนื้อหา
3. ปัญหาเกี่ยวกับวิธีการ การพิสูจน์ทฤษฎีบท หรือข้อสรุปที่มีผู้อื่นตั้งไว้
4. ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ ที่อาศัยนิยาม ทฤษฎีบทต่างๆ มาใช้
5. ปัญหาที่ไม่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ แต่ต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา

ชัยเขนทร์ เมืองแมน (2533) แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็น 2 ลักษณะคือ

1. ปัญหาให้ค้นหาคำตอบ เป็นโจทย์ปัญหาระดับประถมศึกษา ที่มีจุดประสงค์ให้ค้นหาสิ่งที่ต้องการ อาจเป็นโจทย์ปัญหาในเชิงทฤษฎีหรือเชิงปฏิบัติ อาจเป็นรูปธรรม หรือนามธรรม เช่น การหาผลบวก ผลต่าง ผลคูณ หรือผลหารของจำนวน เศษที่ได้จากการหาร กว้าง-ขาดทุน การหาพื้นที่ ปริมาตร และการวัด เป็นต้น

2. ปัญหาที่ให้พิสูจน์

Le blanc, Proudfit และ Putt (อ้างถึงใน สุลัดดา ลอยฟ้า และคณะ, 2530) ได้แบ่งชนิดของปัญหาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ

1. ปัญหาที่มีอยู่ในหนังสือแบบเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไป (Textbook Problems) เป็นปัญหาที่มุ่งพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการกระทำเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ และการหาร เพื่อให้นักเรียนสามารถประยุกต์หรือนำความรู้เกี่ยวกับการกระทำเหล่านี้ไปใช้ในชีวิตประจำวัน อาจเสนอในรูปแบบของรูปภาพ หรือแผนภาพ วลี หรือประโยคสั้นๆ เป็นข้อความหรือเรื่องสั้นๆ หรือผสมผสานกันหลายรูปแบบ

2. ปัญหาที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา (Process Problem) เป็นปัญหาที่เน้นเทคนิคหรือกลวิธีในการแก้ปัญหา เน้นกระบวนการแก้ปัญหามากกว่าผลลัพธ์หรือคำตอบของปัญหามุ่งพัฒนาและฝึกกลวิธีในการแก้ปัญหาเป็นสำคัญ โดยการจัดโอกาสให้นักเรียนได้คิดค้นวิธีการแก้ปัญหด้วยตนเองหรือโดยความร่วมมือของเพื่อนในกลุ่มเพื่อสร้างความมั่นใจในการแก้ปัญหา

2.3 กระบวนการและขั้นตอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

NCTM (1989) ให้ความสำคัญกับการแก้ปัญหาว่าจะแทรกอยู่ในทุกหัวข้อของคณิตศาสตร์เพราะเป็นพื้นฐานสำหรับการพัฒนาความรู้และการให้เหตุผล Campbell และ Bamberger (1990) กล่าวถึงการแก้ปัญหาว่า เป็นแหล่งของความเกี่ยวเนื่องทางความคิดคณิตศาสตร์ เป็นบริบท (context) สำหรับการสืบเสาะความเกี่ยวข้อง และเป็นเครื่องช่วยสำหรับการต่อเนื่องระหว่างมโนคติกับทักษะทางคณิตศาสตร์

Donovan Johnson and Jerald Rising (อ้างถึงในทบทวนมหาวิทยาลัย, 2524 และยุพิน พิพิธกุล, 2530) กล่าวว่า การแก้ปัญหาคือกระบวนการทางสมองที่ซับซ้อน ซึ่งต้องประกอบด้วย

- 1) การมองเห็นภาพ (visualizing) ผู้ที่จะแก้ปัญหามองทะลุและกว้างไกล มองเห็นแนวทางที่จะคิดแก้ปัญหา
- 2) การจินตนาการ (imagining) ในการคิดแก้ปัญหาจะต้องรู้จักจินตนาการว่า ควรเป็นอย่างไร เพื่อเป็นแนวทางในการคิดแก้ปัญหา
- 3) การจัดท่าอย่างมีทักษะ (manipulating) เมื่อมองเห็นแนวทางแล้วก็ลงมือทำอย่างมีระบบ มีขั้นตอน ทำด้วยความชำนาญ
- 4) การวิเคราะห์ (analyzing) รู้จักวิเคราะห์ตามขั้นตอนที่กระทำนั้น
- 5) การสรุป (abstracting) ลงมือกระทำจนมองเห็นรูปแบบแล้วก็สามารถสรุปได้
- 6) การโยงความคิด (associating ideas) ความสามารถในการสัมพันธ์การคิดและมองเห็นแนวทางได้

การแก้ปัญหา เป็นกระบวนการที่ซับซ้อนโดยเฉพาะอย่างยิ่งในการสอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา หากนักเรียนมีศักยภาพการใช้ความคิดทางคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง

Dewey (1971) ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาที่เรียกว่า Dewey's Problem Solution ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. การรับรู้และเข้าใจปัญหา เมื่อมีปัญหาเกิดขึ้น คนส่วนใหญ่จะต้องพบกับความตึงเครียด ความสงสัยและความยากลำบากที่จะต้องแก้ปัญหานั้นให้หมดไป ในขั้นต้นผู้พบปัญหาจะต้องรับรู้และเข้าใจในตัวปัญหานั้นก่อน

2. การระบุและแจกแจงลักษณะของปัญหา ปัญหาที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกัน มีระดับความยากง่ายที่จะแก้ไขได้ต่างกัน จึงต้องพิจารณาสืบต่อไป

2.1 มีตัวแปรต้นหรือองค์ประกอบอะไรบ้าง

2.2 มีอะไรบ้างที่จะต้องทำในการแก้ปัญหา โดยอาจที่จะเป็นการระบุปัญหาได้ไม่แจ่มชัด เป็นต้น

2.3 ต้องจัดการมองปัญหาในวงกว้างออกไป โดยให้มองในสิ่งที่เกิดขึ้นเพื่อที่จะแก้ปัญหาไปทีละตอน

2.4 ต้องรู้จักถามคำถามที่จะเป็นกุญแจนำไปสู่การแก้ปัญหา

2.5 พยายามดูเฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับปัญหาจริงๆ บางครั้งอาจมีสิ่งที่เรามองเห็นไม่ชัดที่เป็นตัวก่อกำเนิด ถ้าจัดสิ่งนั้นได้ก็จะแก้ปัญหาได้

3. การรวบรวมข้อเท็จจริงเกี่ยวกับปัญหา เพื่อตั้งสมมติฐาน

3.1 จะมีวิธีการหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับปัญหาอย่างไร ใครจะเป็นผู้ให้ข้อมูลเหล่านั้น

3.2 สร้างสมมติฐานหรือคำถามที่อาจเป็นไปได้ เพื่อช่วยแก้ปัญหา

4. การเลือกวิธีการแก้ปัญหา หลังจากได้ความคิดว่า จะแก้ปัญหายังไงแล้วก็ลองพิจารณาดูว่าจะใช้วิธีใดได้บ้าง

5. การทดลองนำเอาวิธีการแก้ปัญหามาใช้

Weir (1974) ยังได้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาเอาไว้ 4 ขั้นตอนด้วยกันคือ

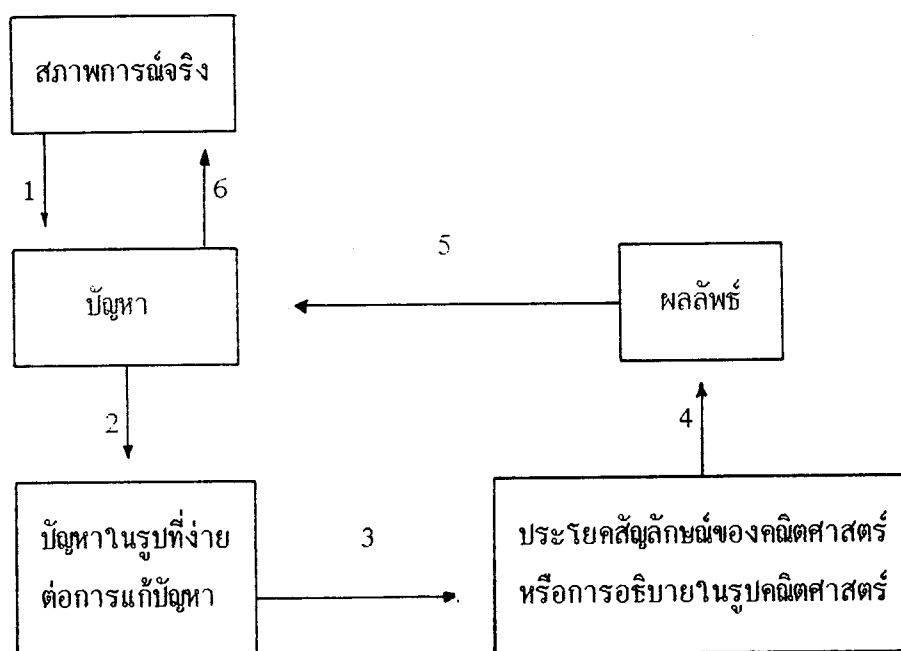
ขั้นที่ 1 ขั้นในการตั้งปัญหา (Statement of Problem)

ขั้นที่ 2 ขั้นในการวิเคราะห์ปัญหา (Defining the Problem of Distinguishing Essential Feature)

ขั้นที่ 3 ขั้นในการปฏิบัติการทดลอง (Searching for and Formulating a Hypothesis)

ขั้นที่ 4 ขั้นในการตรวจสอบผลลัพธ์ (Verifying the Solution)

Rohr (อ้างถึงใน สลัดดา ลอยฟ้า และคณะ, 2530) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพการแก้ปัญหาของ Rohr ได้เสนอแนะการกระทำของผู้แก้ปัญหาจะต้องปฏิบัติคือ

1. สังเกตและวิเคราะห์สถานการณ์ว่าอะไรคือปัญหา
2. พิจารณาปัญหาและทำปัญหาให้ง่ายแก่การแก้ปัญหา เช่น ตัดส่วนที่ไม่เกี่ยวข้องออก

เขียนแผนภาพ หรือวาดภาพประกอบ

3. เปลี่ยนปัญหาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์
4. คำนวณผลลัพธ์หรือคำตอบจากประโยชน์สัญลักษณ์
5. นำผลลัพธ์ไปตอบปัญหา แปลความหมายของผลลัพธ์ไปสู่ปัญหา
6. นำปัญหาที่แก้ได้ไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง

Charls (อ้างถึงใน สุลัดดา ลอยฟ้า และคณะ, 2530) ได้สรุปไว้ในบทความเรื่อง "The Role of Problem Solving" ว่ากระบวนการแก้ปัญหา คือกระบวนการของการเข้าใจปัญหา การเลือกหรือรวบรวมข้อมูล การเลือกและการใช้เทคนิคการแก้ปัญหา การตอบปัญหาและการประเมินคำตอบที่สมเหตุสมผล

Stephen Krulik และ Robert E.Reys (อ้างถึงใน ยุพิน พิพิธกุล, 2530) กล่าวถึงขั้นตอนการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. ทำความเข้าใจ พิจารณาว่าอะไรเป็นตัวที่ไม่ทราบค่า มีข้อมูลหรือเงื่อนไขอะไรบ้าง สิ่งที่เราต้องบอกนั้นเพียงพอในการแก้ปัญหาหรือไม่ อาจสร้างภาพประกอบความเข้าใจ แยกแยะส่วนต่าง ๆ ของสิ่งที่เราต้องบอกแล้วเขียนลงไปว่ามีอะไรบ้าง

2. วางแผนในการแก้ปัญหา จะต้องหาความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่เรารู้กับตัวที่ไม่ทราบค่า พิจารณาปัญหาย่อยทั้งหลาย เทียบเคียงโจทย์ปัญหาใหม่กับโจทย์ปัญหาเก่าที่คล้ายคลึงกัน ค้นหาคำหลัก กฎ สูตร นิยามที่จะนำมาใช้แล้วลงมือวางแผนในการแก้ปัญหา

3. ดำเนินการตามแผน เมื่อวางแผนแล้วก็ดำเนินการตามแผนที่วางไว้ ควรจะได้ตรวจสอบที่ละขั้นตอน ถูกต้องหรือไม่ อย่าทำข้ามขั้น

4. ตรวจสอบย้อน เมื่อทำเสร็จแล้วจะต้องตรวจสอบดูอีกครั้งหนึ่งว่าจะใช้ข้อมูลหมดหรือยัง และได้ผลตามที่ต้องการครบหรือไม่

Polya (1957) เสนอกระบวนการแก้ปัญหา ซึ่งมี 4 ขั้นตอนดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา (understands the question)
2. ศึกษาข้อมูลและใช้ยุทธศาสตร์ในการแก้ปัญหา (learned facts and strategies)
3. ประยุกต์ใช้ยุทธศาสตร์อย่างหลากหลาย (various strategies)
4. ย้อนตรวจสอบคำตอบ (checks the solution)

Gonzales (1994) ได้เสนอรูปแบบของแผนการสอน (The Lesson Plan Format) สำหรับฝึกแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยการเพิ่มทักษะการสร้างปัญหาให้สอดคล้องกับสถานการณ์ (Posing a related problem) หรือเรียกอีกอย่างว่าการเสนอปัญหาด้วยตนเองต่อจากขั้นตอนการแก้ปัญหาของ Polya

กิตติพงษ์ ตะไกรแก้ว (2538) เสนอขั้นตอนการแก้ปัญหารูปแบบการสอนแก้โจทย์ปัญหาเชิงสร้างสรรค์ CMVPS (Creative Mathematics Verbal Problem Solving) ประกอบด้วย 5 ขั้นตอนคือ

1. การนิยามปัญหา (Define Problem)
2. การคิดหาแนวทางแก้ปัญหาแบบอเนกนัย (Ideation)
3. การประเมินวิธีการและคำตอบที่เหมาะสมที่สุด (Idea Screening)
4. การลงมือปฏิบัติ (Act)
5. การเสนอปัญหาด้วยตนเอง (Posing Related Problems)

สุนีย์ เหมะประสิทธิ์ (2534) เสนอลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาดังนี้

1. ขั้นวิเคราะห์โจทย์ปัญหา ฝึกนักเรียนรู้จักสังเกตและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการ ส่วนใดคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา ฝึกนักเรียนเชื่อมโยงว่าโจทย์ต้องการอะไรและสิ่งที่โจทย์ต้องการสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาหรือไม่

2. ขั้นหาวิธีแก้โจทย์ปัญหา ฝึกให้นักเรียนมีแนวคิดเกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ และหาร เชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลตีความ แปลงโจทย์เป็นรูปภาพประโยคสัญลักษณ์ ฝึกโดยอาศัยหลักเหตุผลและความจริงเป็นสำคัญ

3. ขั้นคำนวณ ฝึกให้นักเรียนมีทักษะในการคิดคำนวณ มีความแม่นยำและรอบคอบในการคิดคำนวณ

4. ขั้นกิจกรรมความเป็นไปได้ของคำตอบ สังเกตวิเคราะห์ความสมเหตุสมผลหรือไม่

5. ขั้นตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบ ทำได้ 3 วิธีคือ การประมาณคำตอบ (คิดในใจ) ใช้วิธีใหม่ และใช้วิธีเดิม

เซอร์รี่ อยู่ดี (2531) เสนอแนวคิดขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มี 4 ขั้นตอนได้แก่

1. ทำความเข้าใจ โจทย์ปัญหา
 - โจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง
 - โจทย์ต้องการให้หาอะไร
2. หาแนวทางแก้โจทย์ปัญหา
 - เขียนภาพประกอบ
 - แปลงโจทย์ปัญหาเป็นประโยคสัญลักษณ์
3. แก้ปัญหา หาคำตอบ
 - คิดคำนวณหาคำตอบ
4. ตรวจสอบคำตอบ

หน่วยศึกษานิเทศก์ กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ (2534) ได้ศึกษากระบวนการการแก้ปัญหามาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์ มีขั้นตอนการสอน 4 ขั้นตอน คือ

- ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา
- ขั้นที่ 2 วางแผนแก้ปัญหา
- ขั้นที่ 3 ดำเนินตามแผน
- ขั้นที่ 4 ตรวจสอบกระบวนการและคำตอบ

สรุปกระบวนการของการแก้ปัญหา เป็นกระบวนการที่จะต้องนำความรู้เดิม เช่น ความรู้ในความคิดรวบยอด หรือหลักการไปใช้และต้องมีทักษะพื้นฐานที่จำเป็นหลายประการ และจากการศึกษาข้อมูลสามารถสรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็น 4 ขั้นตอนคือ

- 1) ขั้นการแปลสถานการณ์ปัญหา วิเคราะห์และทำความเข้าใจปัญหา
- 2) ขั้นหาแนวทางแก้ปัญหา เช่น การปฏิบัติจริง การวาดภาพประกอบ
- 3) ขั้นลงมือกระทำตามแผน
- 4) ขั้นการตรวจคำตอบ

2.4 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

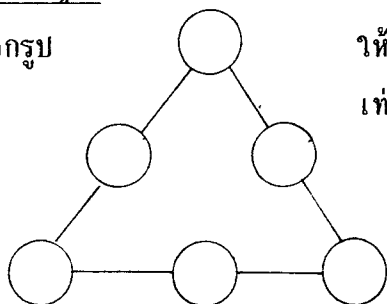
Kennedy (1984) Rey (1984) Musser (1988) และ Sovchik (1989) (อ้างถึงใน กิตติพงษ์ ตะไกรแก้ว, 2538) ได้เสนอยุทธวิธีที่ใช้เป็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ประเภทต่างๆ เพราะเราเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหา จะต้องมีการพิจารณาสำรวจ

ข้อมูลที่กำหนดให้ วิเคราะห์ปัญหาและต้องมีการเลือกแนวทางหรือยุทธวิธีแก้ปัญหา 1 วิธีหรือมากกว่า ที่จะสามารถช่วยแก้ปัญหาดังกล่าวได้ซึ่งวิธีการแต่ละอย่างที่จะกล่าวต่อไปนี้ เราสามารถประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ปัญหาแต่ละประเภทได้ไม่เหมือนกัน ดังรายละเอียดพอสรุปได้ดังนี้

1. การเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) เป็นการคาดคะเนหรือเดาคำตอบของปัญหานั้นๆ และจะต้องมีการตรวจสอบว่าการเดาแต่ละครั้งนั้นถูกต้องมากน้อยเพียงใด ซึ่งวิธีการคล้ายๆ กับการหาคำตอบแบบลองผิดลองถูก (Trial and Error) นั่นเอง

ตัวอย่างปัญหา

- จากรูป

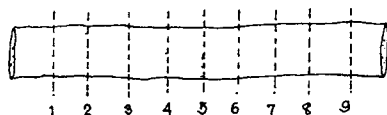


ให้หน้าเลข 3 ตัว ตั้งแต่ 1-6 ที่ผลรวมแต่ละด้านได้เท่ากับ 9

2. การวาดภาพ (Draw a diagram or picture) โจทย์ปัญหาส่วนใหญ่มักเป็นสถานการณ์ทางกายภาพ (Physical situations) การวาดภาพช่วยสามารถทำให้นักเรียนมองเห็นภาพพจน์และเข้าใจโจทย์มากยิ่งขึ้น และเรายังถือเป็นการวางแผนของการแก้โจทย์ปัญหาอย่างหนึ่งด้วย

ตัวอย่างปัญหา

- ถ้าเราจะตัดไม้ออกเป็นชิ้นๆ จะใช้เวลา 1 ครั้งต่อ 1 นาที อยากทราบว่า จะใช้เวลานานเท่าไร ในการตัดไม้ขนาด 10 ฟุต ออกเป็น 10 ชิ้นเท่าๆ กัน ?



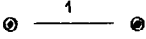
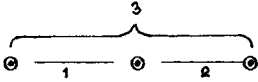
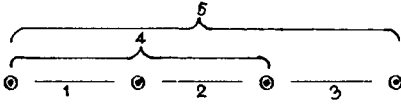
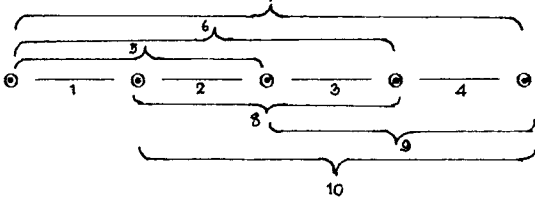
(ส่วนใหญ่จะตอบทันทีว่า 10 นาที ถ้าเราใช้การวาดรูปดู จะพบว่า ต้องตัดแค่ 9 ครั้ง ดังนั้น จึงใช้เวลาแค่ 9 นาที)

3. การทำปัญหาย่อยขึ้น (Work a Simpler Problem) บางครั้งปัญหาที่ยากนั้น เราสามารถทำให้เป็นอย่างง่ายได้ โดยการแยกแยะปัญหาออกเป็นส่วนๆ ก่อน หรือแยกเป็นกรณีย่อยๆ จากนั้น จึงอาจใช้วิธีการสร้างรูปแบบ (วิธีที่ 5) เพื่อที่จะช่วยสรุปหาคำตอบของปัญหารวม ซึ่งเริ่มจากกรณีย่อยๆ ก่อนนั่นเอง ช่วยให้เราเข้าใจโจทย์เดิมมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่างปัญหา

- ในงานสังสรรค์แห่งหนึ่ง มีอยู่ 10 คน ถ้าให้แต่ละคนจับมือกันกับคนอื่นๆ จะมีการจับมือกันทั้งหมดกี่ครั้ง ?

จากปัญหา ถ้าคิดพร้อมกันทั้ง 10 คน โดยการวาดรูปหรือทดลองปฏิบัติจริง อาจทำให้เสียเวลา ยุ่งยาก สับสน เราสามารถแก้ปัญหาได้โดยการเริ่มจากการพิจารณาข้อมูลย่อยๆ ก่อนกล่าวคือ เริ่มจากตัวเลขจำนวนน้อยและมากขึ้นตามลำดับ หรืออาจวาดรูปประกอบความเข้าใจได้ดังนี้

1. 2 คน จับมือกันได้ 1 ครั้ง 
2. 3 คน " 3 ครั้ง 
3. 4 คน " 6 ครั้ง 
4. 5 คน " 10 ครั้ง 
- ...
- ...
- ...

เพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล อาจเขียนให้อยู่ในรูปตารางดังนี้

จำนวนคน	จำนวนครั้ง	ผลต่างการเพิ่ม
2	1	
3	3	
4	6	
5	10	
6	15	
...	...	...
10	*45	

เมื่อพิจารณาผลต่างของจำนวนครั้ง พบว่า จำนวนครั้งจะเพิ่มขึ้นทีละ 2, 3, 4, 5,

4. การสร้างตารางหรือกราฟ (Make a Table or Graph) วิธีการสร้างตารางช่วยให้การแก้ปัญหาเป็นระบบ เข้าใจง่ายขึ้น ทำให้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล หรือรูปแบบที่ชัดเจนเหมาะสมสำหรับแยกข้อมูลที่มีจำนวนมากๆ ส่วนกราฟนั้นมักใช้แทนข้อมูลทางสถิติ

ตัวอย่างปัญหา

- ช่างไม้คนหนึ่ง ทำม้านั่ง 3 ขา และโต๊ะ 4 ขา วันนี้เขาใช้ขาสำหรับม้านั่งและโต๊ะทั้งหมด 31 ขา อยากทราบว่า เขาทำม้านั่งและโต๊ะได้กี่ตัว ?

โต๊ะ	ม้านั่ง	ขาไม้ที่ใช้
4(1)	27(9)	31
16(4)	15(5)	31
28(7)	3(1)	31

หมายเหตุ () จำนวนโต๊ะและม้านั่งที่ช่างไม้ทำในวันนี้

5. การค้นหารูปแบบ (Look for a Pattern) การค้นหารูปแบบนี้ เป็นเทคนิคการคิดพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ช่วยให้ทราบแนวโน้มของสถานการณ์ของข้อมูลเช่นเดียวกันกับการใช้ตาราง

ตัวอย่างปัญหา

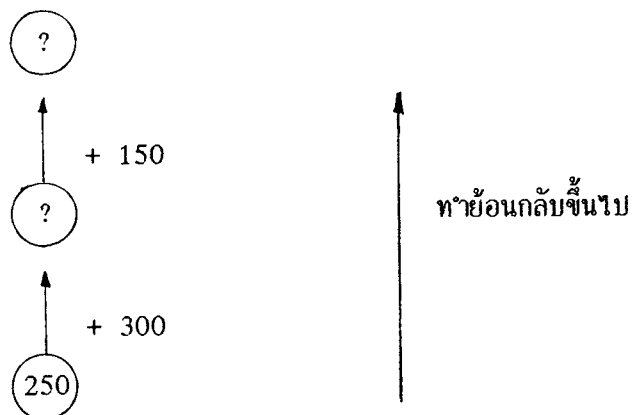
- จงเติมตัวเลขในช่องว่าง 2, 5, 11, 23, 47, ... ?
- เลข 1 - 50 มีเลขที่อยู่ทั้งหมดกี่ตัว อะไรบ้าง ?

6. การทำย้อนกลับ (Working Backwards) เป็นการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์วิธีหนึ่ง โดยการเริ่มจากข้อมูลที่ได้จากขั้นสุดท้ายของปัญหาก่อน จึงคำนวณย้อนกลับขึ้นไปเรื่อยๆ

ตัวอย่างปัญหา

- น้อยได้รับเงินเดือนจำนวนหนึ่ง จึงได้ซื้อกางเกง 150 บาท และพัคลม 300 บาท ปรากฏเหลือเงินอยู่ 250 บาท อยากทราบว่า น้อยได้รับเงินเดือนเท่าไร ?

ปัญหาดังกล่าวนี สามารถแก้ปัญห โดยการทำย้อนกลับได้ เริ่มจากจำนวนเงินในขั้นสุดท้าย 250 บาท คำนวณย้อนกลับขึ้นไปเรื่อยๆ ก็จะได้จำนวนเงินเริ่มต้นได้



7. การแจงให้เห็นรายละเอียด (Make a List) เป็นวิธีการที่มักใช้รวมกันกับการค้นหา รูปแบบว่า คำตอบที่ควรจะเป็นของปัญหานั้นคืออะไร โดยการแจงรายละเอียดต่างๆ ที่เป็นไปได้ ทั้งหมด (Account for all possibilities)

ตัวอย่างปัญหา

- มีเลขี่อะไรบ้าง จำนวน 8 ตัว เมื่อรวมกันจะได้เท่ากับ 20 ?

8. การเขียนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ (Write a Mathematical Sentence)

นักเรียนไม่ว่าจะอยู่ชั้นใดก็ตาม จะต้องได้รับการสอนให้เขียนประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยการแปลความหมายจากสถานการณ์ปัญหา มีจุดมุ่งหมาย 2 ประการคือ

8.1 เป็นเครื่องชี้ให้เห็นว่า นักเรียนเข้าใจในปัญหานั้นหรือไม่

8.2 ทำให้ทราบว่า การแก้โจทย์ปัญหานั้นต้องใช้วิธีใดในการหาคำตอบ

9. การทดลองปฏิบัติจริง (Act it Out) การทดลองโดยการปฏิบัติจริงนี้จะแตกต่างกันกับการแสดงละคร ซึ่งการแสดงละครนั้นเป็นการแสดงตามบทบาทที่เขียนไว้ไม่มีการแก้ปัญหาแต่อย่างใด แต่การให้นักเรียนได้ลงมือกระทำจริงด้วยตนเอง จะทำให้ได้รับประสบการณ์ตรงในการหาคำตอบของปัญหานั้น

ตัวอย่างปัญหา

- แม่ค้าคนหนึ่งซื้อหมวกใบหนึ่งมาราคา 60 บาท ขายไป 70 บาท แต่ก็ซื้อกลับมาอีกในราคา 80 บาท และก็ขายไปอีกทีในราคา 90 บาท อยากทราบว่าแม่ค้าคนนี้ได้กำไรหรือขาดทุน ?

