

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนา:
กรณีวัสดุมีอุณหภูมิไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์

5.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนา:

กรณีวัสดุมีอุณหภูมิไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์

จากการศึกษาที่ในหัวข้อที่ 4.2 เป็นการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในชั้นวัสดุหนา โดยการใช้การประมาณเข้ามาช่วยในการแก้สมการ ซึ่งสมการที่ได้จะอยู่ในรูปที่ง่ายและสะดวกในการคำนวณ แต่ในงานที่ต้องการความถูกต้องจะต้องใช้เวลาในการคำนวณมากและผลที่ได้ยังอาจเกิดความคลาดเคลื่อนมาก เพื่อการทำนายอุณหภูมิมีความแม่นยำมากขึ้นการศึกษาต่อไปนี้จะเป็นการนำสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิมาวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์โดยในการคำนวณจะแบ่งออกเป็นสองช่วง ในช่วงแรกเป็นนำสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของของไหลและสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุมาแก้สมการ เมื่อได้อุณหภูมิของของไหลและอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุแล้วนำผลที่ได้มาใช้ในการหาการกระจายอุณหภูมิภายในวัสดุ จากรูปที่ 4.1

สมการความสมดุลพลังงานของของไหล

$$\epsilon \rho_a C_a u \frac{\partial T}{\partial x} = h_v (\theta - T) \quad (5.1)$$

สมการความสมดุลพลังงานของวัสดุ

$$(1 - \epsilon) \rho_b C_b \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = K_b (1 - \epsilon) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (5.2)$$

สมการความสมดุลพลังงานที่ผิวของวัสดุ

$$-K_b \frac{\partial \theta}{\partial r} = h(\theta - T) \quad (5.3)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น ที่ $\tau = 0$ $T = T_i$

$\theta = \theta_i$

เงื่อนไขขอบเขต ที่ $x = 0$ $T = T_0$

$$\theta = \theta_0$$

จากสมการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของของไหลและสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุสมการ (5.1) และ (5.3) กำหนดให้

$$k_1 = \frac{h}{\rho_a C_a u \varepsilon}$$

$$k_2 = \frac{h}{k_b}$$

แทนค่า k_1 และ k_2 ในสมการ (5.1) และ (5.3) จะได้

$$\frac{\partial T}{\partial x} = k_1(\theta - T) \quad (5.4)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = k_2(\theta - T) \quad (5.5)$$

กำหนดให้ $y = k_1 x$ และ $z = k_2 r$

สมการ (5.4) และ สมการ (5.5) เขียนใหม่ได้

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \theta - T \quad (5.6)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial z} = \theta - T \quad (5.7)$$

เพื่อช่วยให้การแก้สมการสะดวกมากขึ้นกำหนดตัวแปรใหม่คือ U และ V โดยที่

$$T - T_0 = (\theta_0 - T_0)(U - V)^{y-z}$$

$$\theta - T_0 = (\theta_0 - T_0)(U + V)^{y-z} \quad (5.8)$$

จากสมการอนุพันธ์ของสมการ (5.8) จะพบว่า

$$U + V = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \quad (5.9)$$

$$U - V = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z}$$

จากสมการอนุพันธ์ของสมการ (5.9) จะพบว่า

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = V \quad (5.10)$$

เงื่อนไขขอบเขต ที่ $y = 0$ ($x = 0$) $T = T_0$ และ $\theta = \theta_0$

แทนค่าเงื่อนไขขอบเขตลงในสมการ (5.8) เพื่อหาค่าของ U และ V

$$T_0 - T_0 = (\theta_0 - T_0)(U - V)$$

$$\theta_0 - T_0 = (\theta_0 - T_0)(U + V)$$

$$U = 1/2 \quad \text{และ} \quad V = 1/2$$

จากค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ได้จะทำการแก้สมการหาค่า V จากสมการ (5.10)