10. การพิจารณาว่าโจทย์ต้องการอะไร ให้อะไรมาบ้าง (Determine Wanted and Given Information) ถือเป็นวิธีการที่จำเป็นต่อการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งต้องพิจารณาและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ อะไรคือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา เพื่อทำความเข้าใจและเป็นแนวทางในการเลือกกระบวนการหาคำตอบว่าจะใช้วิธีคิดแบบใด

ตัวอย่างปัญหา

- ในการลงคะแนนเสียงเลือกประธานนักเรียน เด็กชายต้องได้รับคะแนนเสียง 123 คะแนน และเด็กชายประคัลได้ 89 คะแนน เด็กชายต้องได้รับคะแนนมากกว่าประคัลเท่าไร

(การหาคำตอบ จะต้องตั้งคำถามว่าคุณรู้อะไรบ้าง ? คุณต้องการรู้อะไร ? จะทำอย่างไรต่อการคิดคำนวณ)

11. การประมาณคำตอบ (Estimation) เป็นทักษะการคิดอย่างหนึ่งที่ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา ต้องใช้การคาดว่าคำตอบที่สมเหตุสมผลน่าจะเป็นอย่างไร โดยไม่ต้องการคำนวณเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องแต่อย่างใด

ตัวอย่างปัญหา

- ร้านขายนาฬิกาแห่งหนึ่ง ขายนาฬิกาเรือนแรกไป 984.50 บาท เรือนที่สองขายไป 692.25 บาท และเรือนสุดท้าย 487.75 บาท อยากทราบว่า ร้านขายนาฬิกา ได้เงินทั้งหมดเท่าไร

(ก. 2164.50 บาท ข. 220.25 บาท ค. 1500.75 บาท)

จากปัญหา เราแก้ปัญหาโดยการนำเลขทั้งสามมาบวกกัน ก็จะได้คำตอบที่ถูกต้อง แต่ในกรณีที่มียุทธศาสตร์และกำหนดตัวเลือกให้ ถ้าใช้กรณีแรกปัญหาอาจเสียเวลามากเกินไป เราสามารถใช้การประมาณค่าคำตอบได้ ด้วยการประมาณจำนวนในปัญหาก่อนแล้วจึงคำนวณอย่างคร่าวๆ ได้แก่

$$\left. \begin{array}{rcl} 984.50 & \text{ประมาณ} & 1,000 \\ 962.25 & " & 700+ \\ 487.75 & " & 500+ \end{array} \right\} 2,200$$

ดังนั้นคำตอบที่ได้จะประมาณ 2,200 บาท (ก.)

12. การเปลี่ยนทัศนคติของตนเอง (Change Your point of View) บ่อยครั้งที่วิธีการนี้ มักจะใช้หลังจากที่วิธีอื่น ที่กล่าวมาทั้งหมดแล้วไม่ประสบผลสำเร็จ เพราะการแก้ปัญหาล้วนใหญ่ ต้องใช้แนวคิดหรือสร้างข้อสันนิษฐานที่แน่นอน มีกฎเกณฑ์ตายตัว ซึ่งบางครั้งอาจไม่เป็นผลสำเร็จ ถ้าลองเปลี่ยนแนวความคิดที่ไม่ยึดติดกับนิยาม กฎเกณฑ์บ้างแล้ว จะทำให้เราสามารถแก้ปัญหาลงตัวอย่างสำเร็จก็ได้

ตัวอย่างปัญหา

- ลากเส้นตรง 4 เส้น ผ่านทั้ง 9 จุดนี้ โดยห้ามไม่ให้ยกดินสอจากกระดาษ

* * *

* * *

* * *

จากที่กล่าวมาข้างต้น สุลัดดา ลอยฟ้า และคณะ (2530) ยังได้เพิ่มทักษะที่จำเป็นในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้คือ

1. ทักษะการเขียนประโยคสัญลักษณ์ ครูจะต้องให้นักเรียนสามารถเปลี่ยนข้อความที่เป็นคำพูดให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถือว่าเป็นทักษะที่สำคัญและจำเป็นสำหรับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา
2. ทักษะการคิดคำนวณ เป็นทักษะที่จำเป็นหลังจากเปลี่ยนโจทย์ปัญหาให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์
3. ทักษะการเขียนภาพ หรือวาดภาพแทนโจทย์ปัญหา ปัญหาหลายปัญหาจะชัดเจนและเข้าใจได้ง่ายขึ้น ถ้าวาดภาพหรือเขียนแผนภาพประกอบทักษะการเขียนภาพหรือวาดภาพแทนปัญหาถือว่าเป็นทักษะที่จำเป็นในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
4. ทักษะการใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์มาช่วยแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
5. ทักษะการพิจารณาข้อมูลหรือส่วนที่จำเป็นเพิ่มเติม ในการแก้ปัญหามีหลายกรณีที่เงื่อนไขหรือข้อมูลที่กำหนดให้ในสถานการณ์ของปัญหายังไม่เพียงพอที่จะหาคำตอบได้ นักเรียนควรมีประสบการณ์ในการพิจารณาข้อมูลหรือเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการหาคำตอบที่ขาดหายไป

6. ทักษะการพิจารณาตัดข้อมูลหรือส่วนที่ไม่เกี่ยวข้อง สำหรับการหาคำตอบในสถานการณ์ของปัญหาในชีวิตประจำวันส่วนมากที่นักเรียนประถมศึกษาจะต้องประสบ มักจะประกอบด้วยข้อมูลหรือเงื่อนไขทั้งที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้อง สำหรับการตอบปัญหานักเรียนควรจะได้ฝึกการพิจารณาข้อมูลหรือเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้องสำหรับการตอบปัญหา เพื่อที่จะได้ตัดส่วนดังกล่าวทิ้งไปให้เหลือเฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับปัญหาเท่านั้น ซึ่งจะทำให้ปัญหาง่ายแก่การแก้ปัญหายิ่งขึ้น

7. ทักษะการประมาณค่าผลลัพธ์หรือคำตอบ การประมาณค่าเป็นทักษะที่สำคัญมากที่ใช้ในชีวิตประจำวัน มีหลายสถานการณ์ที่จำเป็นต้องหาคำตอบอย่างคร่าวๆ และรวดเร็ว นอกจากนี้ถ้านักเรียนมีทักษะในการประมาณค่าจะช่วยนักเรียนพิจารณาคำตอบหรือผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหาว่าเป็นคำตอบที่เป็นไปได้และสมเหตุสมผล

8. ทักษะการสร้างปัญหา นักคณิตศาสตร์หลายท่านเชื่อว่า ถ้านักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนได้ดีขึ้น เพราะนักเรียนจะเข้าใจปัญหาและโครงสร้างปัญหาได้ดีกว่า

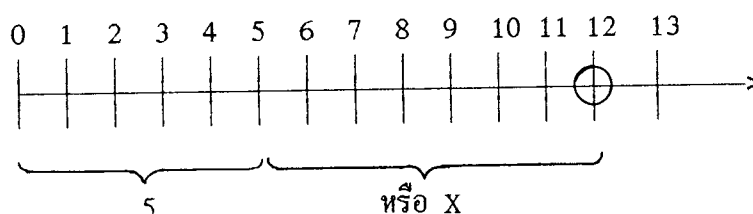
9. ทักษะการอ่านแผนภูมิ การเสนอข่าวสารข้อมูลที่เป็นในชีวิตประจำวันทุกวันนี้ ส่วนมากมักจะพบเสนอในแผนภูมิหรือแผนภาพต่างๆ จำเป็นที่นักเรียนจะต้องมีทักษะในการอ่าน เพื่อจะเก็บข้อมูลที่จำเป็นสำหรับการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง

10. ทักษะการเขียนแผนภูมิต่อเนื่อง (flow charts) เป็นทักษะที่ถือว่าสำคัญสำหรับสังคมปัจจุบัน โดยเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ประยูร อาษานาม (2528) ได้เสนอเทคนิคการปรับปรุงการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ ได้แก่

1. การใช้การวิเคราะห์โจทย์ปัญหา
2. การใช้การอุปมาอุปไมย ได้แก่ การนำวิธีการที่เคยใช้ในการแก้โจทย์ปัญหามาแก้โจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกัน
3. การเขียนรูปประกอบ การแปลความโจทย์ปัญหา
4. การใช้วัสดุจริง รูปภาพประกอบการแก้โจทย์ปัญหา เช่น

$$12 = 5 + \square \quad \text{หรือ} \quad 12 = 5 + X \quad \text{อาจแสดงโดยใช้เส้นจำนวน}$$





5. การฝึกฝนการคิดเลขในใจ ครูควรฝึกฝนให้เด็กได้แก้โจทย์ปัญหา โดยไม่ต้องใช้กระดาษและดินสอหรือเครื่องคิดเลข โจทย์ปัญหาควรเริ่มจากปัญหาง่ายๆ และยากขึ้นเรื่อยๆ ควรให้เด็กได้ฝึกฝนการนำคุณสมบัติของระบบจำนวนต่างๆ มาใช้ในการคิดคำนวณ การกระจายจำนวนและการจัดเทอมใหม่ ตัวอย่างเช่น

โจทย์ สมศักดิ์มีลูกแก้ว 29 ลูก ได้มาอีก 14 ลูก เขามีลูกแก้วทั้งหมดเท่าไร

ประโยคสัญลักษณ์ $29 + 14 = \square$

วิธีทำ $29 + 14 = 29 + (10 + 4) \dots$ การกระจายจำนวน
 $= (29 + 10) + 4 \dots$ การเปลี่ยนกลุ่มได้
 $= 39 + 4 \dots$ การบวก
 $= 43 \dots$ การบวก

6. การคาดคะเน หรือประมาณค่าคำตอบ

7. การตั้งโจทย์ปัญหาที่ไม่สมบูรณ์ให้เด็กวิเคราะห์ความถูกต้อง หาส่วนที่ขาดหายไป และควรจะเพิ่มเติมอะไร การกระทำเช่นนี้จะฝึกให้เด็กรู้จักอ่านอย่างละเอียดถี่ถ้วนและรู้จักวิเคราะห์ปัญหา

8. การตั้งโจทย์ที่มีสิ่งกำหนดให้ที่เกินความต้องการ แล้วให้เด็กฝึกวิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหา เมื่อทราบว่าสิ่งที่กำหนดให้บางอย่างไม่มีความจำเป็นก็ต้องตัดทิ้งไปได้ ซึ่งวิธีนี้จะช่วยปรับปรุงความคิดเชิงวิเคราะห์ของเด็กได้

9. การแปลความของโจทย์ปัญหาให้เป็นประโยควิทยาศาสตร์

10. โจทย์ปัญหาควรเป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันและที่เด็กสนใจ

11. การสอนทักษะในการอ่านโจทย์ปัญหา

12. การตั้งโจทย์ปัญหาที่มีสถานการณ์เดียวแต่หลายคำถาม

13. การเล่นเกมและกิจกรรมพิเศษที่เกี่ยวกับโจทย์ปัญหา

Heddens (1992) ยังได้เพิ่มเติมการสอนเพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา ซึ่งต้องเริ่มกันที่นักเรียนในระดับชั้นเรียนต้นๆ ควรเริ่มต้นให้นักเรียนรู้จักการแก้ปัญหาโดยการร่วมกันสนทนา สถานการณ์หรือเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน เพื่อให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวันดังกล่าว และสามารถใช้ปริศนาคำทายโดยใช้ภาพ (Rebus) ช่วยให้นักเรียนฝึกแก้ปัญหาได้ เช่น

แดงมี  2

จันมี  1

อยากทราบว่า  ทั้งหมดเท่าไร ?

นอกจากนี้ ควรฝึกให้เด็กรู้จักการเขียนประโยคสัญลักษณ์ เพื่อสื่อความหมายแสดงแนวทางการหาคำตอบให้ได้หลายๆ แบบ ตัวอย่างเช่น

- นักเรียนชั้น ป.2 ห้องหนึ่งมี 32 คน จัดให้นั่งโต๊ะแถวละ 8 ตัว จะต้องจัดโต๊ะทั้งหมดได้กี่แถว ?

$$\text{แนวการหาคำตอบ} \quad 32 - 8 = \square$$

$$32 - \square = 8$$

$$8 \times \square = 32$$

$$\square \times 8 = 32$$

กล่าวโดยสรุปแล้ว กลยุทธ์ทางการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น มีหลากหลายวิธี ต้องฝึกให้ผู้เรียนรู้จักขั้นตอนการแก้ปัญหามีระบบ กฎเกณฑ์ มีเป้าหมายที่แน่นอน เริ่มจากการทำความเข้าใจกับปัญหาวางแผนหาแนวทางแก้ปัญห แล้วจึงลงมือปฏิบัติตามแผนและมีการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบ นอกจากนี้ยังจำเป็นต้องอาศัยยุทธวิธีต่างๆ ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นเข้ามาช่วยแก้ปัญหานั้นด้วยทำให้เด็กนักเรียนสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

2.5 แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องงานในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์

2.5.1 ทฤษฎีการเรียนรู้ที่นำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

(Theories of Learning Applied to Mathematics)

ผู้สอนมีบทบาทสำคัญในการที่จะจัดประสบการณ์ให้เหมาะสมกับผู้เรียน จึงต้องศึกษาพัฒนาการทุกด้านของผู้เรียน โดยเฉพาะอย่างยิ่งพัฒนาการทางสติปัญญา เพื่อเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมและประสบการณ์ให้เหมาะสมกับผู้เรียนให้ผู้เรียนเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ

ความเคลื่อนไหวทางการศึกษาได้แสดงให้เห็นถึงความต้องการถึงการนวัตกรรมทางยุทธศาสตร์การแก้ปัญหา (problem-solving strategies) ของนักเรียน ต่ำราเรียนในระดับประถมศึกษา เน้นการเน้นทักษะการคิด (thinking skills) เพื่อแก้ปัญหา

Hatfield, Edwards, Bitts (1993) กล่าวถึง ทฤษฎีการเรียนรู้หลายๆ ทฤษฎีนำมาใช้ในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 แนวคิด ได้แก่ แนวทฤษฎีการเรียนรู้ปัญญานิยม (Cognitive theories), แนวทฤษฎีการเรียนรู้ พฤติกรรมนิยม (Behavior theories), นักจิตวิทยาจากทั้ง 2 แนวคิด ได้แก่ Piaget, Bruner, Bundura, Skinner

2.5.1.1 ทฤษฎีการเรียนรู้ปัญญานิยม (Cognitive theories)

ทฤษฎีสำคัญที่มีส่วนช่วยในการกำหนดแนวทางจัดประสบการณ์การเรียนการสอนที่เหมาะสมกับผู้เรียนคือ ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของนักจิตวิทยาชาวสวิส ชื่อ Jean Piaget

Piaget (อ้างถึงในกิ่งฟ้า สันธูรณ์, 2537) ได้สรุปไว้ว่า การเรียนรู้เป็นผลผลิตของพัฒนาการ การเรียนรู้และพัฒนาการเกี่ยวข้องกันแต่แตกต่างกัน ซึ่งอธิบายเพิ่มเติมได้ดังนี้

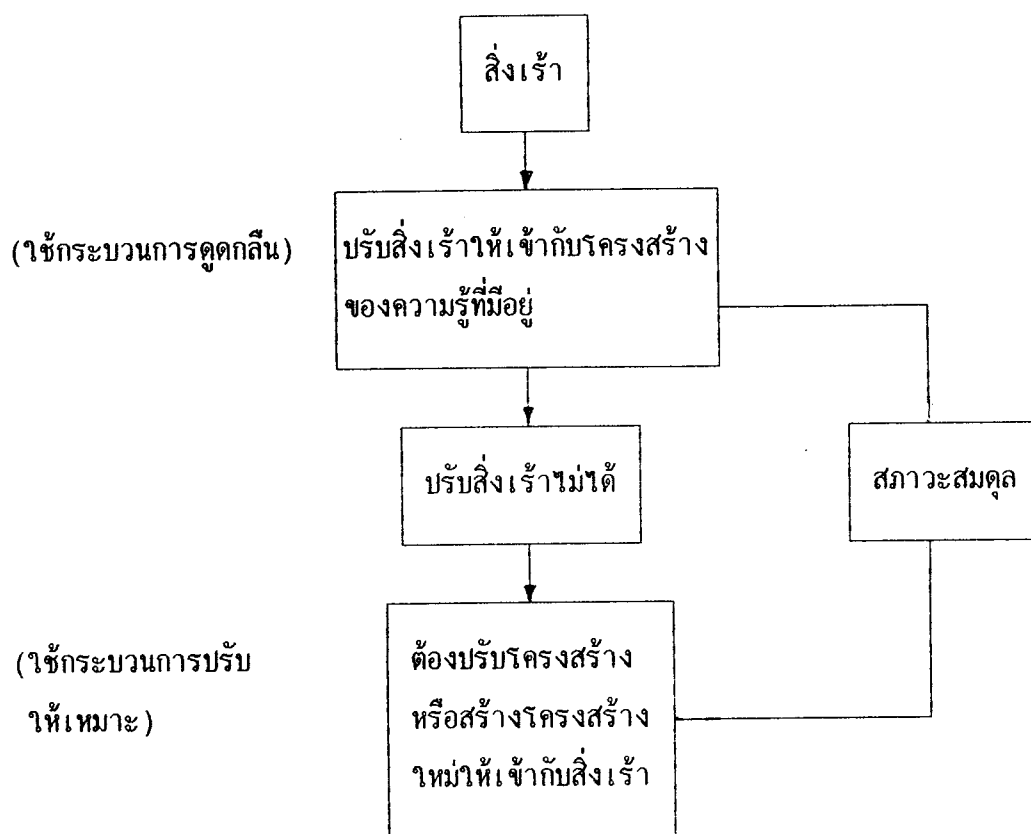
การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นเฉพาะของแต่ละบุคคล และเฉพาะเรื่อง โดยที่ผู้เรียน ต้องกระทำต่อวัตถุและปรากฏการณ์ในสิ่งแวดล้อม เนื่องจากมีสิ่งเร้าชักจูงใจให้เกิดการกระทำ

Piaget เสนอข้อคิดว่า สิ่งมีชีวิตหน่วยหนึ่ง ๆ มีกลไกอัตโนมัติภายในที่สามารถปรับตัวให้เหมาะสมกับสิ่งแวดล้อม เพื่อให้เกิดสภาวะสมดุลได้ สภาวะนี้เป็นสภาพของกิจกรรมทางสมองซึ่งประกอบด้วยกระบวนการย่อย ๆ 2 กระบวนการคือ กระบวนการดูดกลืน (assimilation) และกระบวนการปรับให้เหมาะสม (accommodation)

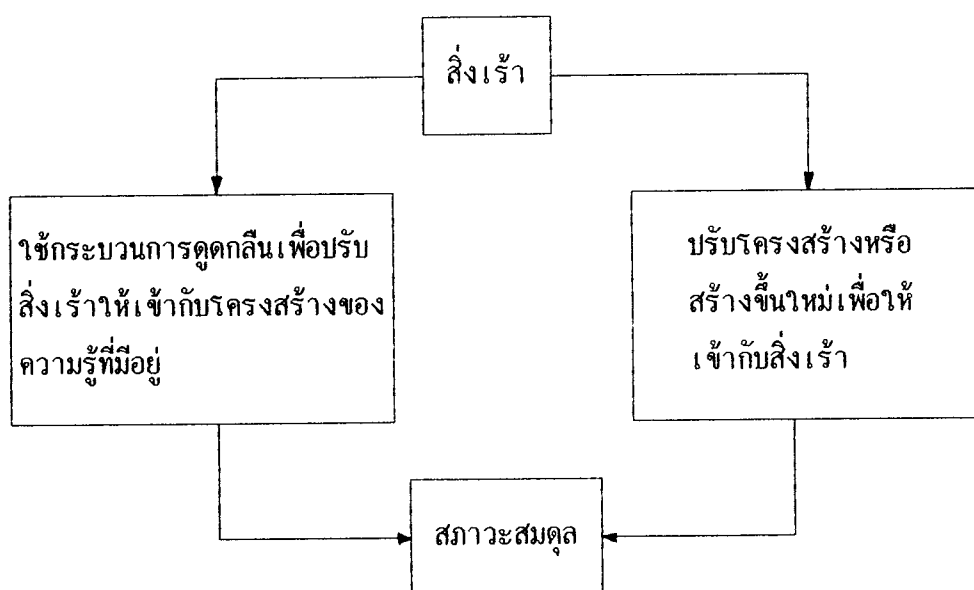
สภาวะสมดุล (Equilibrium หรือ Equilibration) เป็นกระบวนการปรับตัวโดยใช้กระบวนการย่อย 2 กระบวนการคือ กระบวนการดูดกลืน และกระบวนการปรับให้เหมาะสมโดยการเปลี่ยนแปลงและพัฒนาแบบอัตโนมัติ

1) กระบวนการดูดกลืน (Assimilation) เป็นกระบวนการรับสิ่งเร้าจากสิ่งแวดล้อมให้เข้าไปอยู่ในโครงสร้างของความรู้ที่มีอยู่ นั่นคือเป็นกระบวนการที่อินทรีย์ผสมกลมกลืนสิ่งใหม่ ๆ ที่ได้จากโลกภายนอกให้เข้ากับความคิดหรือโครงสร้างเดิมที่มีอยู่ เช่น นักเรียนจะสามารถเข้าใจความคิดรวบยอดของคุณได้ก็ต่อเมื่อนักเรียนต้องมีพื้นฐานความเข้าใจเรื่องการนับเพิ่มเป็นกลุ่มละเท่า ๆ กันหรือกองละเท่า ๆ กัน

2) กระบวนการปรับให้เหมาะสม (Accommodation) เป็นกระบวนการปรับโครงสร้างของความรู้ความเข้าใจที่มีอยู่ หรือสร้างโครงสร้างของความรู้ขึ้นใหม่เพื่อให้เข้ากับสิ่งเร้า นั่นคือเป็นกระบวนการที่อินทรีย์ไม่อาจผสมกลมกลืนสิ่งใหม่ที่ได้จากโลกภายนอกให้เข้ากับความคิดหรือโครงสร้างเดิมที่มีอยู่ได้ จำเป็นจะต้องปรับแต่งขยายโครงสร้างของประสบการณ์หรือความรู้เดิมเพื่อจะรับความรู้ใหม่ ๆ กระบวนการนี้จะเกิดขึ้นหลังจากใช้กระบวนการปรับเข้าโครงสร้างแล้วไม่ประสบผลสำเร็จ เช่น หลังจากทีนักเรียนเข้าใจเรื่องคุณสมบัติการแจกแจงในการคูณ $5 \times (10+2) = \square (5 \times 10) + (5 \times 2)$ แล้ว เมื่อนักเรียนจะหาคำตอบ $5(2+1/2) = \square$ คุณสมบัติการแจกแจงในการหาผลลัพธ์ นักเรียนจะเข้าใจว่า $5 \times (2+1/2) = \square (5 \times 2) + (5 \times 1/2)$ เป็นต้น



ภาพที่ 1 แสดงการใช้กระบวนการดัดกลืนและกระบวนการปรับให้เหมาะสมเพื่อให้เกิดภาวะสมดุล โดยการเริ่มจากการใช้กระบวนการดัดกลืนก่อน ถ้าใช้ไม่ได้จึงเปลี่ยนไปใช้กระบวนการปรับให้เหมาะสม



ภาพที่ 2 แสดงการใช้ทั้งสองกระบวนการย่อย คือ การดัดกลืน และการปรับให้เหมาะสมพร้อมๆ กัน เพื่อให้เกิดภาวะสมดุล หรืออาจจะใช้เฉพาะแต่ละกระบวนการ แล้วแต่ความสามารถในการรับรู้เข้าใจ และโครงสร้างความรู้ของผู้เรียน

พัฒนาการทางสติปัญญาจะเกิดขึ้นเมื่อบุคคลมีกิจกรรมทางสมองขณะที่มีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อม และพยายามปรับตัวเพื่อให้เกิดภาวะสมดุลโดยมีกระบวนการดูกลืนและกระบวนการปรับให้เหมาะสม เกิดขึ้นพร้อมกันหรือสลับกันไป

พัฒนาการนั้นเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นบนรากฐานของพัฒนาการทางด้านกายภาพและชีวภาพ คนเราเติบโตมาจากในครรภ์ของมารดาเป็นเด็กแรกเกิด เด็กทารก เด็กเล็กๆ เข้าสู่วัยรุ่น และวัยผู้ใหญ่ ซึ่งเป็นพัฒนาการทางด้านกายภาพและมีพัฒนาการทางด้านชีววิทยาของสมอง คือรู้จักคิด มีวุฒิภาวะที่เหมาะสมกับวัย มีความพร้อมและความสามารถที่จะรับรู้เข้าใจหรือเรียนรู้สิ่งต่างๆ ได้

การเรียนรู้ของเด็กต่างวัยกันหรือแม้แต่วัยใกล้เคียงกันก็อาจแตกต่างกัน เนื่องจากพัฒนาการทางสติปัญญาและอิทธิพลของสิ่งแวดล้อมต่างกัน Piaget เชื่อว่าการเรียนรู้เป็นส่วนหนึ่งของพัฒนาการและพัฒนาการเป็นกระบวนการที่นำไปอธิบายการเรียนรู้ได้ พัฒนาการดังกล่าวคือพัฒนาการทางสติปัญญาที่เกิดขึ้นกับมนุษย์ทุกคน ทุกชาติ ทุกภาษา ในลักษณะเดียวกัน แต่แตกต่างกันตามวัยที่วัดไว้เป็นช่วงของพัฒนาการแต่ละขั้นตอน สิ่งที่เกิดขึ้นควบคู่กับพัฒนาการคือการรับรู้เข้าใจหรือความสามารถในการเรียนรู้ที่ทำให้มนุษย์มีสติปัญญาเพิ่มพูนขึ้น

พัฒนาการทางสติปัญญาทั้ง 4 ขั้นของ Piaget

การเรียนรู้เข้าใจแตกต่างกันตามขั้นพัฒนาการทางสติปัญญาซึ่ง Piaget ได้ศึกษาค้นคว้าและรวบรวมข้อมูลไว้นามาสรุปรุได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นประสาทสัมผัสและการเคลื่อนไหว (Sensori-motor stage) (แรกเกิด-2 ปี)

ขั้นที่ 2 ขั้นก่อนปฏิบัติการ (Preoperational stage) (2 ปี-7 ปี)

ขั้นที่ 3 ขั้นปฏิบัติการรูปธรรม (Concrete operational stage) (7-11 หรือ 12 ปี)

ขั้นที่ 4 ขั้นปฏิบัติการนามธรรม (Formal operational stage) (11 หรือ 12 ปีขึ้นไป)

Piaget ยังได้ให้แนวความคิดเกี่ยวกับความสำคัญของผู้เรียน ทำให้ทราบว่า ผู้เรียนมีพัฒนาการทางสติปัญญาแตกต่างกันตามช่วงอายุ ซึ่งก่อให้เกิดการเรียนรู้ได้ในลักษณะที่ต่างกัน

ก. เมื่ออายุในช่วงอายุแรกเกิดถึงอายุ 2 ขวบ ซึ่งเรียกว่า "ขั้นประสาทสัมผัสและการเคลื่อนไหว" ผู้เรียนจะเรียนรู้เกี่ยวกับสิ่งของและประสบการณ์ในสิ่งแวดล้อมโดยใช้ประสาทสัมผัสและการเคลื่อนไหวประกอบกัน และเมื่อผู้เรียนเริ่มมีอายุตั้งแต่ 10 เดือนหรือ 1 ขวบ การคงอยู่ของวัตถุหมายถึงวัตถุจะไม่หายไปไหนแม้จะไม่อยู่ในสายตา เรื่องเกี่ยวกับมิติและพื้นที่ เรื่องเวลาซึ่งเข้าใจเฉพาะปัจจุบันก็เริ่มเข้าใจเรื่องอดีต แต่ยังไม่เข้าใจต่อเนื่องกันได้น้อยมาก ขั้นนี้เป็นขั้นเริ่มต้นที่จำเป็นต่อการพัฒนาทางสติปัญญาในขั้นถัดไปมาก

ข. เมื่ออยู่ในช่วงอายุระหว่าง 2 ปี 7 ปี ที่เรียกว่า "ขั้นก่อนปฏิบัติการ" การเรียนรู้ของผู้เรียนในวัยนี้ใช้ภาษาและจินตนาการเป็นเครื่องมือสื่อสารและการแสดงออกของความรู้สึกนึกคิด แต่ความคิดเป็นทางเดียวแปรกลับไปมาไม่ได้ มีเหตุผลที่ขึ้นอยู่กับความพอใจของตนเองไม่ใช่เหตุผลแบบอุปมานและแบบอนุมาน ซึ่งเป็นการทำให้เหตุผลแบบผู้ใหญ่ แต่เป็นชนิดที่คำนึงถึงเฉพาะการณและเฉพาะหน้าเท่านั้น จากสิ่งหนึ่งไปยังอีกสิ่งหนึ่งที่ไม่จำเป็นต้องเป็นเหตุผลซึ่งกันและกัน ผู้เรียนยึดตนเองเป็นศูนย์กลางของความคิดและการใช้เหตุผล คำนึงถึงเหตุการณ์เฉพาะหน้าที่มีระยะสั้นๆ ความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องเวลามีแต่ปัจจุบันกาล ต่อเนื่องจากอดีตกาลได้ แต่ยังไม่เข้าใจอนาคตกาล มีจินตนาการมาก ชอบเลียนแบบและเล่นเกมสมมติ

ค. เมื่อผู้เรียนมีอายุระหว่าง 7 ถึง 11 หรือ 12 ปีอยู่ในขั้นที่เรียกว่า "ขั้นปฏิบัติการรูปธรรม" ผู้เรียนจะเรียนรู้สิ่งของและปรากฏการณ์ได้โดยต้องมีของจริงหรือตัวอย่างประกอบ รวมทั้งการให้เหตุผลด้วย และเหตุผลนั้นเป็นแบบแปรกลับไปมาได้ คำนึงถึงความคิดเห็นของผู้อื่น เข้าใจเรื่องอดีต แก้ปัญหาได้โดยใช้เหตุผลแบบที่มีของจริง ตัวอย่างหรือข้อที่สังเกตได้มาประกอบ แต่ยังวิเคราะห์ปัญหาอย่างเป็นระบบหรือขั้นตอนไม่ได้ เข้าใจเรื่องตัวแปรต้นและตัวแปรตามที่ง่าย ๆ ไม่ซับซ้อนและสามารถใช้ตัวเลข จานแนกสิ่งของ เรื่องลำดับเหตุการณ์ เข้าใจมโนคติเรื่องความยาว น้ำหนัก พื้นที่ สถานะของสสารและน้ำหนักของวัตถุ จัดจำแนกประเภทได้โดยใช้ตัวแปร 2 ตัวขึ้นไปแบบพหุคูณได้ เข้าใจเรื่องอัตราส่วนและสมการอย่างง่ายได้

ง. เมื่อผู้เรียนมีอายุระหว่าง 11 หรือ 12 ปีขึ้นไป ขั้นนี้เรียกว่า "ขั้นปฏิบัติการนามธรรม" ผู้เรียนจะแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้อย่างเป็นขั้นตอนและเป็นระบบ ไม่ต้องพึ่งสภาพของจริงหรือตัวอย่างประกอบ และสามารถอธิบายวิธีการคิดของตนเองได้ คิดกลับไปได้ สามารถวางหลักการจากประสบการณ์ที่พบเห็นหลายๆ ครั้งได้ จึงตั้งสมมติฐาน ทำการทดลอง สรุปผลการทดลองให้สอดคล้องกับหลักการของตนเองได้ ขั้นนี้ผู้เรียนจะสามารถคิดได้อย่างนามธรรมสนใจที่จะทดลอง สร้างสมมติฐาน ทำการทดลอง แปลข้อมูลและอื่นๆ เพื่อให้ได้ข้อมูลยืนยันในการพิสูจน์สมมติฐานเข้าใจเรื่องสัดส่วนและการแทนค่าในสมการที่ซับซ้อนได้

ขั้นพัฒนาการ	ช่วงอายุ	โครงสร้างความรู้คิด (Mental Structures Permit)
ขั้นประสาทสัมผัสและการเคลื่อนไหว (Sensorymotor)	0-2 ปี	กระทำกับวัตถุ (Action on Objects)
ขั้นก่อนการปฏิบัติการ (Preoperational)	2-6 ปี	กระทำเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อม (Action on Reality)
ขั้นปฏิบัติการรูปธรรม (Concrete operational)	6-12 ปี	กระทำเกี่ยวกับ "Operation" (Action on operations)
ขั้นปฏิบัติการนามธรรม (Formal operational)	12 ปีขึ้นไป	Operations on operations

เมื่อนักเรียนเข้าสู่ขั้นปฏิบัติการนามธรรม Piaget มีความเชื่อว่า การถ่ายทอดความรู้คิด (Mental transformations) โดยปราศจากสื่อรูปธรรม นักเรียนจะเข้าใจมโนเมตนามธรรมค่อนข้างยาก ดังนั้น การเรียนรู้ที่เป็นนามธรรม ก็ควรนำเสนอในลักษณะรูปธรรมเพื่อช่วยให้เกิดการเรียนรู้ได้ดีขึ้น (กิ่งฟ้า สีนธวงษ์, 2537)

สุวัฒนา อุทัยรัตน์ (2526) สรุปแนวคิดของ Piaget ในทฤษฎีพัฒนาการทางเชาว์ปัญญาที่นำมาใช้ในการศึกษา

1. ด้านการประเมินผลศักยภาพทางเชาว์ปัญญา ซึ่งเทียบได้จากระดับอายุของเด็ก เช่น เด็กมีอายุระดับปฏิบัติการรูปธรรม แต่สามารถคิดในสิ่งที่ป็นนามธรรมเหมือนเด็กในวัยปฏิบัติการนามธรรมได้ แสดงว่าเด็กคนนั้นมีพัฒนาการทางเชาว์ปัญญามากกว่าปกติในทางตรงกันข้ามหากเด็กคนนั้นยังไม่สามารถที่จะบอกเลขได้ หรือไม่สามารถคิดย้อนกลับได้เหมือนเด็กอื่นๆ ในระยะเดียวกัน เราก็อาจสรุปได้ว่า เด็กคนนั้นมีพัฒนาการทางสติปัญญาช้าลงกว่าปกติ

2. ด้านการเรียนรู้ Piaget เชื่อว่ามนุษย์เราจะเรียนรู้สิ่งต่างๆ ได้เพียงใดนั้นขึ้นอยู่กับพัฒนาการทางสติปัญญาของแต่ละคน นั่นคือ Piaget เน้นการเรียนรู้ที่ผู้เรียนจะเรียนด้วยตนเองมากที่สุด ครูเป็นเพียงผู้ให้ความร่วมมือ ผู้เตรียมเนื้อหา หรือประสบการณ์ที่จะให้เด็กรู้ด้วยตนเองเท่านั้น

3. ด้านการประเมินผลการเรียน จากแนวคิดของ Piaget ทำให้ทราบว่า การวัดผลเด็กในวัยต่างๆ จำเป็นต้องคำนึงถึงพัฒนาการทางสติปัญญาและการคิดของเด็กแต่ละวัย เด็กซึ่งอยู่ในระยะต้นๆ เช่น ระยะรับรู้ตอบสนอง ควรวัดผลจากการกระทำหรือกิจกรรมที่แสดงออก ตรงกันข้ามกับการวัดผลของเด็กในระยะปฏิบัติการนามธรรมจะต้องวัดการใช้เหตุผลที่ลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น

4. ด้านการจัดลำดับเนื้อหาในหลักสูตร หลักสูตรของเด็กเล็กจะต้องอยู่ในลักษณะที่เป็นกิจกรรมต่อสิ่งรอบๆ ตัวของเด็ก เพราะพัฒนาการทางเชาว์ปัญญาของเด็กวัยนี้อยู่ในระยะรับรู้ตอบสนอง ส่วนเด็กที่อยู่ในระยะสูงขึ้น ก็จะค่อยๆ ได้เรียนรู้ในสิ่งที่เป็นามธรรมและทฤษฎีที่มากขึ้น บรูว์นเนอร์ (1960) สรุปทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของ Piaget ดังนี้

1. อายุเป็นปัจจัยสำคัญของการพัฒนาการทางสติปัญญา นั่นคือ การพัฒนาการทางสติปัญญาจะเป็นไปตามระดับอายุ

2. Piaget มีความเชื่อว่า การกระทำเป็นพื้นฐานทำให้เกิดความคิด
ลาวัลย์ พลกล้า (2526) สรุปทฤษฎีของ Piaget แสดงให้เห็นว่า

1. มโนคติทางคณิตศาสตร์สามารถสร้างขึ้นด้วยตัวของตัวเองจากการกระทำตามธรรมชาติโดยวัตถุเป็นสื่อ

2. เด็กสามารถเข้าใจความหมายของกระบวนการทางคณิตศาสตร์ หลังจากที่ได้เด็กสามารถเข้าใจสัญลักษณ์และเครื่องหมาย

3. เด็กควรจะได้เข้าใจมโนคติต่างๆ ในลักษณะที่เป็นรูปธรรมก่อนจะได้เรียนหรือใช้มโนคติเหล่านั้นอย่างนามธรรม

วัลลภา อารีรัตน์ (2532) เสนอการนำแนวคิดทฤษฎีของ Piaget ไปใช้ในการเรียนการสอน

1. Piaget มีความคิดสอดคล้องกับ "การเรียนรู้ด้วยการกระทำ" (Learning by doing) ของ John Dewey ในการเรียนการสอนเด็กที่มีอายุน้อยเท่าไร ก็ต้องให้เด็กได้รับประสบการณ์หรือกิจกรรมที่จัดให้เด็กได้ลงมือกระทำด้วยตนเองมากขึ้น จึงจะช่วยให้เกิดความเข้าใจ ซึ่งครูจะเป็นผู้เตรียมเนื้อหาหรือประสบการณ์ที่จะให้เด็กค้นพบความคิดรวบยอดด้วยตนเอง จากแนวคิดดังกล่าวของ Piaget มีอิทธิพลต่อการออกแบบวิธีสอน ได้มีการค้นคว้าวิธีสอนและเนื้อหาใหม่ โดยการให้นักเรียนค้นคว้าข้อมูลและสื่อการเรียนการสอนที่จับต้องได้ ซึ่งจะช่วยให้มีการแสดง-ออกทางสติปัญญาด้วยการใช้เหตุผล มีความสามารถในการคิดสร้างสรรค์ จนเกิดการพัฒนาความคิดสร้างสรรค์ได้

2. เกี่ยวกับการจัดลำดับเนื้อหาในหลักสูตร ถ้าเป็นเด็กเล็กๆ หลักสูตรจะต้องอยู่ในลักษณะที่เป็นกิจกรรมสิ่งรอบๆ ตัวของเด็ก เพราะพัฒนาการทางสติปัญญาของเด็กวัยนี้อยู่ในขั้นประสาทรับรู้และการเคลื่อนไหว ส่วนเด็กที่อยู่ในวัยสูงขึ้น เช่น ขั้นปฏิบัติการคิดด้วยรูปธรรมหรือขั้นปฏิบัติการคิดด้วยนามธรรม ก็ควรจะได้เรียนรู้ในสิ่งที่เป็นามธรรมน้อยลง

ในการจัดเนื้อหาวิชาในหลักสูตร ควรตั้งอยู่บนพื้นฐานของพัฒนาการหรือโครงการทางความคิดตามทฤษฎีของ Piaget ลำดับขั้นของพัฒนาการนั้นจะช่วยได้มากในการตั้งจุดมุ่งหมายของ

หลักสูตรในโรงเรียนระดับประถมและจะมีประโยชน์มากในการวางแผนการสอนให้สอดคล้องกับโครงสร้างของพัฒนาการของสติปัญญา และการคิดของเด็กแต่ละชั้น

ในการสอนเรื่องใหม่ครูจะต้องคำนึงถึงความรู้พื้นฐานที่ต้องเรียนมาก่อน ถ้าเด็กมีความรู้พื้นฐานแล้ว การรับความคิดรวบยอดใหม่ก็สามารถเชื่อมโยงเข้าหากันได้ ถ้าความรู้พื้นฐานเดิมไม่พอที่จะรับความคิดรวบยอดใหม่ ครูจะต้องสอนซ่อมเสริมในเรื่องเดิมก่อน ทั้งนี้เพราะเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นบันไดเวียน ซึ่งลักษณะนี้จะช่วยสร้างความเข้าใจเก่ากับใหม่ให้ต่อเนื่องกันได้เป็นอย่างดี

3. เกี่ยวกับการประเมินผลศักยภาพทางสติปัญญานั้น พิจารณาจากลำดับขั้นพัฒนาการของเด็ก เช่น เด็กที่มีอายุอยู่ในขั้นปฏิบัติการคิดด้วยรูปธรรม แต่สามารถคิดในสิ่งที่เป็นนามธรรมเหมือนเด็กในขั้นปฏิบัติการคิดด้วยนามธรรมได้ ก็แสดงว่าเด็กคนนั้นมีพัฒนาการทางสติปัญญาก้าวหน้ากว่าปกติ ในการตรงกันข้ามหากเด็กคนนั้นไม่สามารถคิดย้อนกลับได้เหมือนเด็กอื่นๆ ในชั้นเดียวกัน เราก็อาจสรุปได้ว่าเด็กคนนั้นมีพัฒนาการทางสติปัญญาช้ากว่าปกติ

4. ในด้านการประเมินผลการเรียน ต้องคำนึงถึงพัฒนาการทางสติปัญญา และการคิดของเด็กแต่ละวัย เช่น ถ้าอยู่ในขั้นประสาทสัมผัส และการเคลื่อนไหวก็ควรวัดผลจากการกระทำหรือกิจกรรมทางกลไก ซึ่งตรงกันข้ามกับการวัดผลของเด็กในขั้นปฏิบัติการคิดด้วยนามธรรม ซึ่งต้องวัดการใช้เหตุผลที่ลึกซึ้งขึ้น

กึ่งฟ้า สันรูจษ์ (2537) สรุปหลักการสอนตามแนวคิดของ Piaget ได้ดังนี้

1. การเรียนรู้จะเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนได้มีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมตามความสามารถทางสติปัญญา
2. มโนคติหนึ่งๆ สามารถแบ่งได้หลายระดับตามขั้นพัฒนาการทางสติปัญญา
3. การพัฒนาการสติปัญญาเกิดขึ้นได้โดยการปรับโครงสร้างความคิดให้อยู่ในสภาวะสมดุลโดยพยายามเพิ่มพูนสติปัญญา และจัดอุปสรรคที่เกิดจากอิทธิพลด้านประสบการณ์ทางกายภาพและสังคม
4. การนำเสนอบทเรียนควรให้ผู้เรียนพบกับปัญหาใช้ความคิดแก้ปัญหาทดลองแก้ปัญหา และหาเหตุผลสำหรับวิธีการแก้ปัญหาที่ขัดด้วยตนเอง

จากที่กล่าวมาทั้งหมดแสดงให้เห็นว่า ในการสอนนักเรียนในระดับประถมศึกษา ควรให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติกับปัญหาใช้ความคิดแก้ปัญหา ทดลองแก้ปัญหา โดยใช้สื่อรูปธรรมก่อน แล้วนักเรียนจะเกิดมโนคติทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนสร้างขึ้นเองจากการกระทำจากสื่อรูปธรรม

Jerome Bruner (1966) มีความเชื่อว่าการเรียนรู้จะเกิดได้เขาต้องได้ร่วมกระบวนการค้นพบหรือกระบวนการแก้ปัญหาด้วยตนเอง

บุญทัน อยู่ชมบุญ (2529) กล่าวถึง Bruner ว่าได้ให้ความสำคัญของพัฒนาการทางสติปัญญาขึ้นอยู่กับอิทธิพลของสิ่งแวดล้อม หรือวัฒนธรรมมากกว่าพันธุกรรม และการเรียนรู้ต้องอาศัยร่างกายและสิ่งแวดล้อมเป็นพื้นฐาน แต่สิ่งแวดล้อมมีอิทธิพลมากกว่า

ลาวัลย์ พลกล้า (2526) กล่าวถึง Bruner ซึ่งมีความเชื่อว่า

1. กระบวนการแก้ปัญหาควรเป็นผลสำคัญของการศึกษามากกว่าการได้คำตอบที่ถูกต้อง
2. การที่เด็กจะเรียนรู้ต้องมีประสิทธิภาพ เขาควรจะได้ร่วมในกระบวนการค้นพบหรือกระบวนการแก้ปัญหาด้วยตนเอง การจดจำข้อเท็จจริงหรือกฎเกณฑ์ต่างๆ ในคณิตศาสตร์มีความจำเป็นในบางกรณีเท่านั้น เช่น กรณีที่สิ่งเหล่านั้นจำเป็นต้องใช้เพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา
3. การที่เด็กได้สำรวจ จับต้อง สิ่งของในสิ่งแวดล้อมเป็นสิ่งจำเป็นต่อการสร้างมโนคติหรือการพัฒนาความคิดตามลำดับขั้น

Bruner เสนอแบบของการเสนอและการรับรู้มี 3 ระดับ

แบบ (Mode)	นิยาม (Definition)
1) ขึ้นเสนอและรับรู้จากการปฏิบัติกับของจริง (Enactive)	ผู้เรียนจะเรียนได้ดีเมื่อมีโอกาสสัมผัสหรือลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง
2) ขึ้นเสนอและรับรู้จากรูปภาพ (Iconic)	ผู้เรียนจะเรียนรู้เรื่องราวหรือมโนคติต่างๆ ได้เข้าใจโดยการใช้อุปมาอุปไมย ภาพวาดประกอบ
3) ขึ้นเสนอและรับรู้จากการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ (Symbolic)	พฤติกรรมการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นอยู่ในลักษณะที่ผู้เรียน เรียนมโนคติ หลักการได้อย่างเข้าใจเมื่อใช้ตัวเลขและสัญลักษณ์ต่างๆ แทนเรื่องที่เป็นนามธรรม

นักการศึกษาทางคณิตศาสตร์มักจะอ้างถึงแบบของการเสนอและการรับรู้ทั้ง 3 แบบนี้บ่อยๆ คือ รูปธรรม, ภาพ และสัญลักษณ์ ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา ตำราแบบเรียนมักเริ่มด้วยรูปภาพ แล้วถึงจะเป็นสัญลักษณ์ อย่างไรก็ตามทุกๆ ลำดับเน้นหนักให้ครูสอนมโนคติใหม่ด้วยสื่อรูปธรรมก่อน (Hatfield, Edwards, Bitte, 1993) นั่นคือ เป็นประโยชน์โดยตรงต่อการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ จากประสบการณ์รูปธรรมไปสู่นามธรรม (สุวัฒนา อุทัยรัตน์, 2526)

วัลลภา อาริรัตน์ (2532) ได้สรุปแนวคิดที่สำคัญของบรูเนอร์ต่อการเรียนการสอน

1. ครูจะต้องพยายามจัดโครงสร้างเนื้อหาวิชาให้เป็นระบบสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกัน เพื่อช่วยให้ผู้เรียนสามารถโยงความรู้เดิมให้สัมพันธ์กับความรู้ใหม่ได้ จนเกิดการพัฒนามโนคติ คณิตศาสตร์ใหม่ได้มากที่สุด

2. ในการจัดการเรียนการสอนครูจะต้องพยายามสร้างแรงจูงใจให้เกิดกับผู้เรียน ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจอยากที่จะเรียนรู้และร่วมกิจกรรม ซึ่งกิจกรรมนั้นควรจัดให้สอดคล้องกับหลักพัฒนาการทางสติปัญญาของเด็ก เด็กเล็กๆ ควรจะได้รับการสอนในสิ่งที่เป็นรูปธรรม การใช้สื่อต่างๆ ในการอธิบายแนวคิดจนเกิดการขยายความคิดรวบยอดนั้นให้เกี่ยวกับนามธรรมมากขึ้น

3. ควรมีการเสริมแรงในขณะที่สอนเสริมแรงจะมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ของผู้เรียน ซึ่งครูผู้สอนจะต้องหาวิธีการใช้การเสริมแรงเป็นเครื่องมือสร้างแรงจูงใจให้เกิดพฤติกรรมการเรียนรู้ถึงประสงค์

สุวัฒนา อุทัยรัตน์ (2526) สรุปแนวทางในการสอนตามแนวคิดของ Bruner ว่าวิธีสอนมีความสำคัญ เพราะเด็กจะมีความสามารถแก้ปัญหาต่างๆ จนได้พบความจริงที่ต้องการ ถ้าครูรู้จักเลือกวิธีสอนให้เหมาะสม

กิ่งฟ้า สินธุวงษ์ (2537) กล่าวถึง Bruner ว่า ได้เสนอวิธีสอนแบบค้นพบด้วยตนเอง ซึ่งนำมาใช้สำหรับผู้เรียนเพื่อให้เกิดการเรียนรู้ตามลำดับขั้นดังนี้

- 1) นำเสนอปัญหา
- 2) ให้ผู้เรียนมีโอกาสดำเนินการเข้าใกล้กับปัญหา
- 3) บอกให้ผู้เรียนแก้ปัญหา พร้อมกับกำหนดวัตถุประสงค์มาให้
- 4) ให้ผู้เรียนแสดงผลของการแก้ปัญหาด้วยตนเอง
- 5) อธิบายเพิ่มเติม โดยผู้เรียนและผู้สอน ในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา
- 6) สรุปผลที่ได้จากการแก้ปัญหา

และผลดีของการสอนแบบค้นพบด้วยตนเอง มีดังนี้

- 1) ทำให้ผู้เรียนเป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอน
- 2) ได้เรียนรู้โดยวิธีการค้นพบด้วยตนเอง เป็นการเปิดโอกาสฝึกความคิดและการกระทำ ได้เรียนรู้วิธีจัดระบบความคิด วิธีแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง

3) ทำให้มีความรู้คงทนและถ่ายโยงการเรียนรู้ได้ เนื่องจากผู้เรียนต้องแก้ปัญหาค้นพบวิธีแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง จึงทำให้ความรู้ที่ได้นั้นคงอยู่ไม่สูญไปง่ายๆ และเมื่อพบสถานการณ์ใหม่ก็นำหลักเรียนรู้เดิมไปใช้ได้อีกด้วย

- 4) ฝึกให้ผู้เรียนได้เรียนรู้โดยใช้กระบวนการแสวงหาความรู้ ไม่ใช่วิธีเรียนโดยการท่องจำ

สรุปการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามทฤษฎีการเรียนรู้ของ Bruner ได้ว่าควรยึดเด็กเป็นศูนย์กลาง และเปิดโอกาสให้เด็กได้เรียนรู้ ผึกคิดแก้ปัญหาด้วยตนเอง จากการจัดประสบการณ์ที่เริ่มด้วยรูปธรรม กึ่งรูปธรรม และไปสู่นามธรรม ในที่สุดเด็กก็รู้จักการจัดระบบความคิด ใช้กระบวนการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ไม่ใช้การเรียนแบบท่องจำ

2.5.1.2 ทฤษฎีพฤติกรรมนิยม (Behaviorist Theories)

Hatfield, Edwards, Bitter (1993) กล่าวถึง ทฤษฎีพฤติกรรมนิยมเน้นการตอบสนองสิ่งเร้า (Stimulus - response) เป็นแนวทางการเรียนรู้ จากการวิจัยแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมที่ดีที่สุดคือให้แรงเสริมบวก(Positive reinforcement) หรือการเพิ่มความถี่ของการตอบสนองได้โดยการเพิ่มสิ่งเร้าในสิ่งแวดล้อมของการเรียนรู้(B.F.Skinner 1968) งานวิจัยแสดงให้เห็นถึงการสอนที่มีประสิทธิภาพควรรักษาไว้ให้นักเรียนทุกคนมีการตอบสนอง (Every Pupil Response; EPR)เป็นผลให้เกิดการเรียนรู้มากกว่า (Hunter,1985) นักเรียนทุกคนแสดงคำตอบทันทีที่ครูครูสามารถจับมโนทัศน์ที่ผิด และความเข้าใจผิดได้อย่างรวดเร็ว จากรูปภาพแสดงถึงการสอนโดยใช้สื่อหลากหลายโดยใช้ EPR ซึ่งให้ผลอย่างรวดเร็วระหว่างการเรียน

Albert Bandura (1977) สร้างทฤษฎีการเรียนรู้ทางสังคม (Social Learning Theory) เน้นการเรียนรู้โดยการสังเกต การตอบสนองคือการเชื่อมโยงกับสิ่งเร้าที่บุคคลนั้นเห็นเป็นผลมาจากการตอบสนองของบุคคลอื่น การตอบสนองของคนเราเป็นการเลียนแบบจากตัวแบบ (Model) ในทางการศึกษาพบว่า การเรียนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ (Cooperative learning) มีพื้นฐานมาจากความคิดที่ว่านักเรียนสามารถเรียนรู้ได้จากเพื่อน ร่วมกันพยายามให้เกิดการเรียนรู้อย่างสมบูรณ์ (Slavin, 1983, 1985, 1991) การเรียนกลุ่มย่อย (Cooperative group) เป็นเครื่องมือให้นักเรียนนำความคิดมาพิจารณา แก้ปัญหา เสนอความคิด รับฟังผู้อื่น เรียนรู้กัน ตกลงกันอย่างสุภาพ และพัฒนาความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อย่างรอบรู้ (master) การร่วมมือกันเรียนรู้มีอิทธิพลต่อการมีความสัมพันธ์ ช่วยนักเรียนพัฒนาทัศนคติทางบวกต่อวิชาคณิตศาสตร์ และเพิ่มความมั่นใจในความสามารถของตนในวิชาคณิตศาสตร์ (Hatfield, Edwards, Bitts, 1993)



ภาพที่ 3 แสดงกิจกรรมให้นักเรียนทุกคนมีการตอบสนอง

2.5.2 หลักการตามรูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ (Cooperative Learning)

STAD (STUDENT TEAMS-ACHIEVEMENT DIVISIONS) เป็นรูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ (Cooperative Learning) ที่ Robert Slavin และคณะได้พัฒนาขึ้น เป็นรูปแบบที่ง่ายที่สุดและใช้กันแพร่หลายที่สุด เหมาะสำหรับครูผู้สอนที่เลือกใช้รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ในระยะเริ่มแรก STADมีส่วนประกอบที่สำคัญ 5 ประการด้วยกันคือ

1. การนำเสนอทเรียนต่อทั้งชั้น (Class Presentation)
2. การเรียนกลุ่มย่อย (Team Study)
3. การทดสอบย่อย (Test)
4. คะแนนความก้าวหน้าของแต่ละคน (Individual Improvement Scores)
5. ทีมที่ได้รับการยกย่อง (Team Recognition)