กำหนดให้ $\lambda^2 = -4yz$

แทนค่าลงในสมการ (5.10)

$$\frac{d^2 V}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{dV}{d\lambda} + V = 0 \quad (5.11)$$

สมการ (5.11) สามารถแก้สมการให้อยู่ในรูปสมการ เบสเซล (Bessel function) คือ

$$V = cJ_0(\lambda) \quad (5.12)$$

โดยที่ c คือค่าคงที่

J_0 คือเบสเซลฟังก์ชันชนิดที่หนึ่งของลำดับที่ศูนย์

จากค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ $y = 0$

$$V = 1/2$$

แทนค่าลงในสมการ (5.12)

$$c = 1/2$$

ดังนั้น

$$V = 1/2 J_0(\lambda) \quad (5.13)$$

$$V = 1/2 J_0(2i\sqrt{yz}) = 1/2 Mo(yz)$$

$$\text{โดยที่} \quad Mo(a) = J_0(2i\sqrt{a}) = 1 + a + \frac{a^2}{(2!)^2} + \frac{a^3}{(3!)^2} + \dots$$

จากสมการ (5.13) สามารถหาค่า V ได้ต่อไปเป็นการหาค่า U โดยใช้สมการ (5.9) และ
ค่าเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$U + V = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}$$

ค่า U สามารถโดยจัดรูปสมการ (5.9) แล้วอินทิเกรตสมการ (5.9)

$$U = e^y \int e^{-y} \left(V + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \partial y - e^y f(z) \quad (5.14)$$

โดย $f(z)$ คือฟังก์ชันของ z

จากการอินทิเกรตโดยส่วน

$$\begin{aligned} \int e^{-y} \partial V &= e^{-y} V - \int V \partial e^{-y} \\ &= e^{-y} V + \int e^{-y} V \partial y \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} U &= V + e^y \int (e^{-y} V \partial y + e^{-y} V \partial y) - e^y f(z) \\ &= V + 2e^y \int (e^{-y} V \partial y) - e^y f(z) \end{aligned}$$

Shumann ได้ทำการประมาณค่าการอินทิเกรตดังนี้

$$2e^y \int e^{-y} V \partial y = -2 \left(V + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dots \right)$$

จากสมการ (5.13)

$$V = 1/2 Mo(yz)$$

ดังนั้น

$$2e^y \int e^{-y} V \partial y = - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz)$$

โดยที่ฟังก์ชัน $Mn(a)$ นิยามว่า

$$Mn(a) = \frac{d^n Mo(a)}{da^n}$$

แทนค่าตัวแปรต่างๆที่ได้ลงในสมการ (5.14)

$$U = \frac{1}{2} Mo(yz) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz) - e^y f(z) \quad (5.15)$$

จากที่ $y = 0$ $U = -1/2$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} Mo(0) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0) - f(z)$$

แต่ที่ $Mo(0) = 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0)$$

แทนค่า $f(z)$ ที่ได้ในสมการ (5.15) จะได้สมการของค่า U คือ

$$U = \frac{1}{2} Mo(yz) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz) - e^{-y} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0) \right)$$

นำค่า U และ V ที่ได้แทนค่าลงในสมการ (5.8) จะได้สมการการกระจายอุณหภูมิของของไหลและวัสดุดังนี้

จาก
$$T - T_0 = (\theta_0 - T_0)(U - V)^{-y-z}$$

สมการการกระจายอุณหภูมิของของไหลคือ

$$T = T_0 + (\theta_0 - T_0) \left(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz) + e^y \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0) \right) e^{-y-z} \quad (5.16)$$

จาก
$$\theta - T_0 = (\theta_0 - T_0)(U + V)^{-y-z}$$

สมการการกระจายอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุคือ

$$\theta = T_0 + (\theta_0 - T_0) \left(Mo(yz) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz) + e^y \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0) \right) e^{-y-z} \quad (5.17)$$