1. การสอนบทเรียนต่อชั้นเรียน เนื้อหาของบทเรียนจะถูกเสนอต่อนักเรียนทั้งห้องโดยครูผู้สอน ซึ่งครูจะใช้เทคนิควิธีการเสนอรูปแบบใดขึ้นอยู่กับลักษณะของเนื้อหาของบทเรียนและการตัดสินใจของครูเป็นสำคัญที่จะเลือกเทคนิควิธีการสอนที่เหมาะสม โดยใช้สื่อการเรียนการสอนประกอบการอธิบายของครู การเสนอบทเรียนในขั้นนี้จะเหมือนกับการสอนปกติของครูแตกต่างกัน เฉพาะการสอนบทเรียนดังกล่าวจะต้องสัมพันธ์และเน้นหน่วยการเรียนรู้ที่ผู้เรียนจะต้องทำเป็นกลุ่มในขั้นต่อไปด้วย ผู้เรียนจะต้องสนใจและตั้งใจเรียนในขณะที่ครูเสนอเนื้อหา เพราะจะมีผลต่อเขาในการทำงานแบบทดสอบย่อย และผลการทดสอบจะเป็นตัวกำหนดคะแนนของกลุ่มด้วย

2. การทำงานกลุ่ม กลุ่มจะประกอบด้วยนักเรียนประมาณ 4-5 คน ซึ่งมีความแตกต่างกันทั้งในแง่ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเพศ หน้าที่ที่สำคัญของกลุ่มคือการเตรียมสมาชิกของกลุ่มให้สามารถทำงานแบบทดสอบได้ดี หลังจากการเสนอเนื้อหาของครูต่อนักเรียนทั้งชั้นแล้ว นักเรียนจะแยกทำงานเป็นกลุ่มเพื่อศึกษาตามใบตรงานหรือกิจกรรมกลุ่มที่ครูกำหนดให้ โดยส่วนมากแล้วกิจกรรมจะอยู่ในรูปการอภิปราย การแก้ปัญหาร่วมกัน การเปรียบเทียบคำตอบและการแก้ความเข้าใจผิดของเพื่อนร่วมทีมกลุ่มเป็นลักษณะที่สำคัญที่สุด สมาชิกในกลุ่มจะต้องทำให้ดีที่สุดเพื่อกลุ่มของตน กลุ่มจะต้องทำให้ดีที่สุดเพื่อช่วยสมาชิกแต่ละคนของกลุ่ม กลุ่มจะต้องติวและสอนเพื่อนร่วมกลุ่มให้เข้าใจในเนื้อหาที่จะเรียน การทำงานของกลุ่มลักษณะนี้จะ เน้นความสัมพันธ์ของสมาชิกในกลุ่ม การนับถือของตนเอง (Self-esteem) และการยอมรับเพื่อนนักเรียนที่เรียนอ่อน สิ่งนี้นักเรียนควรคำนึงในการทำงานกลุ่มย่อมมีดังนี้

- 1) นักเรียนต้องช่วยเหลือเพื่อนในทีมให้ได้เรียนรู้เนื้อหาที่เรียนอย่างถ่องแท้
- 2) ไม่มีใครจะเรียนหรือศึกษาเนื้อหาจบเพียงคนเดียว โดยที่เพื่อนในกลุ่มยังไม่เข้าใจเนื้อหา
 - 3) ถ้ายังไม่เข้าใจให้ปรึกษาเพื่อนในกลุ่มก่อนจึงปรึกษาครู
 - 4) เพื่อนร่วมทีมต้องปรึกษากันหรือกันเบาๆ ไม่ให้รบกวนกลุ่มอื่น
- ในการจัดการเรียนการสอนกลุ่มย่อยครูควรสนับสนุนในสิ่งต่อไปนี้
 - 1) ให้โอกาสผู้เรียนในการตั้งชื่อทีม
 - 2) นักเรียนสามารถเคลื่อนย้ายโต๊ะ เก้าอี้ภายในกลุ่มหรือย้ายที่ทำงานของกลุ่มได้ภายในชั้นเรียน
 - 3) แนะนำให้ผู้เรียนร่วมมือกันทำงานเป็นคู่หรือ 3 คนก็ได้ โดยให้มีการตรวจผลงานของกันและกัน เมื่อมีการผิดพลาด เพื่อนในทีมต้องช่วยอธิบายให้เข้าใจ
 - 4) ไม่ควรจบการศึกษาเนื้อหาง่ายๆ จนกว่าจะแน่ใจว่าเพื่อนในทีมทุกคนพร้อมที่จะทำข้อสอบได้ 100%
 - 5) ให้มีการอธิบายคำตอบซึ่งกันและกัน แล้วจึงนำไปตรวจกับบัตรเฉลยคำตอบ

6) เมื่อมีปัญหาลับปรึกษาเพื่อร่วมทีมก่อนจึงปรึกษาครู

7) ระหว่างผู้ที่เรียนทำกิจกรรม ครูควรเดินไปรอบๆ ห้องเพื่อให้นักเรียนได้มีโอกาสปรึกษาหารือได้สะดวกและเป็นการเสริมกำลังใจแก่ผู้เรียนด้วย

3. การทดสอบย่อย หลังจากเรียนไปได้ประมาณ 1-2 คาบ นักเรียนจะต้องได้รับการทดสอบ ในระหว่างทำการทดสอบนักเรียนในกลุ่มไม่อนุญาตให้ช่วยเหลือกัน ทุกคนทำข้อสอบตามความสามารถของตนเอง

4. คะแนนในการพัฒนาตนเอง ความคิดที่อยู่เบื้องหลังของคะแนนในการพัฒนาตนเองของนักเรียนคือการให้นักเรียนแต่ละคนมีเป้าหมายเกี่ยวกับผลการเรียนของตนเองที่จะต้องทำให้ได้ตามเป้าหมายนั้น ซึ่งนักเรียนจะทำได้หรือไม่ จะขึ้นอยู่กับการทำงานหนักเพิ่มมากขึ้นกว่าที่ทำมาแล้วในบทเรียนก่อน นักเรียนทุกคนมีโอกาสได้คะแนนสูงสุดเพื่อช่วยกลุ่ม ซึ่งจะทำให้ไม่ได้เลยถ้าคะแนนในการสอนต่ำกว่าคะแนนที่ได้ในครั้งก่อน นักเรียนแต่ละคนจะมีคะแนนที่เป็น "ฐาน" ซึ่งได้จากการเฉลี่ยคะแนนในการสอนต่ำกว่าคะแนนของการสอบครั้งก่อน หรือคะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบที่คล้ายคลึงกัน คะแนนของนักเรียนสำหรับกลุ่มขึ้นอยู่กับคะแนนของเขาห่างจากคะแนน "ฐาน" มากน้อยเพียงใด

5. กลุ่มที่ได้รับการยกย่องและการยอมรับ กลุ่มจะได้รางวัลเมื่อคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มเกินเกณฑ์ที่ตั้งไว้

ขั้นเตรียมการ ครูจะต้องเตรียม

1. วัสดุการสอน ครูจะต้องเตรียมวัสดุการสอนที่ใช้ในการทำงานกลุ่มประกอบด้วยบัตรเนื้อหา บัตรกิจกรรม และบัตรเฉลย รวมทั้งข้อสอบสำหรับทดสอบนักเรียนแต่ละคนหลังจากเรียนบทเรียนในแต่ละหน่วยแล้ว

2. การจัดนักเรียนเข้ากลุ่ม แต่ละกลุ่มจะประกอบด้วยนักเรียนประมาณ 4-5 คน ซึ่งมีความสามารถทางวิชาการแตกต่างกันกล่าวคือประกอบด้วย นักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน ถ้าเป็นไปได้ควรคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างเพศด้วย เช่น ประกอบด้วย ชาย 2 คน และหญิง 2 คน วิธีการจัดนักเรียนเข้ากลุ่มอาจทำได้ดังนี้

2.1 จัดลำดับนักเรียนในชั้นจากเก่งที่สุดไปหาอ่อนที่สุดโดยยึดตามผลการเรียนที่ผ่านมา ซึ่งอาจจะเป็นคะแนนจากแบบทดสอบ เกรด หรือการพิจารณาตัดสินใจของครูเองเป็นส่วนประกอบ ครูอาจจะลำบากใจในการจัดลำดับ แต่พยายามให้ดีที่สุดเท่าที่จะทำได้

2.2 หากจำนวนกลุ่มทั้งหมดว่ามีกี่กลุ่ม แต่ละกลุ่มควรประกอบด้วยสมาชิกประมาณ 4 คน ฉะนั้น จำนวนทั้งหมดควรมีกี่กลุ่มหาได้จากการหารจำนวนนักเรียนทั้งหมดด้วย 4 ผลหารก็คือ

จำนวนกลุ่มทั้งหมด ถ้าหารไม่ลงตัว เราอนุโลมให้บางกลุ่มมีสมาชิก 5 คนได้ ตัวอย่างเช่น ถ้ามีนักเรียนในห้องทั้งหมด 32 คน ถ้าแบ่งเป็นกลุ่มละ 4 คน จะได้ทั้งหมด 8 กลุ่มพอดี

2.3 กำหนดนักเรียนเข้ากลุ่ม เพื่อให้ได้กลุ่มที่สมดุลกันในแต่ละประเด็นต่อไปนี้คือ (1) แต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนจากอ่อน ปานกลาง และเก่ง และ (2) ระดับผลการเรียนโดยเฉลี่ยของของทุกกลุ่มในชั้นใกล้เคียงกัน เราจะทำได้อย่างไร คือ ให้ชื่อกลุ่มทั้ง 8 กลุ่ม ด้วยตัวอักษรจาก A ถึง H จัดนักเรียนเข้ากลุ่มโดย เริ่มจากนักเรียนที่เก่งที่สุดเข้าอยู่กลุ่ม A ไล่ลงมาเรื่อยๆ จนกระทั่งคนที่ 8 จะอยู่ในกลุ่ม H จากนั้นเริ่มใหม่ให้คนที่ 9 อยู่ในกลุ่ม H

ตารางที่ 1 แสดงการกำหนดนักเรียนเข้ากลุ่ม

	อันดับ	ชื่อกลุ่ม		อันดับ	ชื่อกลุ่ม
นักเรียนเก่ง	1	A	นักเรียนปานกลาง	23	E
	2	B		24	F
	3	C		25	G
	4	D		26	H
	5	E	นักเรียนอ่อน	27	H
	6	F		28	G
	7	G		29	F
	8	H		30	E
นักเรียนปานกลาง	9	H		31	D
	10	G		32	C
	11	F		33	B
	12	E		34	A
	13	D			
	14	C			
	15	B			
	16	A			
	17				
	18				
	19	A			
	20	B			
	21	C			
	22	D			

คนที่ 10 กลุ่ม G คนที่ 11 กลุ่ม E ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงคนที่ 16 จะอยู่ในกลุ่ม A กระทั่งเข้าด้วยระบบการเข้ากลุ่มนี้ จนถึงนักเรียนที่อ่อนที่สุด (ดังตารางที่ 1)

จากตารางที่ 1 จะสังเกตว่า นักเรียนคนที่ 17 และ 18 เรายังไม่ได้จัดกลุ่ม ทั้งนี้เพราะมีนักเรียนทั้งหมด 34 คน ถ้าแบ่งเป็นกลุ่มละ 4 คน จะได้ 8 กลุ่ม และเหลือเศษอีก 2 คน ฉะนั้นจะมีอยู่ 2 กลุ่ม ที่จะมีสมาชิกกลุ่มละ 5 คน นั่นคือนักเรียนคนที่ 17 และ 18 จะเป็นสมาชิกคนที่ 5 ของกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งซึ่งแล้วแต่จะพิจารณาของครูว่าจะให้อยู่ในกลุ่มใด องค์ประกอบหนึ่งที่ควรพิจารณาคือ ความสมดุลในเรื่องเพศ หรือเชื้อชาติเป็นหลัก

2.4 การจัดเตรียมใบสรุปผลของกลุ่ม ซึ่งอาจจะออกแบบดังตารางที่ 2 หลังจากจัดนักเรียนเข้ากลุ่มแล้ว เราสามารถกรอกรายชื่อสมาชิกแต่ละกลุ่มไปลงสรุปผลของแต่ละกลุ่มได้

ตารางที่ 2 ใบสรุปผลของกลุ่ม

สมาชิกของกลุ่ม	1	2	3	4	5	6	7	8	9
คะแนนรวมของกลุ่ม									
คะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม									
รางวัลของกลุ่ม									

3. การหาฐานคะแนนของนักเรียน ฐานคะแนนของนักเรียนแต่ละคน หมายถึงคะแนนเฉลี่ยของผลการเรียนหรือผลของการทดสอบย่อยที่ผ่านมาถ้าเราเริ่มใช้ STAD หลังจากที่เราได้สอบย่อยไปแล้ว 2-3 ครั้ง ให้ใช้ผลเฉลี่ยของคะแนนจากผลการทดสอบย่อยดังกล่าวเป็นฐานคะแนนหรืออาจใช้คะแนนเฉลี่ยปลายปีของปีที่แล้วมาคิดคำนวณเป็นฐานคะแนนก็ได้ซึ่งมีวิธีการคิดคำนวณได้ดังตาราง

ตารางที่ 3 การคิดคำนวณฐานคะแนนของนักเรียนแต่ละคน

เกรดของเทอมที่ผ่านมา	ฐานคะแนน
A	90
A-/B+	85
B	80
B-/C+	75
C	70
C-/D+	65
D	60
F	55

คะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบย่อย 3 ครั้ง

$$\begin{array}{r}
 \text{คะแนนของสุดา} \quad 90 \\
 \quad \quad \quad 84 \quad + \\
 \hline
 \quad \quad \quad 87 \\
 261 \div 3 = 87
 \end{array}$$

ฐานคะแนนของสุดา คือ 87

4. การคิดคำนวณความก้าวหน้าของแต่ละคนและทีม

คะแนนความก้าวหน้าของสมาชิกแต่ละคนในทีม คิดคำนวณจากผลต่างระหว่างคะแนนของผลการสอบย่อย กับคะแนนฐานของแต่ละคน ซึ่งมีเกณฑ์ในการให้คะแนน ดังนี้

ตารางที่ 4 แสดงการคิดคะแนนความก้าวหน้า

คะแนนจากการทดสอบ	คะแนนความก้าวหน้า (Improvement points)
- ได้คะแนนต่ำกว่าคะแนนฐานมากกว่า 10 คะแนน	0
- ได้คะแนนต่ำกว่าคะแนนฐาน 1-10 คะแนน	10
- ได้คะแนนสูงกว่าคะแนนฐาน 0-10 คะแนน	20
- ได้คะแนนสูงกว่าคะแนนฐานเกิน 10 คะแนน	30
- ได้คะแนนยอดเยี่ยม	30

คะแนนของทีมคิดคำนวณจากการหาค่าเฉลี่ยของคะแนนความก้าวหน้าของสมาชิกของแต่ละคนในทีม ทีมที่จะได้รับการยกย่องพึงได้รับรางวัลจะยึดเกณฑ์ดังนี้

ตารางที่ 5 แสดงเกณฑ์กำหนดทีมที่ได้รับการยกย่อง

คะแนนเฉลี่ยของทีม	ตัดสินอยู่ในระดับ
15	GOOD TEAM (เก่ง)
20	GREAT TEAM (เก่งมาก)
25	SUPER TEAM (ยอดเยี่ยม)

หมายเหตุ การเรียนแบบร่วมกันเรียนรู้แบบ STAD จะมีการเปลี่ยนทีมหรือจัดทีมใหม่เมื่อทำการสอนไปได้ประมาณ 5-6 สัปดาห์ เป็นการให้นักเรียนได้ร่วมมือในการแก้ปัญหาต่างๆ กับเพื่อนต่างๆ กับเพื่อนในชั้นได้ครบ ดังนี้

ตารางที่ 6 แสดงแบบรายงานการทดสอบย่อย และคะแนนความก้าวหน้า

	ทดสอบครั้งที่ : เรื่อง :			ทดสอบครั้งที่ : เรื่อง :		
	คะแนนฐาน	คะแนนจาก การทดสอบ	คะแนนความ ก้าวหน้า	คะแนนฐาน	คะแนนจาก การทดสอบ	คะแนนความ ก้าวหน้า
วิภา	90	100	30			
ลัดดา	90	82	10			
สุดา	75	79	20			
.						
.						

2.5.3 แนวคิด Constructivist

ทฤษฎีการเรียนรู้ Constructivist มีความเชื่อว่า เด็กสามารถที่จะพัฒนาความรู้ได้ด้วยตนเองโดยการผ่านการมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อม (Kutz, 1991) Constructivist เป็นทฤษฎีที่เน้นการศึกษาทางคณิตศาสตร์ ให้เหตุผลว่า ความรู้นั้นเกิดหรือสร้างขึ้นโดยเฉพาะบุคคล มากกว่าเกิดจากการถ่ายทอดโดยตรงจากผู้เชี่ยวชาญ เช่น ครู ผู้ปกครอง หรือจากหนังสือ (Von Glasersfeld, 1990)

ทฤษฎีนี้อยู่บนพื้นฐานของความสามารถในการระลึกหรือการได้มาซึ่งรูปแบบ (Recognize patterns) การรวบรวมของการจัดหมวดหมู่ของความรู้ (Organize knowledge) และการวางแผนการทำงานในอนาคต

Piaget (1970), Vygotsky (1978) กล่าวถึง โครงสร้างความรู้ (Cognitive Structures) เช่น การย้อนกลับ ($3+1 = 4$ ดังนั้น $4 = 3+1$) การสลับที่ ($3+4 = 4+3$) และการสมมาตร (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1) เป็นการเตรียมกลไกความรู้ เข้าใจ พร้อมทั้งเป็น ความสามารถพื้นฐานที่จะพัฒนาตามความสามารถเมื่อเด็กโตขึ้น แต่อย่างไรก็ตาม นักวิจัยเชื่อว่าการใช้เครื่องมือเป็นส่วนหนึ่งของการจัดองค์ประกอบของความรู้ในเด็ก จะช่วยให้พัฒนาความสามารถของเด็กให้มากขึ้น (Chomsky, 1971) จากความเชื่อของทฤษฎีการเรียนรู้นี้ ส่งผลให้ผู้เรียนมีปฏิสัมพันธ์หรือจัดกระทำกับสื่อ ซึ่งเป็นจุดที่พัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ (Kutz, 1991)

Cruikshank and Sheffield (1992) กล่าวถึง Constructivist ว่า เด็กได้ความรู้ที่ดีที่สุด จากการศึกษาที่เด็กได้สร้างความรู้ด้วยตัวของเด็กเอง จากผลงานของ Piaget ที่เกี่ยวข้องกับ Constructivist เป็นเครื่องช่วยแนะแนวทางของครูให้มีปฏิสัมพันธ์กับนักเรียน โดยการใช้คำถามและการอภิปราย แสดงความคิดเห็นอย่างชำนาญ และเปิดโอกาสให้เด็กได้ค้นพบความสัมพันธ์ (relationships) การทำนายเหตุการณ์ พร้อมทั้งได้จัดกระทำกับสื่อรูปธรรม (manipulating materials)

National Council of Teachers of Mathematics และ National Research Council สนับสนุนให้ยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลางในการจัดประสบการณ์การเรียนรู้ และเน้นแนวคิด Constructivist มาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

การจัดโครงการศึกษาและการวิจัย ครูได้นำแนวคิด Constructivist มาใช้ในการทดลองสอนที่ Shoreham Vading River (New York) School District และเสนอแนะกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

1. ส่งเสริมและยอมรับนักเรียนในการมีอิสระ การเป็นสมาชิกในกลุ่มและเป็นผู้นำ
2. เปิดโอกาสให้ใช้การกระทำมีปฏิสัมพันธ์กับสื่อรูปธรรม (physical materials)
3. การจัดการเรียนการสอนของบทเรียนควรยืดหยุ่นตามแนวความคิด และปฏิบัติการตอบสนองของผู้เรียน

4. ถามนักเรียนถึงความเห็นเกี่ยวกับมโนคติของนักเรียนก่อนมโนคติของครู
5. ส่งเสริมให้นักเรียนได้กล้าแสดงออกในการพูดและคิด กับครูและเพื่อน
6. กระตุ้นให้นักเรียนค้นหา คิด และตอบสนองด้วยตัวนักเรียนเอง
7. ส่งเสริมให้นักเรียนให้สำรวจค้นหาคำตอบจากคำถามของครูและฝึกให้นักเรียนได้ใช้

คำถามในการหาคำตอบอีกด้วย

8. หลังใช้คำถามควรหยุดและรอเวลาให้นักเรียนได้คิด
9. มีเวลาให้นักเรียนได้ค้นพบความสัมพันธ์และความคิดสร้างสรรค์
10. การออกแบบหลักสูตร เนื้อหาควรจะเป็นการเน้นและฝึกพื้นฐานการพัฒนามโนคติโดยใช้สถานการณ์ปัญหา

Confrey (1990) ได้เสนอแนะกิจกรรม โดยเน้นแนวคิดของ Constructivist มาใช้ในการเรียนการสอนอย่างมีประสิทธิภาพ ด้วยวิธีการดังต่อไปนี้

1. ส่งเสริมให้นักเรียนมีอิสระในการใช้ความคิด
2. สังเกตพัฒนาความก้าวหน้าของนักเรียน โดยครูเป็นผู้จัดบันทึกผลการเรียนของ

นักเรียนทุกราย

3. บันทึกความก้าวหน้าทางการเรียนของนักเรียนจากแบบฝึกหัด ผลงาน การแสดงความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียนการสอนในแต่ละครั้ง และแบบบันทึกการสังเกตอย่างไม่เป็นทางการเกี่ยวกับนักเรียนแต่ละคน

4. ศึกษาวิธีการแยกแยะปัญหาของนักเรียน จากการเขียนรายงานถึงวิธีการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละคน

5. ส่งเสริมการทำงานกลุ่มย่อยและมีการอภิปรายร่วมกัน
6. บอกจุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์การเรียนก่อนการสอนทุกครั้ง

แนวคิด Constructivist ที่นำมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ จะช่วยให้ครูทราบถึงความคิดของนักเรียนว่าคิดอย่างไร ความคิดนั้นจะเป็นความคิดที่ผิดหรือถูก ช่วยให้ครูเข้าใจถึงความคิดที่นักเรียนใช้และรู้วิธีการเรียนรู้ของนักเรียน จากการเขียนผลสะท้อนเกี่ยวกับการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรม และการแบ่งกลุ่มย่อยในการแก้ปัญหา (Hatfield, Edward, Bitter, 1991)

สรุปแนวคิดของ Constructivist ซึ่งเป็นแนวคิดที่มีความเชื่อว่า ความรู้ที่ดีที่สุดเกิดจากผู้เรียนได้สร้างความรู้ด้วยตัวของผู้เรียนเอง ดังนั้น ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ จึงเน้นให้นักเรียนเป็นผู้ที่มีบทบาทในการกระทำ ได้จัดกระทำกับสื่อรูปธรรมได้พูดอธิบายมโนคติด้วยตนเอง มีการอภิปรายในกลุ่มย่อย และครูมีบทบาทในการจัดสภาพสิ่งแวดล้อม พร้อมทั้งสังเกตศึกษาพัฒนาการความคิดหรือความเข้าใจจากการบันทึก การสัมภาษณ์หรือดูจากผลการทำงานของนักเรียน

2.6 หลักการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน สัปดาห์ ลอยฟ้า (2536)

ได้เสนอแนะแนวทาง ดังนี้

1. เนื้อหาเหมาะกับวัยและความสามารถของผู้เรียน
 2. เน้นการมีส่วนร่วมของผู้เรียน
 3. เน้นการแสดงความคิดเห็นและความคิดสร้างสรรค์
 4. การให้ข้อมูลย้อนกลับ
 5. เชื่อมโยงระหว่างเนื้อหา กับชีวิตประจำวัน
 6. ผู้เรียนทราบเป้าหมายของกิจกรรม
 7. เน้นการปฏิบัติจริง หรือประสบการณ์ในชีวิตประจำวันเป็นแนวทางการจัดกิจกรรม
- วัลลา อาริรัตน์ (2532) กล่าวว่า หลักการสอนคณิตศาสตร์ที่ควรคำนึงถึง มีดังนี้คือ

1. การสอนเนื้อหาใหม่ ครูควรคำนึงถึงความพร้อมของผู้เรียน ซึ่งประกอบด้วย
 - 1.1 ความพร้อมด้านวุฒิภาวะ คือความพร้อมของความรู้พื้นฐานของผู้เรียน
 - 1.2 ความพร้อมด้านเนื้อหา คือครูผู้สอนต้องทราบขอบข่ายเนื้อหาที่จะสอนโดยแบ่ง

เป็น 2 ลักษณะคือ การลำดับเนื้อหาโดยรวม กับ การลำดับเนื้อหาเฉพาะเรื่อง

1.2.1 การลำดับเนื้อหาโดยรวม เช่น ต้องสอนการจําแนก การจัดลำดับ การนับตัวเลข ค่าประจำหลัก การบวก การลบ การหาร เป็นต้น

1.2.2 การลำดับเนื้อหาเฉพาะเรื่อง เช่น การสอนบวกต้องเริ่มจาก

ลำดับที่ 1 ความหมายการบวก

ลำดับที่ 2 การบวกเบื้องต้นและคุณสมบัติการบวก

ลำดับที่ 3 การบวกเลข 1 หลักไม่มีตัวทด

ลำดับที่ 4 การบวกเลข 2 หลัก กับ 1 หลักไม่มีตัวทด

ลำดับที่ 5 การบวกเลข 2 หลัก กับ 2 หลักไม่มีตัวทด

ลำดับที่ 6 การบวกเลข 2 หลัก กับ 1 หลักมีตัวทด

2. การสอนคณิตศาสตร์เน้นความเข้าใจมากกว่าการจํา โดยเน้นการจัดประสบการณ์ที่มีความหมาย ในการสอนผู้เรียนต้องเข้าใจแนวคิดก่อนการฝึกทักษะ เพราะฉะนั้นการสอนคณิตศาสตร์ควรยึดหลักดังนี้

2.1 สอนเพื่อให้เกิดความซึมซาบ คือ ต้องเรียนตามลำดับขั้นเข้าใจทีละน้อย

2.2 การสอนเพื่อให้เกิดความรู้ถาวร เมื่อผู้เรียนเข้าใจควรฝึกให้คิดอย่างมีเหตุผล และถูกต้อง

2.3 การสอนเพื่อให้นำไปใช้ในสถานการณ์อื่นได้

3. ใช้วิธีอุปมาน ในการสรุปหลักการทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ไปใช้โดยวิธีอุปมาน

4. ควรจัดประสบการณ์การเรียนรู้แก่ผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนได้เห็นความหมายและหลักการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมี 3 ประการคือ

- 4.1 ประสบการณ์การเรียนรู้ที่เป็นรูปธรรม
- 4.2 ประสบการณ์การเรียนรู้ที่เป็นกึ่งรูปธรรม
- 4.3 ประสบการณ์การเรียนรู้ที่เป็นนามธรรม

5. สอนจากสภาพปัญหาจริงที่เด็กประสบอยู่เสมอในชีวิตประจำวัน นำสถานการณ์ต่าง ๆ มาแปลเป็นประโยคสัญลักษณ์ หรือประโยคคณิตศาสตร์ และฝึกให้ผู้เรียนคิดหาคำตอบ

6. ส่งเสริมการสอนโดยใช้กิจกรรม สื่อการสอน ควรใช้สื่อการสอนที่เป็นรูปธรรม อธิบายแนวคิดนามธรรมทางคณิตศาสตร์

7. จัดบทเรียนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

8. ครูควรใช้เทคนิคต่าง ๆ สร้างบรรยากาศที่ดีในการเรียนคณิตศาสตร์

ประยูร อาษานาม (2525) ได้นำเสนอหลักสำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาไว้ดังนี้

1. การกำหนดความมุ่งหมายของการเรียนการสอนที่เด่นชัด

การสอนและการเรียนเป็นกระบวนการที่สัมพันธ์กัน ดังนั้นครูจะต้องรู้ว่าสอนอะไร ครูต้องการจะให้นักเรียนเรียนรู้อะไร จะต้องทำอะไรบ้าง เมื่อทั้งสองฝ่ายทราบสิ่งที่ต้องเรียนรู้แล้ว ครูต้องวางแผนการสอน จัดสภาพการที่จะก่อให้เกิดการเรียนรู้และนักเรียนก็จะทำกิจกรรมอย่างมีจุดหมาย

2. การจัดกิจกรรมการเรียนหลาย ๆ วิธี และใช้วัสดุประกอบการสอนหลายๆ ชนิด

ในการเรียนเรื่องใดเรื่องหนึ่ง ครูต้องจัดกิจกรรมหลายๆ ประเภท เพราะว่ากิจกรรมแต่ละประเภทให้ความเข้าใจในเรื่องที่เรียนในระดับที่แตกต่างกัน นักเรียนแต่ละคนจะได้เรียนรู้จากกิจกรรมที่เหมาะสมกับระดับความสามารถของตนเอง ในทำนองเดียวกันอุปกรณ์การสอนก็ควรมีหลายชนิด และมีการจัดกิจกรรมหลายวิธี

3. การเรียนรู้จากการค้นพบ

กิจกรรมต่าง ๆ ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ควรเป็นสิ่งที่ช่วยให้นักเรียนได้ค้นพบมโนคติทางคณิตศาสตร์เอง ซึ่งครูเป็นผู้ชี้แนะและช่วยเหลือตั้งแต่เริ่มทำกิจกรรม หาช่องทางที่จะทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้เร็ว ตลอดจนการอธิบายและหาข้อสรุปร่วมกันในตอนท้ายของบทเรียน

4. การจัดกิจกรรมการเรียนที่มีระบบ

ครูต้องจัดกิจกรรมการเรียนให้มีระบบ โดยคำนึงถึงโครงสร้างของเนื้อหาเป็นสำคัญเพื่อความสะดวกในการเรียนการสอน และทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้เป็นอย่างดี

5. การเรียนรู้ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ ควรเริ่มต้นจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม จากทฤษฎีการเรียนรู้ของ เพียเจต์ กล่าวว่า การเรียนรู้ของเด็กจะพัฒนาจากความคิดที่ยังไม่มีวิวัฒนาการไปสู่ความคิดที่มีวิวัฒนาการ ดังนั้นเด็กควรจะพัฒนาจากความคิดที่ยังไม่มีวิวัฒนาการไปสู่ความคิดที่มีวิวัฒนาการ โดยเด็กควรจะได้เรียนจากสิ่งที่ย่างไปหาสิ่งที่ยาก จากสิ่งที่มองเห็นด้วยตาไปสู่สิ่งที่มองเห็นด้วยมโนภาพ

6. การฝึกหัดควรกระทำหลังจากที่นักเรียนเข้าใจหลักสูตรแล้ว

การฝึกหัดเป็นกิจกรรมที่ย้ำความเข้าใจ และเพื่อเป็นการเก็บรักษาความรู้ การทำแบบฝึกหัดจะไม่บรรลุผล ถ้าครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดหรือการบ้านโดยปราศจากความเข้าใจในสิ่งที่เรียนมาแล้ว ครูควรตรวจสอบและประเมินความเข้าใจของนักเรียนอย่างดียิ่งด้วย ก่อนนักเรียนทำแบบฝึกหัดต่าง ๆ

โรสธม บารุงสงฆ์ และสมหวัง ไตรตันวงศ์ (2520) กล่าวว่า วิธีสอนแนวใหม่ในระดับประถมศึกษา จำเป็นอย่างยิ่งที่จะสอนไปตามลำดับขั้น ซึ่งสรุปได้ดังนี้คือ

1. สอนจากปัญหาจริงที่เด็กประสบอยู่เสมอในชีวิตประจำวัน เพื่อให้สอดคล้องกันระหว่างบทเรียนกับปัญหารอบตัวเด็ก

2. ให้นักได้อภิปรายและแสดงความคิดเห็นในโจทย์ปัญหาต่าง ๆ แล้วแปลเป็นประโยคคณิตศาสตร์

3. ให้นักเรียนแสดงเหตุผลต่าง ๆ ก่อนจึงสรุปเป็นเกณฑ์หรือเรียกว่าวิธีอุปมาน (Inductive) พยายามให้ผู้เรียนศึกษาเองอย่างมีเหตุผล ก่อนที่จะสรุปเป็นกฎเกณฑ์ใด ๆ ขึ้นมา

4. ไม่จำกัดวิธีคิดคำนวณของเด็ก คณิตศาสตร์แต่ละข้ออาจมีวิธีคิดคำนวณได้หลายวิธี ครูควรใช้วิธีนี้และให้ผู้เรียนใช้วิธีที่รวดเร็ว และง่ายที่สุด

5. ให้นักเรียนได้รู้จักการตรวจคำตอบด้วยตนเอง ไม่ว่าคำตอบนั้นจะเป็นอย่างไร

6. หลังจากผู้เรียนเข้าใจดีแล้ว ต้องหาทางส่งเสริมให้นักเรียนนำเอาความรู้ และหลักเกณฑ์นั้นไปใช้ หรือเรียกว่าวิธีอุปมาน (Deductive)

อัญชลี แจ่มเจริญ และคณะ (2526) ได้สรุปหลักการสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาว่ามีสิ่งที่ควรถือเป็นแนวปฏิบัติคือ

1. ประสพการณ์ที่จัดให้ต้องต่อเนื่องกับประสบการณ์หรือความรู้เดิม

2. คำนึงการเรียนการสอนให้สอดคล้องและเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน ซึ่งแตกต่างกัน

3. มีการเตรียมความพร้อมทางคณิตศาสตร์ให้แก่เด็กเรียน เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้

4. จัดระบบการเรียนการสอนให้เป็นไปตามลำดับขั้น

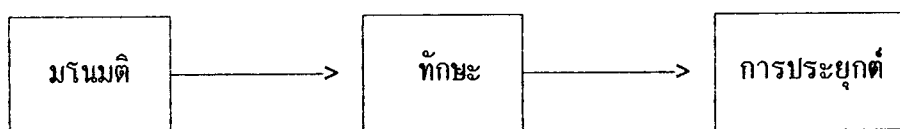
5. จัดให้มีการใช้ของจริง หรืออุปกรณ์ซึ่งมีลักษณะ เป็นรูปธรรมเข้าไปช่วยในการเรียน

การสอน

6. ส่งเสริมให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมร่วมกัน
7. ส่งเสริมให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์
8. การจัดให้มีการประเมินผลการเรียนการสอน

สุลัดดา ลอยฟ้า (2537) กล่าวถึงกระบวนการหรือหลักการที่แท้จริงทางคณิตศาสตร์ในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา ครูจะต้องตระหนักว่านักเรียนจะต้องได้รับการพัฒนาถึง 3 ส่วน คือ

1. มโนคติ
2. ทักษะ
3. การประยุกต์หรือ การแก้ปัญหา



นั่นคือการเรียนจะต้องเริ่มต้นที่ความเข้าใจมโนคติก่อน หลังจากนั้นจึงฝึกทักษะให้เกิดความชำนาญ แล้วจึงประยุกต์ความรู้เหล่านี้ไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ในชีวิตประจำวัน

2.6.1 การพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์

Richard Skemp (อ้างถึงใน สุลัดดา ลอยฟ้า, 2539) กล่าวถึงวิธีการการเรียนรู้ การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา มุ่งพัฒนาความรู้ความเข้าใจของนักเรียนใน 3 ด้านต่อไปนี้

- 1) ความรู้ความเข้าใจมโนคติคณิตศาสตร์ (Conceptual knowledge)
- 2) ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์ (Procedural knowledge)
- 3) ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์กับกรรมวิธีการคิดคำนวณและการกำหนดสัญลักษณ์

การพัฒนาความเข้าใจในทั้ง 3 ด้านดังกล่าว จะเน้นความเข้าใจเชิงสัมพันธ์ (Relational Understanding) กล่าวคือ เป็นการพัฒนาความเข้าใจอย่างมีความหมาย โดยเน้นการอธิบายเหตุผลประกอบในแต่ละมโนคติ และกรรมวิธีการคิดคำนวณ รวมทั้งสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างกรรมวิธีการคิดคำนวณและมโนคติทางคณิตศาสตร์ที่รองรับ

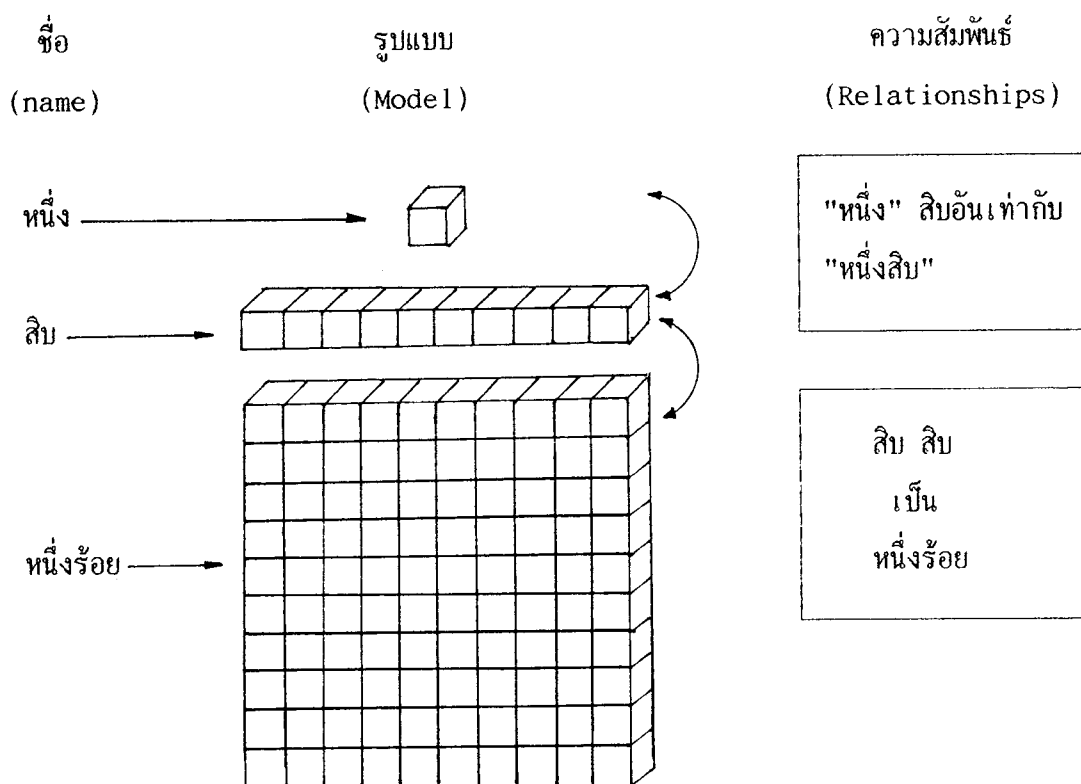
โดยสรุปความเข้าใจเชิงสัมพันธ์ก็เป็นความเข้าใจที่เน้นใน 3 ประเด็นต่อไปนี้

- 1) เน้นความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์ระหว่างมโนคติ
- 2) เน้นความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการพัฒนากรรมวิธีการคิดคำนวณอย่างมีความหมาย
- 3) เน้นความสามารถในการเชื่อมโยงระหว่างมโนคติและกรรมวิธีการคิดคำนวณ

2.6.1.1 ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติทางคณิตศาสตร์

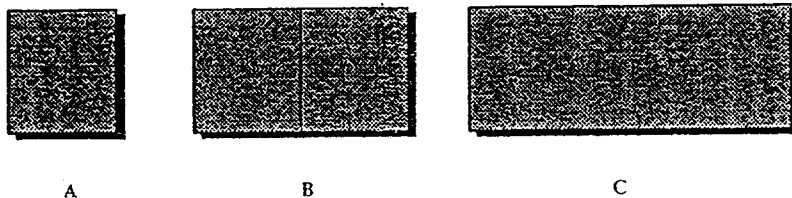
1) ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติคือความสัมพันธ์ ความรู้ - ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติทางคณิตศาสตร์คือ ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับ ความสัมพันธ์ซึ่ง ผนวกหรือเชื่อมโยงระหว่างมโนคติหรือแนวคิด กล่าวคือมโนคติทางคณิตศาสตร์คือความสัมพันธ์

พิจารณาจากรูปที่ 4 ถ้านักเรียนบอกว่า แท่งไม้ในรูปคือ "หนึ่งสิบ" และลูกบาศก์คือ "หนึ่งหน่วย" ไม่ได้หมายความว่านักเรียนคนนั้นเข้าใจในมโนคติของ "หนึ่งสิบ" ว่ามีค่าเท่ากับสิบ หน่วย เพราะนักเรียนอาจรู้เพียงว่าเป็นแท่งไม้ และให้ชื่อว่า "สิบ" เช่นเดียวกับที่เขารู้จักเก้าอี้ และให้ชื่อว่า "เก้าอี้" ความสัมพันธ์ระหว่างแท่งไม้กับลูกบาศก์ 10 ลูก คือ ความสัมพันธ์ระหว่าง วัตถุที่เป็นรูปธรรม ความสัมพันธ์ไม่ใช่แท่งไม้หรือลูกบาศก์ แต่เป็นความสัมพันธ์ที่ถูกสร้างขึ้นใน สมองของนักเรียน เมื่อความสัมพันธ์ดังกล่าวถูกสร้างขึ้นอย่างสมบูรณ์ วัตถุรูปธรรมดังกล่าวจะ ไม่จำเป็นอีกต่อไปสำหรับนักเรียนคนนั้น เหมือนดังเช่นที่เราเข้าใจมโนคติ "เหนือกว่า" โดยไม่ จำเป็นต้องมองเห็นวัตถุที่สัมพันธ์กันดังกล่าว



ภาพที่ 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างชื่อและสื่อ (material) ไม่ใช่อายุเดียวกัน

จากภาพที่ 5 รูป A คือสี่เหลี่ยมผืนผ้า แต่ถ้าเรากำหนดรูป B คือ "หนึ่ง" หรือ "ทั้งหมด" แล้วรูป A ก็คือ "ครึ่งหนึ่ง" มโนคติ "ครึ่งหนึ่ง" คือ ความสัมพันธ์ระหว่างรูป A กับรูป B ที่เราสร้างขึ้นมานี้ในใจเรา แต่ถ้าเราให้รูป C คือ "หนึ่ง" คือ "ทั้งหมด" แล้ว A จะเป็น "หนึ่งในสี่" ทั้งที่ A ก็คือรูปเดิม มโนคติ "ครึ่งหนึ่ง" "หนึ่งในสี่" ไม่ใช่รูป A แต่เป็นความสัมพันธ์ที่เราสร้างขึ้นมา รูปสี่เหลี่ยมในภาพช่วยให้ "มองเห็น" (สร้างขึ้นมานี้ในใจ) ความสัมพันธ์

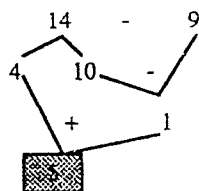


ภาพที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ที่แตกต่างระหว่าง 3 รูป

2) ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติเป็นความรู้ที่เชื่อมโยงกัน เมื่อความสัมพันธ์หรือมโนคติถูกสร้างขึ้น ความรู้หรือมโนคติเหล่านั้นจะสัมพันธ์กับมโนคติอื่นๆ ในความคิดของเราเสมอ เด็กก่อนวัยเรียนก่อนจะเข้าใจมโนคติเกี่ยวกับจำนวน เขาจะเริ่มเข้าใจมโนคติ "หนึ่ง" และ "มากกว่า" มาก่อนมโนคติเกี่ยวกับจำนวนอื่นๆ มโนคติเกี่ยวกับจำนวนอื่นจะถูกสร้างขึ้นบนพื้นฐานของ "หนึ่ง" "มากกว่า" และการนับ เช่น เมื่อนักเรียนสร้างมโนคติ "เจ็ด" ขึ้นมาเขาจะเชื่อมโยงเข้ากับมโนคติ "มากกว่า" ดังเช่น "เจ็ดมากกว่าสาม" และสัมพันธ์กับมโนคติอื่นที่ได้เรียนรู้แล้ว เช่น "เจ็ดมากกว่าหกอยู่หนึ่ง" "เจ็ดน้อยกว่าแปดอยู่หนึ่ง" หลังจากนั้นความเข้าใจในมโนคติ "เจ็ด" ของนักเรียนจะสมบูรณ์

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่า มโนคติทางคณิตศาสตร์เป็นมโนคติที่เชื่อมโยงกัน

- การบวกและการลบเบื้องต้นจะสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน และสัมพันธ์กับมโนคติเกี่ยวกับจำนวนความเข้าใจเกี่ยวกับ $5+9 = 14$ จะเป็นประโยชน์ต่อความเข้าใจ $14-9 = 5$ จะเป็นประโยชน์มากขึ้นถ้าเชื่อมโยงความเข้าใจนี้กับมโนคติที่ว่า "14 คือ 10 กับ 4" ดังเช่น



- เรขาคณิต สูตรเกี่ยวกับการหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า สี่เหลี่ยมด้านขนาน สี่เหลี่ยมคางหมู และสามเหลี่ยม จะสัมพันธ์เชื่อมโยงกันและอยู่บนพื้นฐานความคิดที่ว่า จะหาพื้นที่ได้โดยการหาผลคูณระหว่างความยาวของฐานกับความสูงและเชื่อมโยงกับความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ 1 ตารางหน่วยและมโนคติเกี่ยวกับการคูณ

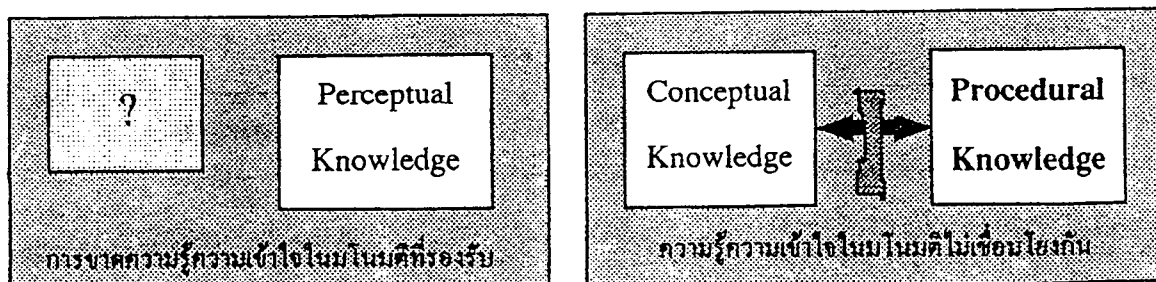
2.6.1.2 ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์
 ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และกรรมวิธีหรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นความรู้เกี่ยวกับระบบสัญลักษณ์ที่ใช้แทนแนวความคิด หรือมโนคติทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งความรู้เกี่ยวกับกฎเกณฑ์และขั้นตอนหรือกรรมวิธีการคิดคำนวณหรือการปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์

ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์ หมายถึง ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ และสามารถอ่านได้ถูกต้อง เช่น $(9-5) \times 2 = 8$ โดยเน้นความรู้ความเข้าใจในการกำหนดสัญลักษณ์แทนมโนคติหรือความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์

ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์ เป็นการกำหนดขั้นตอนการปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ เช่น การบวกเศษส่วนที่มีส่วนเท่ากัน โดยการบวกจำนวนที่เป็นเศษและส่วนคงเดิม ถ้าเศษส่วนไม่เท่ากันจะหาผลบวกได้โดยหา ค.ร.น. ของจำนวนส่วน แล้วทำส่วนให้เท่ากับ ค.ร.น. จากนั้นเอาเศษบวกกันและส่วนคงเดิม เป็นต้น

2.6.1.3 ความเข้าใจเกี่ยวกับการเชื่อมโยงระหว่างมโนคติกับกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงระหว่างมโนคติกับกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์ หมายถึงกฎหรือกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์ที่อยู่บนพื้นฐานของความเข้าใจในมโนคติ และเหตุผลที่รองรับการกระทำในแต่ละขั้นตอนของกรรมวิธีการคิดคำนวณ ถ้าปราศจากความเข้าใจในมโนคติที่รองรับของการกระทำในแต่ละขั้นตอน ความเข้าใจเกี่ยวกับกรรมวิธีคิดคำนวณจะเป็นแบบนกแก้วนกขุนทอง (rote learning) ถ้ากฎหรือกรรมวิธีที่พัฒนาขึ้นอยู่บนพื้นฐานของความเข้าใจในมโนคติที่รองรับ เราสามารถอธิบายการกระทำในแต่ละขั้นว่า ทำอย่างไรและทำไมจึงทำเช่นนั้น

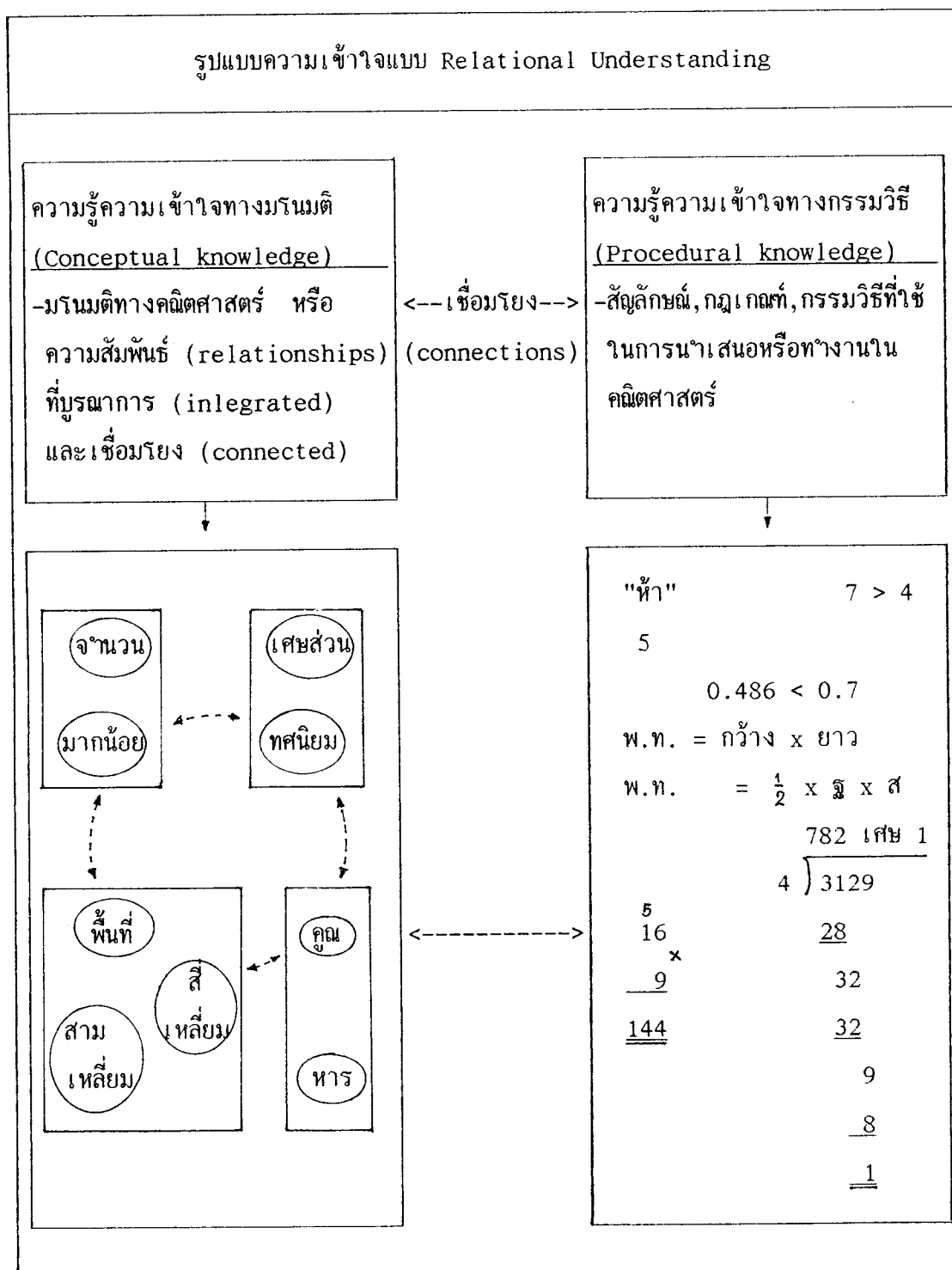
การที่นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับวิธีทางคณิตศาสตร์ โดยปราศจากการเชื่อมโยงกับความรู้ความเข้าใจในมโนคติที่รองรับกรรมวิธีดังกล่าว ความเข้าใจดังกล่าวเราเรียกว่า Instrumental Understanding รูปที่ 6 แสดงถึงการเกิดความรู้ความเข้าใจประเภท Instrumental Understanding ใน 2 สถานการณ์



รูปที่ 6 แสดงการเกิด Instrumental Understanding

รูปแบบของความเข้าใจแบบ Relational Understanding เป็นรูปแบบของความเข้าใจที่มีลักษณะ

- 1) การบูรณาการความรู้ทางมโนคติอย่างดี
- 2) พัฒนาความรู้ทางกรรมวิธีอย่างดี
- 3) การเชื่อมโยงที่พัฒนาระหว่างมโนคติและกรรมวิธีอย่างชัดเจน



แผนภาพที่ 7 แสดงถึงความเข้าใจที่สัมพันธ์เป็นเหตุเป็นผลกัน

ข้อดีของความเข้าใจเชิงสัมพันธ์

การสอนที่เน้นการพัฒนาความรู้ความเข้าใจของนักเรียนประเภทความเข้าใจเชิงสัมพันธ์ ผู้สอนจะต้องใช้เวลาและความพยายาม การพัฒนามโนคติต้องอาศัยเวลาและการจัดสิ่งแวดล้อมเชิงรูปธรรมที่เอื้อต่อการสร้างความรู้ความเข้าใจด้วยตนเองของนักเรียน แต่อย่างไรก็ตามมีเหตุผลหรือข้อดีหลายประการที่ชี้ให้เห็นว่าความพยายามและเวลาที่ต้องเสียไป เป็นสิ่งที่คุ้มค่าในการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา ดังนี้

1. ความเข้าใจเชิงสัมพันธ์เป็นการเสริมแรงภายใน

โดยทั่วไปนักเรียนจะสนุกสนานกับการได้เรียนเพิ่มเติม หรือสัมพันธ์ความรู้หรือแนวคิดใหม่กับความรู้ที่มีอยู่แล้ว สำหรับนักเรียนที่เรียนแบบท่องจำเพื่อการสอบหรือเพื่อให้พ่อแม่หรือครูพอใจ มักจะพบว่า การเรียนไม่ใช่กิจกรรมที่สนุกหรือน่าสนใจ การเสริมแรงภายนอกหรือรางวัลจะมีประสิทธิภาพเฉพาะช่วงเวลาอันสั้นเท่านั้น แต่ไม่ได้ช่วยให้นักเรียนรักหรือชอบในวิชาที่เขาเรียน แต่ถ้านักเรียนเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย สัมพันธ์กับมโนคติที่เราเรียนรู้แล้ว กับมโนคติที่เราต้องเรียนรู้ใหม่ มักจะทำให้เรารู้สึกภูมิใจและทำให้สนุกกับบทเรียนไปในที่สุด