จากสมการ (5.16) และสมการ (5.17) จะสามารถหาค่าอุณหภูมิของของไหลและอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุได้ ต่อไปจะเป็นการหาการกระจายอุณหภูมิภายในวัสดุจากสมการ (5.2)

$$(1 - \varepsilon) \rho_b C_b \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = K_b (1 - \varepsilon) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (5.18)$$

เพื่อเป็นการลดตัวแปรจัดรูปสมการ (5.18) ใหม่โดยกำหนดให้

$$k3 = k_b / (C_b \rho_b) \quad \text{และ} \quad u = r(T - \theta)$$

สมการ (5.18) เปลี่ยนเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = k3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \quad (5.19)$$

ดังนั้นเงื่อนไขค่าขอบเขตและเงื่อนไขค่าเริ่มต้นคือ

$$\text{ที่ } r = R \quad -K_b \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{k3}{r} - h \right) u = 0 \quad (5.20)$$

$$\text{ที่ } r = 0 \quad u = 0 \quad (5.21)$$

$$\text{ที่ } \tau = 0 \quad u = r(T_0 - \theta_0) = u_0 \quad (5.22)$$

เนื่องจากสมการ (5.20) และ (5.22) เป็นสมการเชิงเส้น-เอกพันธ์

$$u = G(r)H(\tau) \quad (5.23)$$

โดยที่ $G(r)$ เป็นไอเจนฟังก์ชันในพิกัด r

$H(\tau)$ เป็นคำตอบของสมการอนุพันธ์ของเวลา

แทนค่าสมการ (5.23) ลงในสมการ (5.19)

$$k3G''(r)H(\tau) = G(r)H'(\tau) = -\lambda^2$$

$$\frac{G''(r)}{G(r)} = \frac{H'(\tau)}{k3H(\tau)} = -\lambda^2$$

โดยที่ $-\lambda^2$ คือค่าคงที่ของการแยกตัวแปร

ดังนั้น

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2} + \lambda^2 G(r) = 0$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} + k3\lambda^2 H(\tau) = 0$$

คำตอบของค่าไอเจนค่าหนึ่งคือ

$$G(r) = A\sin(\lambda r) + B\cos(\lambda r)$$

$G(r)$ ที่สอดคล้องกับสมการ (5.20) และ (5.21) คือ

$$G(r) = A\sin(\lambda r)$$

จากสมการอนุพันธ์ของ $H(\tau)$

$$H(\tau) = ce^{-k3\lambda^2\tau}$$

ดังนั้น

$$u = (A\sin(\lambda r))ce^{-k3\lambda^2\tau} \quad (5.24)$$

แทนค่าสมการ (5.24) ลงในสมการ (5.20) จะพบว่า

$$\tan(\lambda_n R) = \frac{K_b \lambda_n R}{K_b - hR} \quad (5.25)$$

จากสมการ (5.25) ที่เราได้เราสามารถหาค่า λ_n ได้โดยใช้วิธีคำนวณซ้ำจากการที่รู้ค่า λ_n ทำให้สมการ (5.24) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \sin(\lambda_n r) e^{-k_3 \lambda_n^2 r} \quad (5.26)$$

โดยค่า K_b คือค่าคงที่

สมการ (5.25) จะสอดคล้องกับสมการ (5.22)

$$r(T_0 - \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(\lambda_n r) \quad (5.27)$$

โดยอาศัยคุณสมบัติ Orthogonality ของ $\sin(\lambda_n r)$

$$k_n = \frac{(T_0 - \theta_0) \int_0^R r \sin(\lambda_n r) dr}{\int_0^R \sin^2(\lambda_n r) dr}$$

$$k_n = \frac{4(T_0 - \theta_0) \sin(\lambda_n R) - \lambda_n R \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n R (2\lambda_n R - \sin(2\lambda_n R))} \quad (5.28)$$