2. ทำให้จดจำเนื้อหาสาระได้ง่ายขึ้น

มีหลักฐานที่ชัดเจนที่สนับสนุนดังกล่าวกว่าว่า "รูปแบบที่มีความหมายจะทำให้ให้นักเรียนจดจำความรู้ที่เรียนมาได้ดีกว่ารูปแบบที่ไม่มีหมาย" "มีความหมาย" หมายถึง การเชื่อมโยงความรู้หรือมโนคติอย่างมีระบบมีโครงสร้าง เมื่อไรก็ตามที่เราเห็นการเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างมโนคติใหม่กับความรู้ที่มีอยู่ได้มากกว่าจะทำให้เราระลึกหรือจดจำเนื้อหาหรือความรู้ที่กำลังเรียนได้มากกว่าความรู้ที่ไม่มีโครงสร้างหรือไม่มีระบบ มักทำให้ยากที่จะจำและลืมง่าย จะสังเกตได้ว่าถ้านักเรียนเรียนคณิตศาสตร์โดยเน้นความเข้าใจเชิงสัมพันธ์ครูจะใช้เวลาทบทวนหรือสอนใหม่น้อยมาก

3. ช่วยแก่การเรียนรู้หรือเข้าใจมโนคติใหม่หรือกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์ใหม่

ถ้านักเรียนเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เรียนรู้แล้วอย่างชัดเจน จะทำให้นักเรียนเรียนรู้มโนคติใหม่ได้ง่ายขึ้น ความเข้าใจในคำประจักษ์หลักจะช่วยพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติของทศนิยม ถ้านักเรียนเข้าใจมโนคติของจำนวนได้ดีกว่า จะทำให้นักเรียนคนนั้นหาผลลัพธ์ของการกระทำบวกและลบเบื้องต้นได้ดีกว่า เนื้อหาคณิตศาสตร์เป็นเนื้อหาที่เป็นระบบและเป็นเหตุผลเชื่อมโยงซึ่งกันและกัน ความเข้าใจเนื้อหาที่เกี่ยวข้องที่เรียนแล้ว จะทำให้เข้าใจเนื้อหาใหม่หรือแนวคิดที่สัมพันธ์ได้ง่ายขึ้น ถ้าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ปราศจากการเชื่อมโยงมโนคติและกรรมวิธีหรือสัญลักษณ์ที่แทนมโนติดังกล่าวแล้ว นักเรียนจะเรียนอย่างท่องจำ และยากแก่การเข้าใจในมโนคติหรือเนื้อหาใหม่

4. ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหา

การแก้ปัญหาต้องใช้ความรู้ทั้งสองประเภทคือ มโนคติและกรรมวิธีการคิดคำนวณ ถ้าสอนนักเรียนโดยไม่ได้เน้นความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ความเข้าใจทั้งสองประเภท จะทำให้นักเรียนไม่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้

5. นำไปสู่การเรียนรู้ด้วยตนเอง

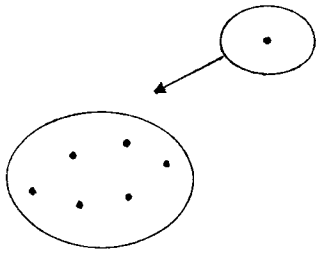
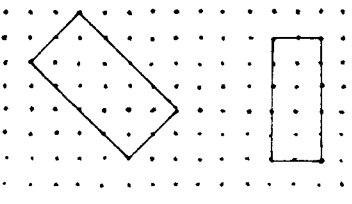
Skemp (อ้างถึงใน สุลัดดา ลอยฟ้า, 2539) กล่าวว่า ถ้าความรู้ที่ได้รับหรือกำลังเรียนรู้ทำให้ผู้เรียนเกิดความสุข มีความสนุกในการเรียน จะทำให้ผู้เรียนอยากที่จะเรียนรู้หรือค้นหาความรู้นั้นด้วยตนเอง

6. ช่วยป้องกันความวิตกกังวลหรือกลัวในวิชาคณิตศาสตร์

ความวิตกกังวลในคณิตศาสตร์เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมการแสดงออกถึงความกลัวหรือการหลีกเลี่ยง และนำไปสู่ความเชื่อที่ว่า ตัวเองไม่สามารถเรียนคณิตศาสตร์ได้ แต่ถ้านักเรียนเรียนคณิตศาสตร์โดยเน้นความเข้าใจเชิงสัมพันธ์ ผลก็คือ ความรู้ที่ได้รับจะไม่ซับซ้อนแปลกใหม่หรือไม่คุ้นเคย ความเข้าใจเชิงสัมพันธ์จะทำให้นักเรียนรู้สึกว่าการเรียนคณิตศาสตร์ไม่ใช่สิ่งลึกลับ น่ากลัว หรือมีเพียงคนเก่งเท่านั้นที่เรียนได้ ในทางตรงข้ามความเข้าใจเชิงสัมพันธ์จะสร้างความมั่นใจให้เกิดขึ้นในตัวของผู้เรียน

การพัฒนาวิธีทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยหลักการต่อไปนี้

1. ใช้รูปแบบ (model) หมายถึง วัตถุรูปธรรมหรือรูปภาพที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจถึงวิธีนั้น ๆ และจนกระทั่งมีวิธีทางคณิตศาสตร์เกิดความสัมพันธ์กัน ตัวอย่างเช่น

 การนับวัตถุเป็นรูปแบบของจำนวนที่คุ้นเคย และสัมพันธ์กับความคิด <u>การเพิ่มอีก</u>	 สี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกใช้รูปแบบเป็นตารางจุด ซึ่งเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ของความยาวและระยะ
---	---

2. สนับสนุนการสะท้อนความคิด (reflective thought) ในการดำเนินการเรียนในสภาพบรรยากาศของการแก้ปัญหา และส่งเสริมให้นักเรียนมีความคิดเป็นเหตุเป็นผลด้วยตนเองโดย

2.1 จัดบรรยากาศการแก้ปัญหา (use a problem - solving atmosphere)

นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมในการทดสอบ ท้าทาย อภิปราย อธิบาย แสดง นำเสนอ การให้เหตุผล การพิสูจน์ (disprove) การคาดเดา (conjecture) และการพัฒนาความคิด การตัดสินใจ การพยากรณ์ การให้เหตุผล (argue logically) และคาดคะเนคำตอบ (make mistakes) ในสภาพแวดล้อมนักเรียนเช่นนี้ไม่เพียงแต่สร้างสรรค์ความสัมพันธ์ แต่กลายเป็ นักคิดคณิตศาสตร์ (mathematical thinker) และนักแก้ปัญหา (problem solver)

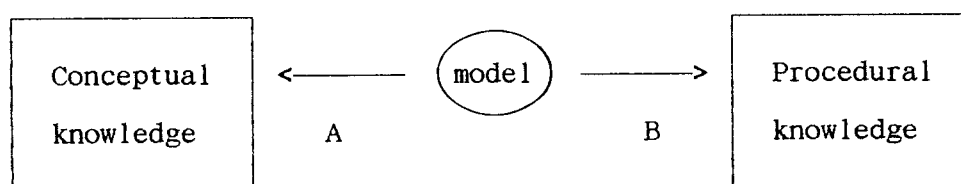
2.2 การส่งเสริมการให้เหตุผลด้วยตนเอง (Encourage self-Validatin)

ครูหรือตำราไม่ควรเป็นผู้ให้ความคิดมาตรฐาน หรือกระบวนการตัดสินใจที่ถูกต้อง ความคิดควรจะถูกแนะนำโดยนักเรียนหรือจากการประเมินผลของกลุ่ม

3. พัฒนาความรู้ความเข้าใจทางมโนทัศน์ก่อนความรู้ความเข้าใจทางกรรมวิธี (Develop Conceptual knowledge before procedural knowledge) นักเรียนควรได้เรียนรู้สัญลักษณ์โดยการจำและนำเสนอทางความคิดนั้น หลังจากมีประสบการณ์ การอธิบาย และความเข้าใจ การเริ่มต้นด้วยกฎเกณฑ์ทางสัญลักษณ์ และกรรมวิธี และคาดหวังว่านักเรียนจะเกี่ยวพันความหมายกับกฎเกณฑ์ ซึ่งเป็นเพียงความคิดปรารถนาและยังทำให้เกิดความเสียหายแก่นักเรียน การเขียนกรรมวิธีควรจะเกิดจากวิธีการของการกระทำหรือกระบวนการบันทึกอย่างมีความหมาย และความคิด

4. เน้นการใช้ภาษา (Emphasis the use of language) เมื่อเด็กหรือผู้ใหญ่พูด พวกเขาใช้ความคิดจากความรู้สึก ในการอธิบายประสบการณ์ใหม่ การพูดช่วยเชื่อมโยงสัมพันธ์ประสบการณ์ใหม่กับความคิดที่มีอยู่

5. ใช้รูปแบบ (model) เป็นตัวเชื่อมระหว่างมโนทัศน์กับสัญลักษณ์



A : การสะท้อนความคิดกับรูปแบบ (model) ช่วยนักเรียนสร้างความสัมพันธ์

B : รูปแบบ (model) สามารถเป็นตัวเชื่อมโดยตรงกับกรรมวิธีและสัญลักษณ์

6. หลีกเลี่ยง premature symbolism

หลักการจัดกิจกรรมเพื่อพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

1. เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง (Child-oriented) มากกว่าเน้นเนื้อหาเป็นศูนย์กลาง (content-oriented) โดย

- ฟังความคิดเห็นของนักเรียน
- ตระหนักว่านักเรียนไม่ใช่ครู

2. เน้น Cognitive-constructivist view ของการเรียนรู้ ซึ่งตระหนักถึงความสำคัญของ

- การจัดกระทำกับรูปแบบ (manipulate models)
- ความรู้เดิมเป็นสื่อให้เข้าใจความรู้ใหม่

- กระตุ้นให้นักเรียนสามารถพูดหรืออธิบายมโนคติ และความสัมพันธ์ด้วยตนเอง
 - การเชื่อมโยงระหว่างมโนคติ
3. เน้นการเชื่อมโยงระหว่างมโนคติกับสัญลักษณ์
- ใช้การจัดกระทำกับรูปแบบ (manipulative models)
 - เน้นการใช้ภาษา (oral language)
 - พัฒนาความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนติก่อนแนะนำสัญลักษณ์
 - หลีกเลี่ยงการฝึกแบบท่องจำ (rote learning)

Trojack (อ้างถึงใน บุญทัน อยู่ชมบุญ, 2529) กล่าวถึงการทำให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอด และนำหลักการไปใช้ได้ การเรียนการสอนควรจะได้ดำเนินการเป็นขั้น ๆ คือ เริ่มด้วยการให้เด็กได้สังเกต ได้สัมผัส และลงมือจัดกระทำในสิ่งที่ต้องการเรียนรู้ด้วยตนเอง เด็กก็จะเกิดการรับรู้ และเกิดความคิดรวบยอดจากสิ่งที่ได้ลงมือกระทำและสามารถถ่ายทอดหลักการที่ได้จากการเรียนรู้ไปใช้

สัจจดา ลอยฟ้า (2536) ได้เสนอแนวทางการจัดกิจกรรมเพื่อพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. ส่งเสริมให้นักเรียนสำรวจคิดค้นหาคำตอบ หน้าที่ของครูคือ
 - ชี้แนะแนวทาง อำนวยความสะดวก
 - สนับสนุนให้นักเรียนกล้าคิด กล้าเล่น
 - รับฟังและยอมรับความคิดของนักเรียน
2. เน้นการจัดกระทำกับสื่อที่เป็นรูปธรรม
3. เน้นวิธีการที่หลากหลายในการหาข้อสรุป
4. เน้นให้นักเรียนสร้างผลงานด้วยตนเอง เพื่อแสดงว่าเข้าใจมโนคติที่กำลังเรียนรู้

สรุปการจัดกิจกรรมเพื่อพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์ มโนคติเป็นความรู้ที่นักเรียนจะต้องเกิดขึ้นในตัวนักเรียนเองก่อนเป็นขั้นแรก ต้องเน้นให้นักเรียนลงมือจัดกระทำกับสื่อรูปธรรม เพื่อเชื่อมโยงให้นักเรียนเกิดแนวคิดและเข้าใจคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง พร้อมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนได้พูดหรืออธิบายมโนคติความสัมพันธ์ด้วยตนเอง ซึ่งจะเป็นการเชื่อมโยงให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้านความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับ กรรมวิธี วิธีการ สัญลักษณ์ (Procedural Knowledge)

2.6.2 การพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์

ในการสอนคณิตศาสตร์ เมื่อผู้เรียนมีความรู้ ความเข้าใจในเรื่องนั้นแล้ว สิ่งสำคัญต่อไปที่ครูต้องกระทำคือ การจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้ฝึกฝน เพื่อให้เกิดความชำนาญ คล่องแคล่วถูกต้องแม่นยำ และรวดเร็ว หรือที่เรียกว่า การฝึกฝนเพื่อให้เกิดทักษะ การที่ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจโดยไม่มีทักษะการคิดคำนวณ เมื่อนักเรียนแก้โจทย์ปัญหา หรือทำแบบฝึกหัด

นักเรียนจะทำได้ช้าและขาดความแม่นยำ การสอนให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจรมติของเรื่องที่สอนนั้นไม่เป็นการเพียงพอที่จะทำให้เด็กเกิดความสามารถที่จะคิดคำนวณหรือทำโจทย์ปัญหาในเรื่องนั้นๆ ได้อย่างชำนาญ ครูจำเป็นต้องกระตุ้นและสร้างแรงจูงใจให้นักเรียนฝึกปฏิบัติในเรื่องที่เข้าใจแล้วด้วยเทคนิควิธีต่างๆ จึงจะสามารถพัฒนาความรู้ ความเข้าใจ เป็นทักษะที่ชำนาญได้ ดังนั้น กิจกรรมการสอนเพื่อพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องให้ผู้เรียนฝึกปฏิบัติด้วยตนเองซึ่งได้แก่ การทำแบบฝึกหัด การเล่นเกมเชิงคณิตศาสตร์ การวาดรูป การพับกระดาษเป็นรูปทรงเรขาคณิต เป็นต้น สุลัดดา ลอยฟ้า (2536) ได้กล่าวถึงจุดประสงค์ของการพัฒนาทักษะดังนี้คือ

- (1) เพื่อให้มีความคงทนในการจำ (Retention) การฝึกจะช่วยให้อาณาเขตหลักการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการได้เป็นอย่างดี สามารถนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ และฝึกการถ่ายโยงการเรียนรู้
- (2) เพื่อให้มีความถูกต้องแม่นยำ (Accuracy) ในการใช้อาณาเขตหลักการทางคณิตศาสตร์ และวิธีการคิดคำนวณ
- (3) สร้างความเชื่อมั่นในการคิดคำนวณ (Confidence) ถ้านักเรียนประสบความสำเร็จในการคิดคำนวณหาคำตอบได้รวดเร็ว และถูกต้องย่อมมีช่วยให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชานี้และอยากมีส่วนร่วมในกิจกรรม
- (4) เป็นพื้นฐานในการพัฒนาประสิทธิภาพในการคิดคำนวณ (Efficiency) เช่น เมื่อหาวิธีแก้ปัญหาได้แล้ว รู้จักนำวิธีลัดมาใช้ในการคิดคำนวณ อันจะทำให้คิดได้เร็ว และถูกต้อง การฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์นั้นควรได้รับการฝึกหัด หรือปฏิบัติบ่อย ๆ จนสามารถทำสิ่งนั้นด้วยความชำนาญ การฝึกทักษะอย่างสม่ำเสมอหลังจากนักเรียนเข้าใจความคิดรวบยอดแล้วจะทำให้นักเรียนเข้าใจมากกว่าการจดจำ และก่อให้เกิดความสามารถการแก้ปัญหาต่อไป (วัลลภา อาริรัตน์, 2532)

สุลัดดา ลอยฟ้า (2536) กล่าวว่าทักษะคณิตศาสตร์ ในระดับประถมศึกษาที่สำคัญมีดังนี้คือ

- (1) ทักษะการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาคือกระบวนการของการประยุกต์ความรู้ที่มีอยู่ไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ การแก้ปัญหามาจากโจทย์ปัญหาในแบบเรียนก็เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของการแก้ปัญหา แต่นักเรียนควรมีประสบการณ์นอกเหนือจากแบบเรียนด้วยเทคนิคการแก้ปัญหาก็จะเกี่ยวข้องกับการตั้งคำถาม วิเคราะห์สถานการณ์ การแปลผล เสนอผล และการใช้วิธีลองผิดลองถูก
- (2) ทักษะการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวัน จะเกี่ยวข้องกับกิจกรรมการคิดคำนวณ นักเรียนจะต้องสามารถเชื่อมโยงสถานการณ์ในชีวิตประจำวันมาแปลผลในรูปแบบประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ หาผลลัพธ์ แล้วตีความผลลัพธ์ไปสู่สถานการณ์เดิม

(3) ทักษะในการพิจารณาผลลัพธ์ที่สมเหตุสมผล การหาผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ บางครั้งอาจผิดพลาดได้ นักเรียนต้องเรียนรู้ถึงการตรวจสอบผลลัพธ์และเลือกผลลัพธ์ที่สมเหตุสมผลสอดคล้องกับปัญหา

(4) ทักษะการคาดคะเนและการกะประมาณ นักเรียนจะต้องมีทักษะในการกะประมาณและคาดคะเน เพื่อให้เกิดความรวดเร็วในการคิดหาคำตอบ

(5) ทักษะการคำนวณ นักเรียนต้องมีทักษะพื้นฐานของการคำนวณที่เกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนเต็ม เศษส่วน และทศนิยม เพื่อเป็นพื้นฐานการคิดคำนวณขั้นสูงต่อไป

(6) ทักษะทางเรขาคณิต นักเรียนจะต้องเรียนรู้ มโนคติทางเรขาคณิต เช่น คุณสมบัติของรูปเรขาคณิต เส้น มุม จุด เส้นขนาน ซึ่งเป็นส่วนต่างๆ ของรูปเรขาคณิต เพื่อเป็นพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด และการแก้ปัญหา

(7) ทักษะการวัด นักเรียนควรมีความสามารถในการวัดระยะทาง น้ำหนัก เวลา อุณหภูมิ มุม ตลอดจนการรู้จักเลือกใช้เครื่องมือให้เหมาะสม รวมทั้งการคำนวณหาพื้นที่และปริมาตร ซึ่งใช้ข้อมูลจากการวัด

(8) ทักษะเกี่ยวกับการอ่าน การตีความ การสร้างตารางแผนภูมิและกราฟ นักเรียนควรมีทักษะในการอ่าน และสรุปความ จากตาราง แผนที่ แผนผัง แผนภูมิ และกราฟ ตลอดจนสามารถนำข้อมูลมาจัดรูปแบบเพื่อนำเสนอต่อผู้อื่นในรูปของตาราง แผนภูมิหรือกราฟได้

(9) ทักษะการทํานาย นักเรียนควรจะรู้การนำข้อมูลทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการทํานายความน่าจะเป็นอนาคต

(10) มีความรู้ในเรื่องคอมพิวเตอร์ ปัจจุบันคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทในสังคมมากขึ้น ฉะนั้น เพื่อเป็นการเตรียมนักเรียนให้พร้อมที่จะให้ก้าวหน้าทันกับเทคโนโลยีสมัยใหม่

ทักษะต่างๆ ดังกล่าวนี เป็นทักษะเบื้องต้นที่นักเรียนระดับประถมศึกษา ควรจะมีเพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูง และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันต่อไป เกี่ยวกับเรื่องนี้ (Johnson and Rising อ้างถึงใน สุลัดดา ลอยฟ้า, 2524) ได้เสนอแนะหลักการเบื้องต้นในการฝึกทักษะเพื่อให้การฝึกทักษะมีความหมายและน่าสนใจ ดังนี้

(1) ผู้เรียนต้องตระหนักถึงประโยชน์ของการฝึกทักษะ และรู้ว่าถ้าขาดการฝึกทักษะแล้ว ย่อมเกิดผลเสียต่อผู้เรียนเอง

(2) การฝึกควรให้ผู้เรียนได้คิดไปพร้อมกับการฝึก ควรเป็นแบบฝึกหัดที่มีความหลากหลายของปัญหาเพื่อให้ผู้เรียนได้คิดแก้ปัญหา มากกว่าเป็นการทำตามตัวอย่างหรือเป็นการทำซ้ำ

(3) การฝึกทักษะควรกระทำหลังจากผู้เรียนเข้าใจ มโนคติด้วยเพื่อให้ผู้เรียนได้นำความรู้ ความเข้าใจมาใช้ในการฝึกทักษะ

(4) การฝึกทักษะจะต้องเป็นไปอย่างถูกต้อง โดยที่ผู้สอนจะต้องเตรียมคำตอบที่ถูกต้อง เพื่อให้นักเรียนสามารถตรวจสอบคำตอบได้

(5) นักเรียนแต่ละคนมีความแตกต่างกัน ฉะนั้น การฝึกทักษะ ควรกระทำเป็นรายบุคคล เพราะบางครั้งเด็กเก่งต้องการแบบฝึกหัดที่ยากขึ้น ขณะเดียวกันเด็กอ่อนก็ต้องการแบบฝึกหัดที่ง่ายกว่า

(6) การทบทวนแบบฝึกหัด เพื่อฝึกทักษะ ควรใช้เวลาพอสมควร ถ้านานเกินไปอาจทำให้นักเรียนเกิดความเบื่อหน่ายได้ ควรเป็นเฉพาะเรื่องที่ต้องการใช้ประโยชน์จริงๆ

(7) แบบฝึกหัดที่ใช้ในการฝึกทักษะ ควรเป็นแบบฝึกหัดที่นักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้ไปใช้ได้จริงๆ

(8) การฝึกควรเน้นหลักการ หรือกฎเกณฑ์ทั่วไปมากกว่าวิธีลัด เพื่อหลีกเลี่ยงการจำวิธีทำ

(9) นักเรียนควรได้รับความรู้เกี่ยวกับการฝึกทักษะ เช่น นักเรียนควรรู้ว่าฝึกอะไร จุดประสงค์อย่างไร

(10) กิจกรรมในการฝึกทักษะ ควรมีหลายรูปแบบ เช่น เกมการแข่งขันต่างๆ ปริศนาการคิดเลขเร็ว แบบฝึกหัดปากเปล่า หรือเลขคิดในใจ

(11) การฝึกหัดจะมีประสิทธิภาพ ถ้าบอกให้ผู้เรียนทราบความก้าวหน้าของตนเอง รู้เกณฑ์ของแบบฝึกหัด

(12) ไม่ควรใช้การฝึกทักษะเป็นการทำโทษผู้เรียน จะทำให้ผู้เรียนเกิดทัศนคติไม่ดีต่อการเรียนและการฝึกทักษะ

สุลัดดา ลอยฟ้า (2536) ได้เสนอแนะในการเลือกใช้กิจกรรมพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ ดังนี้คือ

(1) ควรเลือกกิจกรรมตามความต้องการของนักเรียน เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้เกี่ยวกับเรื่องที่ครูสอนไปแล้ว

(2) ควรเลือกใช้กิจกรรมเสริมทักษะให้เหมาะสมกับเวลา นั่นคือ ครูควรใช้หลังจากที่ครูได้สอนบทเรียน หลักการ หรือแนวคิดเรื่องนั้นไปแล้ว เพื่อฝึกให้นักเรียนมีทักษะและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้หรือเพื่อเป็นการทบทวน

(3) เลือกใช้กิจกรรมที่นักเรียนทุกคนได้มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมนั้น

(4) ในการวางแผนและจัดกิจกรรม ครูควรระมัดระวังมิให้นักเรียนสนุกสนานตื่นเต้น มากจนเกินไปจนลืมถึงจุดประสงค์ที่สำคัญของการทำกิจกรรมนั้นก็คือ เพื่อฝึกให้นักเรียนเกิดทักษะในเรื่องใดเรื่องหนึ่ง

(5) เมื่อครูได้เลือกใช้กิจกรรมเสริมทักษะใดๆ ก็ตาม ครูควรเน้นให้นักเรียนทราบถึงสิ่งที่นักเรียนควรจะได้รับจากการทำกิจกรรมนั้นๆ โดยครูอาจจัดกิจกรรมอื่น ตามมาภายหลัง เช่น การอภิปราย การอ่านเพิ่มเติม หรือการทดสอบ

- (6) ทักษะที่ฝึกควรเป็นวิธีการที่หลากหลายในการคิดคำนวณ
- (7) เน้นวิธีการที่หลากหลายในการฝึก
- (8) ส่งเสริมการคิดไปพร้อมกับการฝึก
- (9) เกมที่ใช้ในการฝึก เน้นความคล่องของการคิด
- (10) ส่งเสริมการผลิต หรือการสร้างผลงานด้วยตนเอง

สรุป การจัดกิจกรรมเพื่อพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์นั้น ครูผู้สอนควรกระทำหลังจากที่ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในแนวคิดแล้วการฝึกทักษะนั้นจึงจะได้ประโยชน์สูงสุด ซึ่งจะมีผลต่อเนื่องไปถึงการนำไปใช้ในการแก้ปัญหาอีกด้วย การจัดกิจกรรมควรเป็นไปตามความต้องการของผู้เรียนและสอดคล้องกับเนื้อหาที่เรียนไปแล้ว อดยใช้เวลาในการจัดกิจกรรม การฝึกทักษะไม่นานจนเกินไปเพราะจะทำให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่าย กิจกรรมที่จัดขึ้นควรให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมทุกคน มีวิธีการคิดคำนวณหลากหลาย และที่สำคัญคือ การฝึกทักษะควรเน้นหลักเกณฑ์หรือกฎเกณฑ์ทั่วไป มากกว่าจะเน้นวิธีลัด เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงการจำวิธีทำของผู้เรียน

2.6.3 การพัฒนาการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

NCTM : National Council of Teachers of Mathematics (1989) กำหนดว่าคณิตศาสตร์ คือการแก้ปัญหา (Mathematics as problem solving) ในระดับชั้นอนุบาลถึงเกรด 4 การเรียนคณิตศาสตร์เน้นการแก้ปัญหา เพื่อให้นักเรียนสามารถ

- 1) ใช้วิธีการแก้ปัญหา (problem-solving) เพื่อสืบเสาะ และทำความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์
- 2) กำหนดปัญหา (formulate problem) จากสถานการณ์คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน

- 3) พัฒนาและใช้ยุทธศาสตร์ เพื่อแก้ปัญหอย่างหลากหลาย
- 4) ตรวจสอบและตีความไปสู่สถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ในครั้งแรกได้
- 5) มีความมั่นใจในการใช้คณิตศาสตร์แก้ปัญหาอย่างมีความหมาย

การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ก็คือการประยุกต์ความรู้หลักการหรือสมบัติ และทักษะไปใช้ในสถานการณ์อื่นๆ นอกเหนือจากบทเรียน เป็นกิจกรรมที่จัดขึ้นหลังจากที่ผู้เรียนมีความรู้และความเข้าใจในสมบัติ ผ่านการฝึกทักษะมาดีแล้ว ซึ่งการจัดกิจกรรมเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของผู้เรียน สุลัดดา ลอยฟ้า (2536) ได้เสนอแนะแนวทางการจัดกิจกรรมดังนี้ คือ

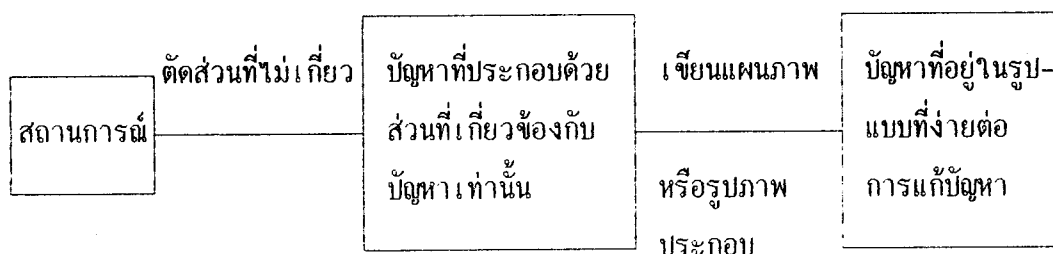
- (1) การสร้างบรรยากาศของการประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหา ดังนี้
 - ไม่มีอะไรประสบผลสำเร็จเท่ากับการประสบผลสำเร็จ
 - การประสบผลสำเร็จควรเป็นสิ่งที่นักเรียนได้มาด้วยตนเองไม่ใช่ครูหยิบยื่นให้
 - การประสบผลสำเร็จนำไปสู่ความมั่นใจตนเอง และอยากที่จะแก้ปัญหา
 - การประสบผลสำเร็จมีความหมายมากกว่าการได้คำตอบที่ถูกต้อง

- ความพยายามที่จะแก้ปัญหาถือว่าเป็นการประสบผลสำเร็จขั้นต้น

(2) สับสั่นหรือกระตุ้นให้นักเรียนแก้ปัญหา

- เปลี่ยนสถานการณ์ของปัญหาให้น่าสนใจสำหรับนักเรียน โดยสถานการณ์ใหม่จะต้องมีข้อมูลและความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลปัญหาเดิมคงไว้
- เสนอปัญหาที่ไม่มีจำนวนตัวเลขให้นักเรียนอภิปรายว่าควรใช้การกระทำอะไรแก้ปัญหา

(3) สอนให้นักเรียนอ่านปัญหา เพราะสิ่งจำเป็นเบื้องต้นในการแก้ปัญหา ก็คือ การทำความเข้าใจในสถานการณ์ของปัญหา โดยใช้ความสามารถในการอ่านเป็นสิ่งสำคัญเบื้องต้นที่จะต้องฝึกผู้เรียน ตัวอย่างกิจกรรมที่ครูควรจัด เช่น การฝึกให้นักเรียนทวนปัญหาด้วยคำพูดของตนเอง หรือให้นักเรียนขีดเส้นใต้ข้อความหรือวลีที่สำคัญ และอีกวิธีหนึ่งก็คือการฝึกให้นักเรียนตัดส่วนข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกัปัญหาออกไป ซึ่งแสดงไว้ในแผนภาพข้างล่างนี้



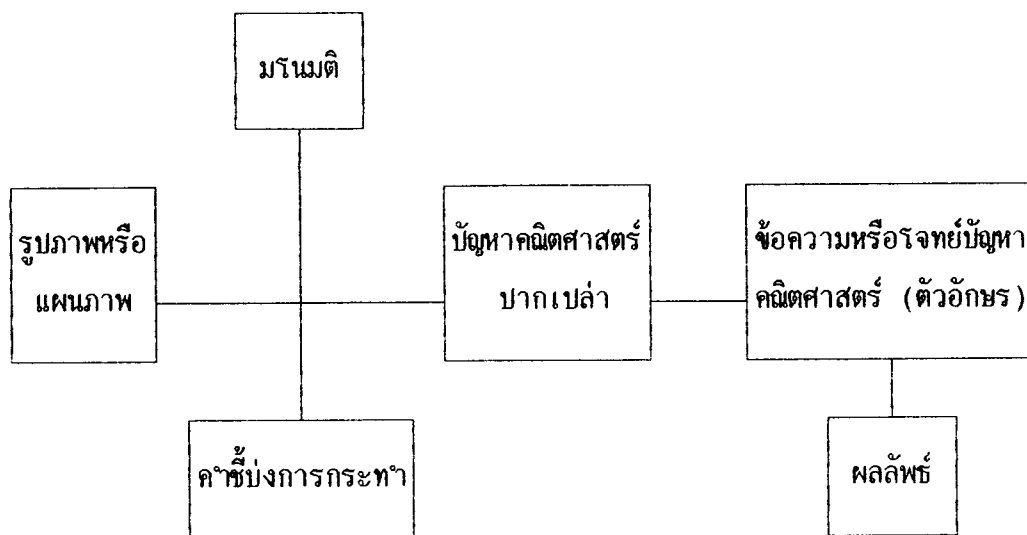
(4) ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในปัญหา เช่น

- ใส่ชื่อนักเรียนในสถานการณ์ปัญหา
- ให้นักเรียนแสดงบทบาทสมมติเป็นตัวละครในปัญหา
- สร้างปัญหาที่เน้นการแสดงออกของนักเรียน
- สร้างโอกาสให้นักเรียนได้จัดกระทำสื่อรูปธรรมเพื่อหาทางแก้ปัญหา

(5) เน้นความไม่สมบูรณ์และเปิดกว้าง เช่น

- กำหนดปัญหาที่ไม่มีคำถาม
- กำหนดปัญหาที่มีเงื่อนไขไม่เพียงพอ
- กำหนดปัญหาที่ไม่มีจำนวนตัวเลข

(6) ให้โอกาสผู้เรียนสร้างปัญหาด้วยตนเอง นักเรียนที่สามารถสร้างปัญหาด้วยตนเองได้จะสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่า เนื่องจากนักเรียนจะต้องรู้โครงสร้างของปัญหาเป็นอย่างดีว่า ประกอบด้วยส่วนประกอบที่จำเป็นอะไรบ้าง และยังเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด และสัมพันธ์ความรู้ และทักษะทางคณิตศาสตร์ กับปัญหาในชีวิตประจำวัน การสร้างโจทย์ปัญหาจากรูปภาพ จะช่วยให้นักเรียนระดับประถมศึกษาเข้าใจปัญหา และสามารถวิเคราะห์ได้



การสร้างโจทย์ปัญหาจากภาพจะช่วยให้นักเรียนสนใจในการสร้างปัญหาต่างๆ ขณะเดียวกันนักเรียนสามารถแก้ปัญหของภาพด้วยตนเองอีกด้วย

(7) ส่งเสริมให้นักเรียนทำงานเป็นกลุ่มย่อยหรือเป็นคู่ในการแก้ปัญา

(8) สนับสนุนให้มีทางเลือกหลากหลายในการแก้ปัญา

- ลองทำคำตอบและตรวจสอบดูว่าถูกต้องไหม
- ลองแก้ปัญาที่ง่ายกว่า โดยใช้จำนวนที่น้อยๆ ก่อนเพื่อหาแนวทาง
- สร้างตารางประกอบ
- เขียนแผนภาพประกอบ
- ใช้สื่อรูปภาพประกอบ
- ใช้เครื่องหมาย
- มองย้อนกลับ
- มองหารูปแบบ
- แบ่งปัญาออกเป็นส่วนๆ แล้วแก้ปัญาแต่ละส่วนย่อยนั้น
- ใช้หลักการคิดเชิงเหตุผล
- ตรวจสอบกับปัญาที่คล้ายกัน

(9) ครูควรใช้คำถามในลักษณะสร้างสรรค์ ขวนคิด และเปิดกว้าง

(10) เน้นให้นักเรียนคิดและจินตนาการอย่างอิสระเสรี

(11) การใช้เกมยุทธวิธีเพื่อพัฒนาการคิด และการแก้ปัญาในระเบียบ

(12) เสนอปัญามากกว่าหนึ่งขั้นตอน

สรุปการจัดกิจกรรมเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญาคณิตศาสตร์ด้วยวิธีต่างๆ

ครูจะต้องมีบทบาทเป็นผู้ช่วย ผู้ชี้แนะแนวทางให้นักเรียนสามารถแก้ปัญาด้วยตนเอง ขณะเดียวกันนักเรียนจะเกิดการพัฒนาเทคนิควิธีในการแก้ปัญาด้วยตนเอง

2.7 แบบทดสอบเพื่อวัดความสามารถแก้ปัญหา

ส. วาสนา ประวาลพฤษย์ (2539) กล่าวว่า การสอนและการสอบนั้นเปรียบเสมือนเส้นด้ายที่เป็นเส้นนอนและเส้นยัดของเนื้อผ้าที่ถูกถักทอประสานกัน ทำให้เนื้อผ้าแข็งแรง ดังนั้นกิจกรรมการเรียนการสอนและการวัดผลต้องเกี่ยวเนื่องกันอยู่เสมอ ควรเป็นการวัดแบบการวัดจากสภาพจริง (Authentic Performance Measurement) มีลักษณะสำคัญ 2 ประการ คือ

1) วัดจากแฟ้มรายงานการปฏิบัติงานของนักเรียน (Portfolio) เป็นการตรวจสอบผลงานของนักเรียนทุกสิ่งทุกอย่างของนักเรียนตั้งแต่ต้นปีการศึกษาจะทำให้ให้นักเรียนมองเห็นความก้าวหน้าของตนเอง ตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อผิดพลาดในภายหลัง

2) วัดจากการทดสอบ ให้ปฏิบัติโดยจำลองจากสถานการณ์ที่คล้ายกับชีวิตจริงมากที่สุด ลักษณะของแบบทดสอบอาจจะเป็นการดำเนินการ ปฏิบัติการ หรือการใช้ความคิดแก้ปัญหาที่ต้องประยุกต์ความรู้หลายด้านมาใช้ในการให้คำแนะนำ เป็นต้องสร้างเกณฑ์และเข้าใจเกณฑ์เหล่านั้น โดยเกณฑ์การให้คำแนะนำจะกำหนดเป็นหลัก (Rubric) ที่ระดับของความถูกต้องในการแก้ปัญหา นั้นๆ ประมาณ 4-6 ระดับ

การวัดผลโดยเน้นให้ผู้เรียนนำความรู้ แนวคิดวิชาที่เรียนในวิชาต่างๆ เพื่อนำมาแก้ปัญหาโดยใช้ทักษะการคิดที่ซับซ้อน (Complex Thinking) มากกว่าที่จะถามความสามารถขั้นต้นหรือความสามารถย่อย ๆ เป็นการวัดผู้เรียนโดยรวม บางครั้งอาจวัดทั้งด้านความคิด เจตคติ และการกระทำพร้อม ๆ กัน อย่างไรก็ตามการวัดความสามารถขั้นต้น หรือทักษะเบื้องต้น (Basic Skill) ก็ยังมีความจำเป็นเมื่ออยู่ในขั้นการเรียนการสอนในหน่วยย่อย แต่จุดหมายปลายทางของการศึกษาก็คือ ความสามารถขั้นสูงคือ ความสามารถประยุกต์ไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันโดยการเน้นกระบวนการต่างๆ ตามเป้าหมายหลักสูตร

การสร้างข้อคำถามอาจทำได้โดย

1. เสนอสถานการณ์ประกอบด้วยข้อมูล และข้อจำกัดต่างๆ ให้นักเรียนหาคำตอบพร้อมทั้งอธิบายวิธีคิดที่จะได้คำตอบ ซึ่งอาจมีวิธีการคิดหลายวิธี
2. เสนอปัญหาประกอบด้วยข้อมูลที่เกี่ยวข้อง และไม่เกี่ยวข้อง (หรือไม่จำเป็น) ให้นักเรียนพิจารณาแก้ปัญหา และให้ความเห็นเกี่ยวกับข้อมูลที่ไม่เหมาะสม
3. เสนอปัญหาและแนวทางแก้ปัญหาบางส่วน ให้นักเรียนวิจารณ์และให้แก้ปัญหานั้นให้สำเร็จ
4. เสนอปัญหา ให้แสดงวิธีการแก้ปัญหาและการตรวจสอบ โดยให้นำเสนอต่อเพื่อน ๆ ในชั้นเรียนหรือแลกเปลี่ยนคำตอบนั้น

เกณฑ์การให้คะแนน

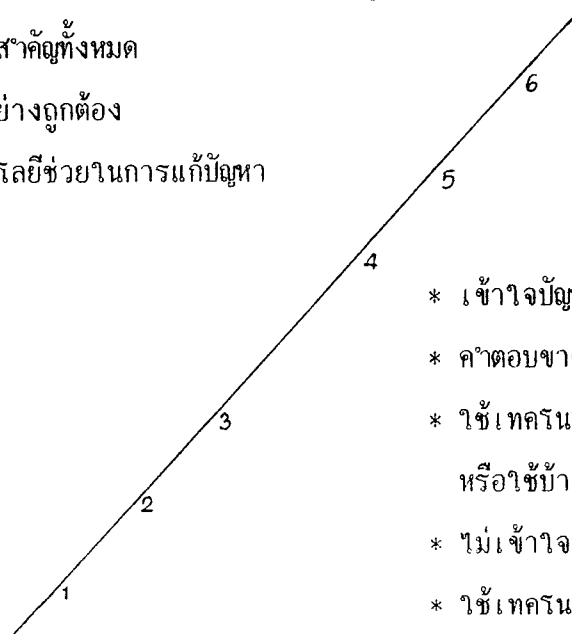
ในส่วนของการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนนั้น อาจกำหนดเป็น 3-6 ระดับ โดยพิจารณาตามความสมบูรณ์ของคำตอบในแต่ละประเด็นนั้น ๆ ในแบบทดสอบวัดการแก้ปัญหา นั้น จะเน้นความสามารถของนักเรียนในข้อต่อไปนี้

1. ความเข้าใจในปัญหา
2. กระบวนการ และกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา
3. การสื่อสารอย่างมีเหตุผลในการแก้ปัญหา
4. ความสามารถในการแก้ปัญหา

โดยเกณฑ์ของการให้คะแนนในแต่ละข้อแสดงดังภาพที่ 8-11

ภาพที่ 8 แสดง เกณฑ์การให้คะแนนความเข้าใจในปัญหา

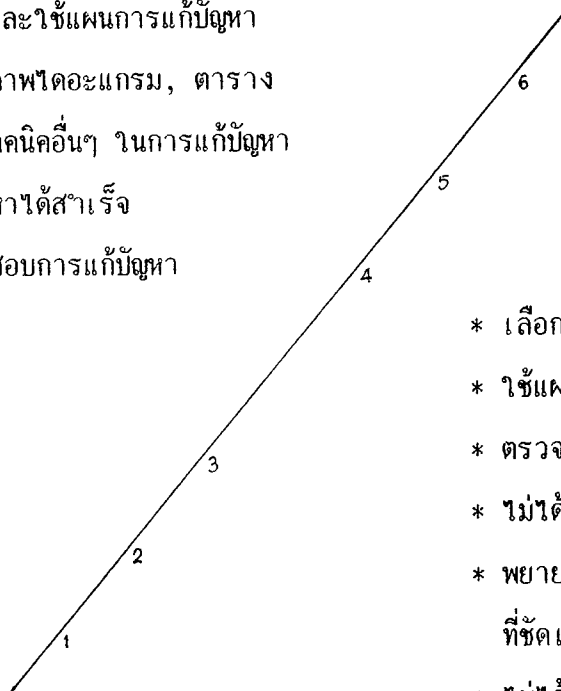
- * ใช้ข้อมูลที่สำคัญทั้งหมด
- * ใช้ข้อมูลอย่างถูกต้อง
- * ใช้เทคนิคช่วยในการแก้ปัญหา



- * เข้าใจปัญหาบางส่วน
- * คำตอบขาดบางส่วนไป
- * ใช้เทคนิคที่ไม่เหมาะสมหรือใช้บ้าง
- * ไม่เข้าใจปัญหา
- * ใช้เทคนิคที่ไม่ถูกต้อง

ภาพที่ 9 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนกระบวนการ/กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา

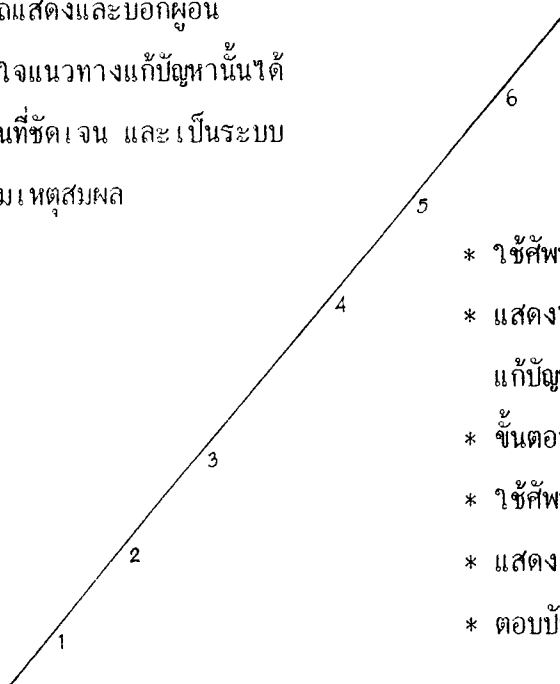
- * เลือกและใช้แผนการแก้ปัญหา
- * ใช้รูปภาพไดอะแกรม, ตาราง
- * และเทคนิคอื่นๆ ในการแก้ปัญหา
- * แก้ปัญหาได้สำเร็จ
- * ตรวจสอบการแก้ปัญหา



- * เลือกแนวทางแต่แก้ปัญหาไม่สำเร็จ
- * ใช้แผนการแก้ปัญหาที่ไม่ค่อยจะถูกต้อง
- * ตรวจสอบผลงานไม่สมบูรณ์
- * ไม่ได้วางแผนการแก้ปัญหา
- * พยายามแก้ปัญหาแต่ไม่มีแนวทางที่ชัดเจน
- * ไม่ได้ตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหา

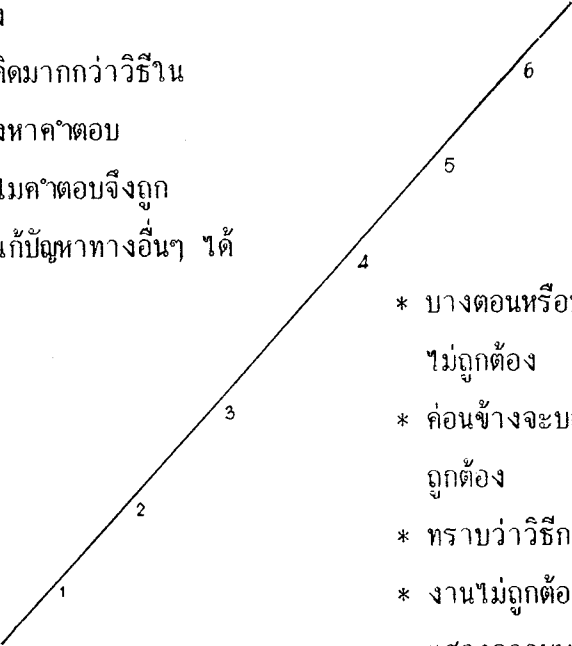
ภาพที่ 10 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการสื่อสารอย่างมีเหตุผล

- * ใช้ศัพท์เฉพาะอย่างถูกต้อง
 - * สามารถแสดงและบอกผู้อื่น
 - * ให้เข้าใจแนวทางแก้ปัญหานั้นได้
 - * มีขั้นตอนที่ชัดเจน และเป็นระบบ
- อย่างสมเหตุสมผล



- * ใช้ศัพท์เฉพาะไม่ค่อยถูกต้อง
- * แสดงให้ผู้อื่นเข้าใจแนวทางในการแก้ปัญหาของตนไม่ชัดเจน
- * ขั้นตอนไม่ค่อยเป็นระบบ
- * ใช้ศัพท์ไม่ถูกต้อง
- * แสดงเฉพาะคำตอบไม่บอกแนวคิด
- * ตอบปัญหาผิด

ภาพที่ 11 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหา

- 
- * ผลงานถูกต้อง
 - * แสดงวิธีการคิดมากกว่าวิธีใน
 - * การที่จะแสวงหาคำตอบ
 - * บอกได้ว่าทำไมคำตอบจึงถูก
 - * บอกแนวทางแก้ปัญหาทางอื่นๆ ได้
 - * บางตอนหรือบางส่วนของคำตอบ
ไม่ถูกต้อง
 - * ก่อนข้างจะบอกได้ว่า คำตอบนั้น
ถูกต้อง
 - * ทราบว่าวิธีการแก้ปัญหานั้นไม่สำเร็จ
 - * งานไม่ถูกต้อง
 - * แสดงความพยายามแก้ปัญหา
 - * ไม่สามารถบอกได้ว่าทำไมจึงแก้ปัญหา
ไปในแนวนั้น

2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ระวีวรรณ พ่วงวิจิตร (2537) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาระหว่างชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 และ 4 ไม่แตกต่างกัน และความสามารถในการแก้ปัญหของทั้ง 2 ระดับอยู่ในเกณฑ์ที่ค่อนข้างต่ำ และความสามารถในการแก้ปัญหาระหว่างนักเรียนชายและนักเรียนหญิงไม่แตกต่างกัน

วิเมลียง ถิ่นบุร (2537) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการสอนโดยวิธี Cooperative Mastery Learning กับการสอนตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธี Cooperative Mastery Learning สูงกว่าการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

บุญประเสริฐ ไชยศิริ (2537) ได้ทำการพัฒนารูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนตามคู่มือครูที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี (2535) ได้ศึกษาการสอนพิสูจน์ที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค.321 โรงเรียนปทุมเทพวิทยาคาร อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย จำนวน 100 คน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบเน้นกระบวนการแก้ปัญหา และนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .01

กิตติพงษ์ ตะไกรแก้ว (2538) ศึกษาและพัฒนารูปแบบการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เชิงสร้างสรรค์ ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณ การหาร ผลการวิจัยพบว่า 1) ในการแก้ปัญหามีขั้นตอนการแก้ปัญหา 5 ขั้นตอนคือ (1) การนิยามปัญหา (2) การค้นหาแนวทางแก้ปัญหาแบบอเนกนัย (3) การประเมินวิธีการและคำตอบที่เหมาะสมที่สุด (4) การลงมือปฏิบัติ (5) การเสนอปัญหาด้วยตนเอง 2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้รูปแบบการสอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เชิงสร้างสรรค์สูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

Robinson (1982) ได้ศึกษาผลของการสอนที่เน้นยุทธวิธีในการแก้ปัญหากับการสอนปกติของนักเรียนประถมศึกษาตอนต้น โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยพิษเบอร์ก จำนวน 20 คน ได้รับการสอนแบบรายบุคคล ซึ่งเน้นการใช้ขั้นตอนแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน การใช้โดอะแกรม และความสัมพันธ์ของการใช้โดอะแกรมกับปัญหาแต่ละอย่าง ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นยุทธวิธีดังกล่าว มีความสามารถในการนับเลข การเขียนโดอะแกรม การเขียนประโยคสัญลักษณ์และการคำนวณหาคำตอบได้สูงขึ้นจากก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .001

Real และ Veloo (1993) ได้ทำการศึกษาการใช้โดอะแกรมหรือวาดรูปสำหรับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่รู้จักการวาดโดอะแกรมโดยเฉพาะนักเรียนที่ได้รับการแนะนำวิธีการใช้โดอะแกรมจะมีจำนวนการประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มากกว่าความล้มเหลว

สรุปจากรายงานผลการวิจัย จะเห็นว่า กระบวนการแก้ปัญหามีหลักการของ Cooperative Learning และยุทธวิธีในการแก้ปัญหานั้นให้นักเรียนได้คิดแก้ปัญหาพร้อมทั้งลงมือปฏิบัติเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้น

2.9 กระบวนการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถแก้ปัญหา

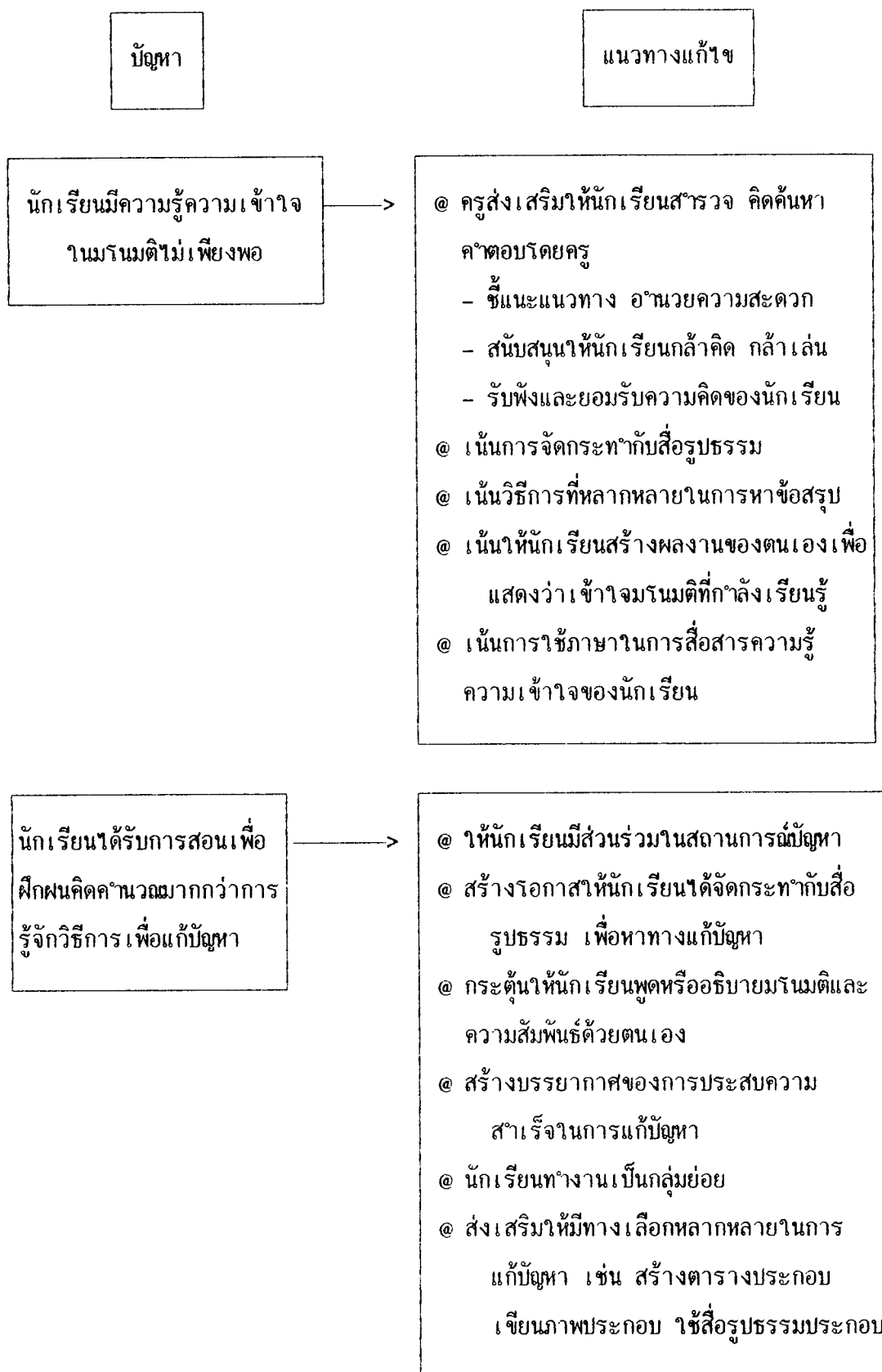
2.9.1 วิเคราะห์สภาพปัญหาและแนวทางแก้ไข

จากการศึกษาสำรวจปัญหาโดยการปรึกษาร่วมกันระหว่างครูผู้สอนและผู้วิจัย ซึ่งใช้วิธีการหาแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปัญหา (Thematic concern) เพื่อให้เข้าใจสภาพปัญหาในชั้นเรียนอย่างค่อนข้างละเอียดและครอบคลุม ดังตารางที่ 7

ตารางที่ 7 แสดงการหาแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปัญหา

ครูผู้สอน (A)	นักเรียน (B)	เนื้อหาวิชา (C)	สภาพแวดล้อม (D)
1. ครูผู้สอน			
2. นักเรียน			
3. ผู้ทำการวิจัย			

จากการวิเคราะห์สภาพปัญหา เพื่อนำมาวางแผนการทำการกิจกรรมการเรียนการสอนในชั้นเรียน ผลการวิเคราะห์ปัญหาที่ต้องแก้ไข คือ 1) นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ไม่เพียงพอ (Conceptual Knowledge) ซึ่งเป็นความรู้เบื้องต้นและเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์อื่นๆ และการแก้โจทย์ปัญหา 2) กระบวนการสอนเน้นให้นักเรียนฝึกคิดคำนวณเน้นความรู้ในเนื้อหา เน้นกรรมวิธี วิธีการขั้นตอน โดยการเลียนแบบตามตัวอย่าง นักเรียนจึงมีความรู้เฉพาะด้านความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกรรมวิธี (Procedural Knowledge) นั่นคือ การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของผู้เรียนความเข้าใจยังเป็นรูปแบบ Instrumental Understanding หมายถึงความรู้ความเข้าใจระหว่างมโนทัศน์ (Conceptual knowledge) กับกรรมวิธี (Procedural Knowledge) ที่ขาดการเชื่อมโยงระหว่างกันและกัน แต่ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ผู้เรียนจำเป็นต้องมีความรู้ความเข้าใจของมโนทัศน์ที่เชื่อมโยงกับความรู้ความเข้าใจกรรมวิธีเป็นอย่างดี รวมทั้งกระบวนการเรียนการสอนที่เอื้อให้นักเรียนได้มีประสบการณ์ตรงในการแก้ปัญหา ผู้เรียนจึงจะมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพ ดังแสดงในภาพที่ 12



2.9.2 รูปแบบการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถแก้ปัญหา

2.9.2.1 หลักการและเป้าหมาย

นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 เป็นนักเรียนที่มีอายุระหว่าง 6-7 ปี อยู่ในระดับขั้นการพัฒนาทางสติปัญญาในขั้นก่อนปฏิบัติการ (Pre-operational stage) และต่อเนื่องถึงขั้นปฏิบัติการรูปธรรม (Concrete Operational Stage) จากการศึกษาทฤษฎีการเรียนรู้หลักการและแนวคิดของทฤษฎีการเรียนรู้ปัญญานิยม (Cognitive theory) ตามแนวคิดของ Piaget, Bruner หลักการตามรูปแบบการสอน Cooperative Learning และแนวคิด Constructivist นำมาพัฒนาเป็นรูปแบบกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่มุ่งพัฒนาให้นักเรียนได้เกิดความรู้ทั้งมโนคติ ทักษะทางคณิตศาสตร์ ทักษะการแก้ปัญหา โดยรูปแบบกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเน้นทักษะการแก้ปัญหาที่นำไปใช้ในทุกลักษณะของเนื้อหา ซึ่งได้แก่ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติ ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และกรรมวิธี ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้ปัญหา กิจกรรมการเรียนการสอนนั้น นักเรียนจะได้เผชิญกับสถานการณ์ปัญหาในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น เรื่องราวสภาพการณ์ปัญหาจากภาพ นิทาน เกมโจทย์ปัญหา เป็นต้น นักเรียนเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหาอย่างหลากหลาย นักเรียนทุกคนได้ลงมือปฏิบัติได้แก้ปัญหาด้วยตนเองจากสื่อรูปธรรม กึ่งรูปธรรม จนในที่สุดเป็นสัญลักษณ์ พร้อมทั้งนักเรียนได้พูดอธิบายให้เหตุผลในการแก้ปัญหา ซึ่งจะสะท้อนถึงความเข้าใจสมาชิกในกลุ่มมีทักษะความรับผิดชอบทักษะการทำงานร่วมกัน เกิดการเรียนรู้ซึ่งกันและกันและผลสุดท้ายช่วยให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทางคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น

2.9.2.2 จุดมุ่งหมาย

- 1) เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจ และรู้คุณค่าของคณิตศาสตร์
- 2) เพื่อส่งเสริมและพัฒนาด้านกระบวนการคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน
- 3) เพื่อให้นักเรียนได้รู้จักเทคนิค แนวทางวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

2.9.2.3 ขั้นตอนกระบวนการกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถแก้ปัญหา

กระบวนการกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อพัฒนาความสามารถแก้ปัญหา ประกอบด้วย 3 กระบวนการคือ

1. มีประสบการณ์ตรงจากการรับรู้สิ่งเร้า ซึ่งจะตรงกับขั้นพัฒนาโมเดลเป็นขั้นตอนที่ให้นักเรียนเกิดหรือมีมโนคติ หลักการ กฎเกณฑ์ ข้อความรู้อย่างต่างๆ เป็นกระบวนการให้นักเรียนมีประสบการณ์เกี่ยวกับการแก้ปัญหาโดยตรง พร้อมทั้งครูช่วยสรุปและจัดระบบให้ชัดเจน ประกอบด้วยขั้นตอนย่อย ๆ คือ

1.1 เฝื่อนสถานการณัปัญหา นักเรียนจะไดเฝื่อนกับสถานการณัปัญหาตางๆ เชน เรื่องราวจากภาพ นิทาน เกม ประโยคสัญลักษณ์ วจทยัปัญหา สถานการณัจำลอง แผนภาพ แผนภูมิ ข้อความ ซึ่งประกอบไปด้วยสื่อรูปธรรม กิ่งรูปธรรม

1.2 ทำความเข้าใจสถานการณั นักเรียนจะต้องแปลสถานการณัปัญหาที่เฝื่อนโดยวิธีการตางๆ เชน ลองกระทำตามสถานการณัที่กำหนดจากภาพบอกข้อมูลอะไร จำนวนเท่าใดหรือ ถ้าเป็นวจทยัปัญหาทิวเคราะห์วจทยัว่ากล่าวถึงอะไร วจทยัต้องการให้หาอะไร วจทยักำหนดอะไร มาให้บ้าง

1.3 แนวทางแก้ปัญหา เป็นการวางแผนสำหรับแก้ปัญหาโดยใช้ยุทธศาสตร์การแก้ปัญหาด้วยวิธีการตางๆ เชน การทดลองปฏิบัติจริง จากสื่อรูปธรรมหรือกิ่งรูปธรรม การวาดภาพ แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง หรือเทคนิคการคิดตางๆ (ซึ่งจะต้องเหมาะสมกับลักษณะเนื้อหาในแต่ละช่วงม่ง) ประเมินเลือกวิธีการแก้ปัญหาจากเกณฑ์ในการประเมิน เชน ความถูกต้องแม่นยำรวดเร็วและความถนัดของนักเรียนที่ใช้้อย่างเหมาะสมแต่ละสถานการณัปัญหา

1.4 ลงมือปฏิบัติ เป็นการลงมือแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบพร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบ

1.5 สรุปมรณมตที่ไดในแต่ละครั้ง นักเรียนจะต้องร่วมกันสรุปมรณมต ความรู้ ญาณเกณฑ์หลักการตางๆ ที่เรียนไปแล้วในแต่ละช่วงม่ง พร้อมทั้งครุช่วยแก้ไข จัดระบบให้ชัดเจน

2. มีความเข้าใจ ซึ่งจะตรงกับขั้นพัฒนาทักษะ ในขั้นนี้นักเรียนจะบูรณาการประสบการณ์ตางๆ มรณมต หลักการ ญาณเกณฑ์ที่ได้มาจากขั้นที่ 1 อย่างมีความหมาย และกระจ่างยิ่งขึ้น ซึ่งผู้เรียนจะเข้าสู่กลุ่มย่อย (วิธีการเข้าสู่กลุ่มตามหลักการของ Cooperative learning) กลุ่มละ 4 คน ประกอบด้วยเด็กเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน ร่วมกันแก้ปัญหาจากสถานการณัปัญหาที่ได้รับมอบ ก่อให้เกิดทักษะการทำงานร่วมกัน ร่วมมือกัน นักเรียนที่เก่งอธิบายเนื้อหาให้แก่นักเรียนที่อ่อน เนื่องจากทุกคนทราบว่าตนเองเป็นส่วนหนึ่งที่จะช่วยผลักดันกลุ่มให้สู่เป้าหมายนอกจากนั้นยังก่อให้เกิดทักษะความรับผิดชอบ เพราะกลุ่มอาจจะล้มเหลวได้ ถ้าหากสมาชิกไม่สนใจทำกิจกรรมแล้วทำคะแนนทดสอบไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนด ดังนั้นทุก ๆ คนจะต้องตั้งใจเรียน ทำกิจกรรมตางๆ ด้วยความเต็มใจ สมาชิกทุกคนศึกษาเนื้อหาความรู้จากบัตรงาน และร่วมกันทำงานกิจกรรมจากบัตรกิจกรรมในช่วงการทำกิจกรรม สมาชิกทุกคนจะร่วมกันหาแนวทางแก้ปัญหาด้วยวิธีที่หลากหลาย และสรุปว่าจะใช้วิธีอะไรที่ถูกต้อง รวดเร็ว เข้าใจง่าย ที่แตกต่างจากเพื่อนๆ จากการพูด อธิบาย การบอกเหตุผล การใช้สื่อรูปธรรม กิ่งรูปธรรมในการแก้ปัญหา

3. มีความคิดอย่างมีประสิทธิภาพ ตรงกับขั้นพัฒนาการนำไปใช้ นักเรียนนำสิ่งที่เรียนรู้ไปแล้วไปใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณัใหม่โดยตรงด้วยตนเอง เชน การแก้วจทยัปัญหา การแก้ปัญหาจากโครงการปัญหาหรือเสนอปัญหาด้วยตนเอง เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจโครงการของปัญหา เข้าใจวิธีการแก้ปัญหาที่เรียนรู้ในแต่ละครั้งอย่างลึกซึ้ง หรือการสร้างปัญหาด้วยตนเองโดยการเปลี่ยนแปลงข้อมูลที่เป็นตัวเลข ข้อความหรือสร้างปัญหาจากแผนภาพ ประโยคสัญลักษณ์

2.9.2.4 ลำดับขั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ - แจงวัตถุประสงค์การเรียนรู้

- ทบทวนความรู้เดิม หรือแนวคิดที่จำเป็นต้องเป็นพื้นฐานสำหรับความรู้ใหม่

ขั้นสอน

พัฒนามโนคติ

- 1) นักเรียนเผชิญสถานการณ์ปัญหาประกอบด้วยสื่อรูปธรรม กึ่งรูปธรรม
- 2) ให้ผู้เรียนทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา เชื่อมโยงความรู้มโนคติกับวิธีการ โดยนักเรียนทุกคนได้จัดกระทำกับสื่อรูปธรรม กึ่งรูปธรรม นักเรียนได้พูดหรืออธิบายมโนคติและความสัมพันธ์ด้วยตนเอง
- 3) แนวทางแก้ปัญหาที่หลากหลาย ประเมินวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสม
- 4) ลงมือปฏิบัติและตรวจคำตอบ
- 5) นักเรียนสรุปมโนคติ (ครูช่วยแก้ไข, สรุปและจัดระบบให้ชัดเจน)

พัฒนาทักษะ

- นักเรียนเข้ากลุ่มย่อย ศึกษาเนื้อหาจากบัตรงาน ครูสร้างหรือกำหนดปัญหาให้ผู้เรียนแสดงความคิดเห็นแก้ปัญหาจากบัตรกิจกรรม และตรวจคำตอบจากบัตรเฉลย

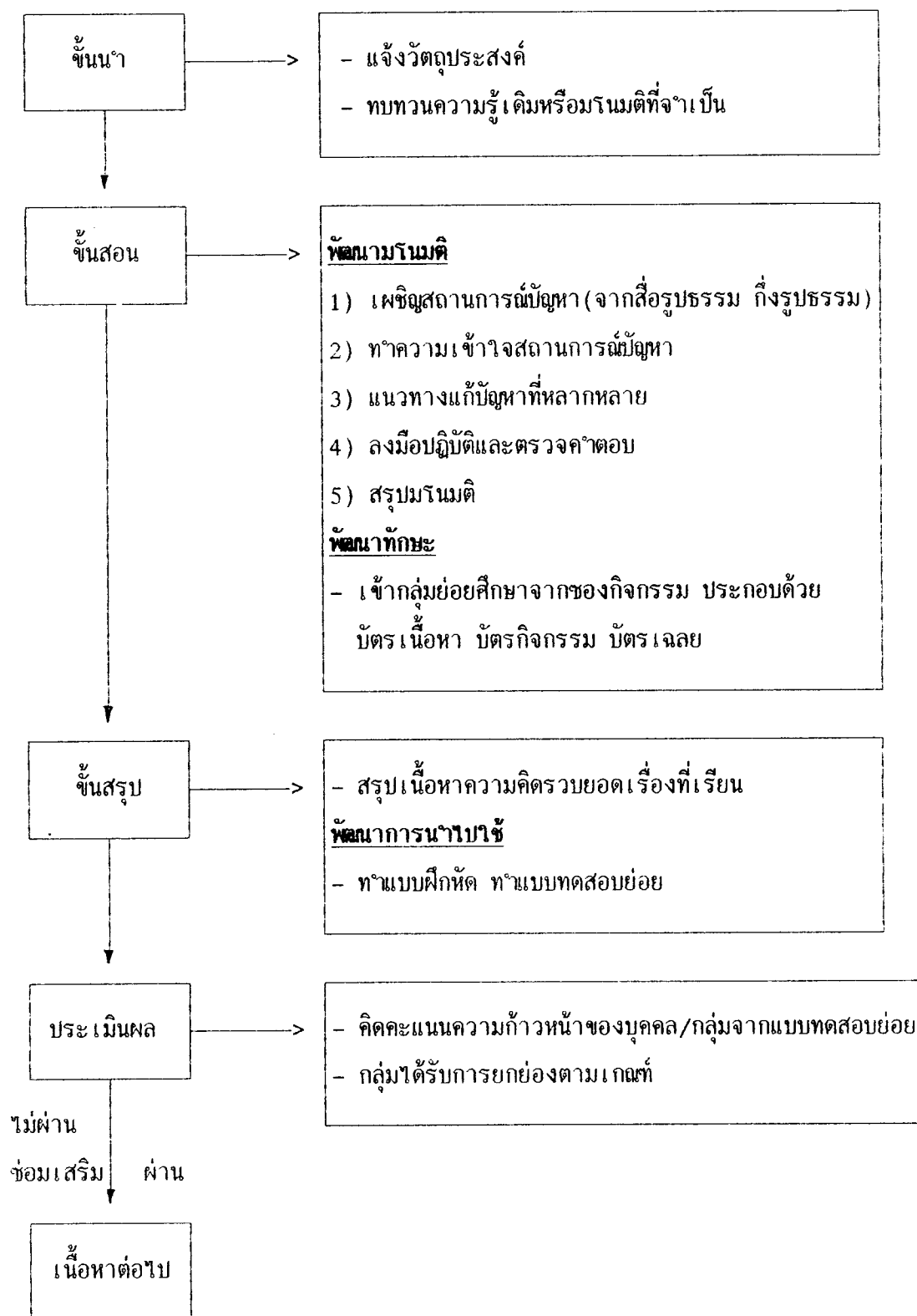
ขั้นสรุป - อภิปรายร่วมกันกับนักเรียน สรุปเนื้อหาให้นักเรียนเข้าใจความคิดรวบยอดเรื่องที่เรียน

พัฒนาการนำไปใช้

- นักเรียนทำแบบทดสอบย่อย
- นักเรียนเสนอสถานการณ์ปัญหาด้วยตนเอง หรือแก้โจทย์ปัญหา หรือโครงการแก้ปัญหา

ขั้นประเมินผล

- สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด
- สังเกตจากการทำแบบทดสอบย่อย
- สังเกตจากการเข้าร่วมกิจกรรม



แผนภาพที่ 13 แสดงลำดับขั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

2.9.2.5 บรรยากาศที่ส่งเสริมพัฒนาความสามารถการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

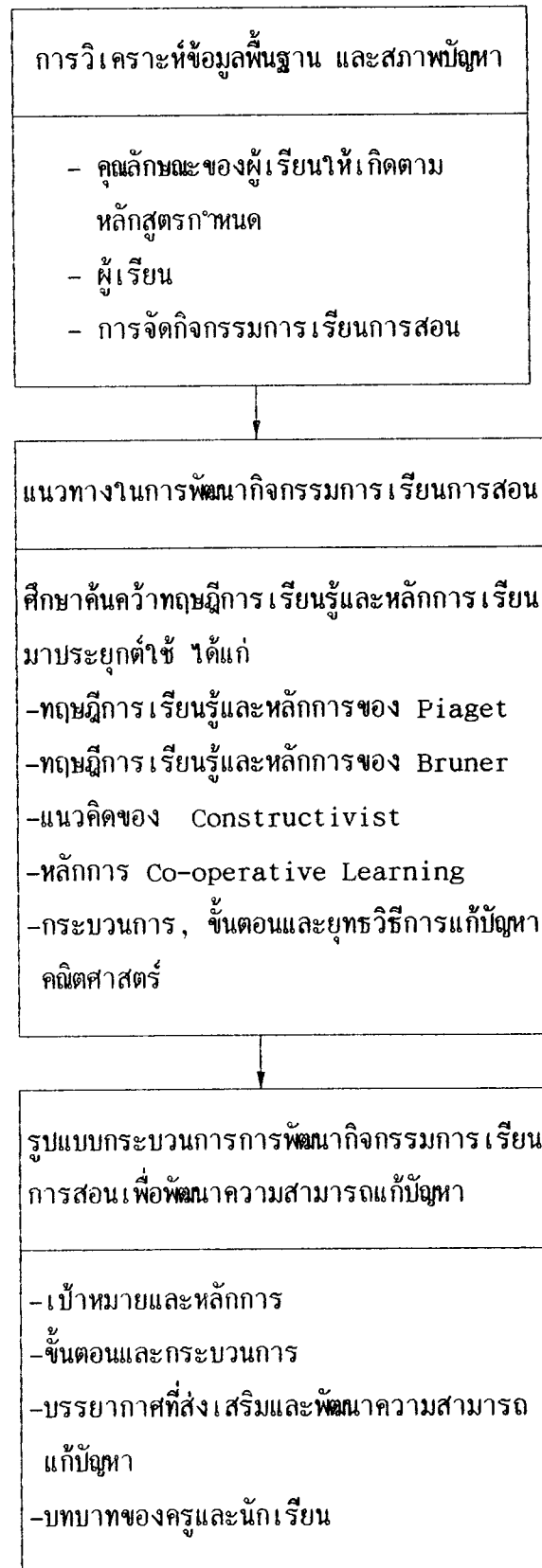
1. สร้างความมั่นใจในการแก้ปัญหา โดยการเริ่มจากการเสนอปัญหาง่ายๆ ก่อน เพื่อให้นักเรียนประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง เพราะการประสบผลสำเร็จจะนำไปสู่ความมั่นใจในตนเองและอยากที่จะแก้ปัญหา
2. การจัดกระบวนการคิด ควรเริ่มจากการเน้นที่จัดกระทำกับสื่อรูปธรรม แล้วจึงค่อยๆเปลี่ยนแปลงเป็นสื่อกึ่งรูปธรรม และสัญลักษณ์ที่สุด
3. เปิดโอกาสให้นักเรียน แสดงความคิดเห็น อภิปราย แลกเปลี่ยนวิธีการแก้ปัญหา ซึ่งเกิดจากการร่วมกันทำงานจากกลุ่มย่อย และทำให้นักเรียนรู้คุณค่าของตนเอง
4. สนับสนุนให้นักเรียนกล้าคิด กล้าเสี่ยง กล้าเล่น กล้าแสดงออกในการแก้ปัญหา โดยการให้การชมเชย ยอมรับ นักเรียนที่มีความสนใจ ตั้งใจ และความพยายามที่จะแก้ปัญหา
5. ครูเป็นผู้ชี้แนะแนวทาง และคอยอำนวยความสะดวก เช่น การเตรียมสื่อให้นักเรียนการให้คำแนะนำ ปรึกษา
6. ให้นักเรียนสร้างผลงานของตนเองเพื่อแสดงว่าเข้าใจแนวคิดที่กำลังเรียนรู้ โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนสร้างปัญหาด้วยตนเอง เช่น สร้างปัญหาจากรูปภาพ การที่นักเรียนสร้างปัญหาด้วยตนเองได้ เขาจะสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่า เพราะการที่นักเรียนจะสามารถสร้างปัญหาด้วยตนเองนั้น ต้องรู้จักโครงสร้างของปัญหาเป็นอย่างดีว่าส่วนประกอบใดบ้างที่จำเป็น ทั้งยังเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด สัมพันธ์ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์
7. ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในปัญหา เช่น การใส่ชื่อนักเรียนในสถานการณ์ปัญหา ให้ออกาสักนักเรียนได้จัดกระทำกับสื่อรูปธรรมเพื่อหาทางแก้ปัญหา กระตุ้นให้นักเรียนคงความสนใจในกิจกรรม
8. ให้นักเรียนทำงานเป็นกลุ่มย่อย เปิดโอกาสให้นักเรียนช่วยกันคิด อภิปรายสำรวจวิธีการแก้ปัญหา ช่วยกระตุ้นและพัฒนาทักษะการแสดงความคิดเห็นการทำงานกลุ่มย่อย
9. การใช้คำถามในลักษณะสร้างสรรค์ของครู ครูควรใช้คำถามในลักษณะที่เปิดกว้างหรือเสนอแนะแนวทางแก้ปัญหา เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนฝึกคิดชวนค้นคว้าต่อไป ให้ความสำคัญแก่นักเรียนในการคิด
10. รับฟังและยอมรับความคิดของนักเรียน โดยครูอาจพูดกระตุ้นถามให้นักเรียนได้อธิบายวิธีการคิด ให้นักเรียนแสดงวิธีการแก้ปัญหา ให้นักเรียนได้ซักถาม อภิปรายปัญหากับเพื่อนๆในกลุ่มย่อยของตน
11. ส่งเสริมให้มีทางเลือกอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา เช่น ใช้สื่อรูปธรรมประกอบ การวาดภาพ การใช้แผนภาพ การใช้เส้นจำนวน หรือตารางร้อย การใช้เทคนิคการคิด เช่น แผนภูมิกิ่งไม้

ตารางที่ 8 แสดงบทบาทและพฤติกรรมของครูในการจัดการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน	บทบาท/พฤติกรรมของครู
1. ขั้นนำ 2. ขั้นสอน <u>พัฒนามโนคติ</u> 1) เสนอสถานการณ์ปัญหา 2) ทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา 3) แนวทางแก้ปัญหาอย่างหลากหลาย 4) ลงมือปฏิบัติ 5) สรุปมโนคติ <u>พัฒนาทักษะ</u> - เข้ากลุ่มย่อย 3. ขั้นสรุป <u>พัฒนาการนำไปใช้</u> 4. ขั้นประเมินผล	- แจกวัสดุประสงค์การเรียนรู้ - ทบทวนความรู้เดิม - เสนอเหตุการณ์ปัญหาลงมือปฏิบัติ กิ่งรูปธรรม - ตั้งคำถามเพื่อนำไปสู่การวิเคราะห์ - ชี้แนะวิธีการอ่านโจทย์ปัญหา วลี ข้อความสำคัญ - กระตุ้นให้นักเรียนพูดอธิบายมโนคติ - เปิดโอกาสให้นักเรียนเสนอแนวทางแก้ปัญหา - จัดสื่อรูปธรรม กิ่งรูปธรรม ให้นักเรียนทดลองเห็นจริง - หลีกเลี่ยงการบอกความรู้โดยตรงกับนักเรียน - ใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนสำรวจค้นค้นแนวทางแก้ปัญหา - ตรวจสอบความถูกต้องของผลงานที่ได้ - ให้ความสำคัญกับการแก้ปัญหาอย่างพอเพียง - ใช้คำถาม กระตุ้นให้นักเรียนได้สรุปมโนคติของเรื่องที่เรียน - แนะนำวิธีการเรียนรู้จากบัตรงาน - คอยช่วยเหลือดูแลแนะนำเมื่อนักเรียนเกิดปัญหา - กระตุ้นให้นักเรียนนำหลักการความรู้ที่ได้มาใช้แก้ปัญหา - ร่วมอภิปรายกับนักเรียนสรุปเนื้อหา - ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อย เมื่อจบเนื้อหาย่อยในแต่ละบท - ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด และกิจกรรมที่ส่งเสริมการคิดแก้ปัญหา - คัดคะแนนความก้าวหน้ารายบุคคลและของกลุ่ม - ประเมินความรู้ความเข้าใจ จากแบบทดสอบย่อยแบบฝึกหัด

ตารางที่ 9 แสดงบทบาทและพฤติกรรมของนักเรียนในการจัดการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน	บทบาท/พฤติกรรมของนักเรียน
1. ขั้นนำ	- ทำความเข้าใจและสนใจเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้
2. ขั้นสอน	
<u>พัฒนามโนคติ</u>	
1) เสนอสถานการณ์ปัญหา	- สังเกตเหตุการณ์จากสื่อรูปธรรม กึ่งรูปธรรม
2) ทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา	- จัดกระทำกับสื่อรูปธรรม กึ่งรูปธรรม เพื่อหาคำตอบ
	- อธิบาย บอก พูดได้ถึงสิ่งที่ต้องการ ข้อมูลที่กำหนดให้
	- สิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ
	- สังเกตคำลึขบ่ง
3) แนวทางแก้ปัญหาอย่างหลากหลาย	- ทดลองจากสื่อรูปธรรม กึ่งรูปธรรม
	- คิดหารูปแบบการแก้ปัญหาที่เหมาะสม
	- แสดงความคิดเห็นถึงรูปแบบของตนเอง/กลุ่ม
4) ลงมือปฏิบัติ	- แสดงวิธีการแก้ปัญหาตามแนวทางที่เลือกไว้
5) สรุปมโนคติ	- พูดอธิบายมโนคติด้วยตนเองของเรื่องที่เรียน
<u>พัฒนาทักษะ</u>	
- เข้ากลุ่มย่อย	- ศึกษาบัตรงาน, ทำความเข้าใจ
	- ทำกิจกรรมร่วมกันทั้งกลุ่ม ร่วมมือกันแก้ปัญหา
	- เด็กเก่งช่วยเหลือเด็กอ่อน
3. ขั้นสรุป	- สรุปแนวคิดมโนคติที่ได้ด้วยการพูดอธิบายด้วยตนเอง
<u>พัฒนาการนำไปใช้</u>	- ทำแบบฝึกหัดหรือฝึกทักษะที่จำเป็นในการแก้ปัญหาด้วยความตั้งใจ
4. ขั้นประเมินผล	- ปรับปรุงตนเองให้ดียิ่งขึ้น



ภาพที่ 14 แสดงการสรุปกรอบแนวคิดในการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์