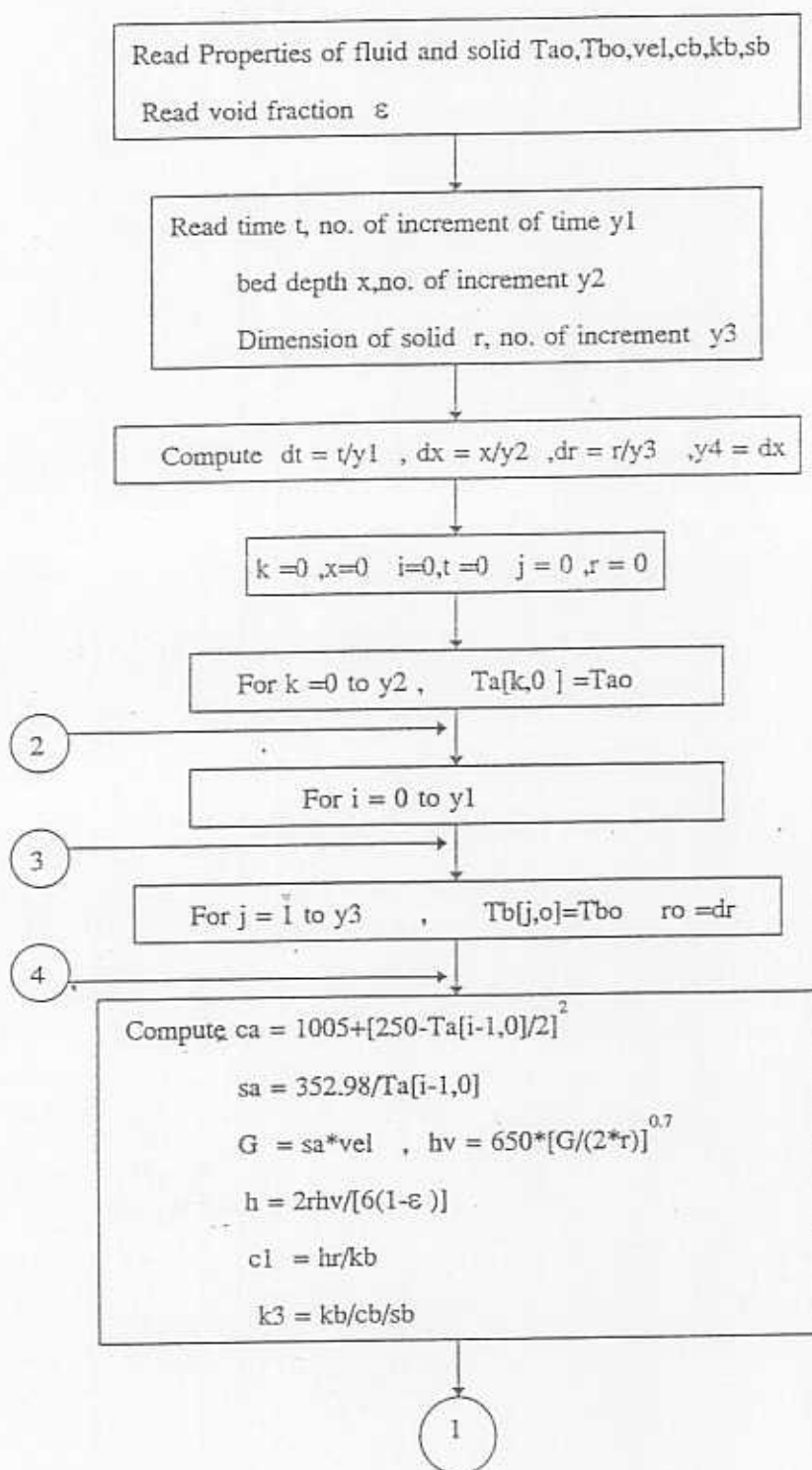
จาก $u = r(T - \theta)$

จากสมการ (5.28) เมื่อแทนค่าในสมการ (5.24) เราจะได้สมการการกระจายอุณหภูมิภายในวัสดุคือ

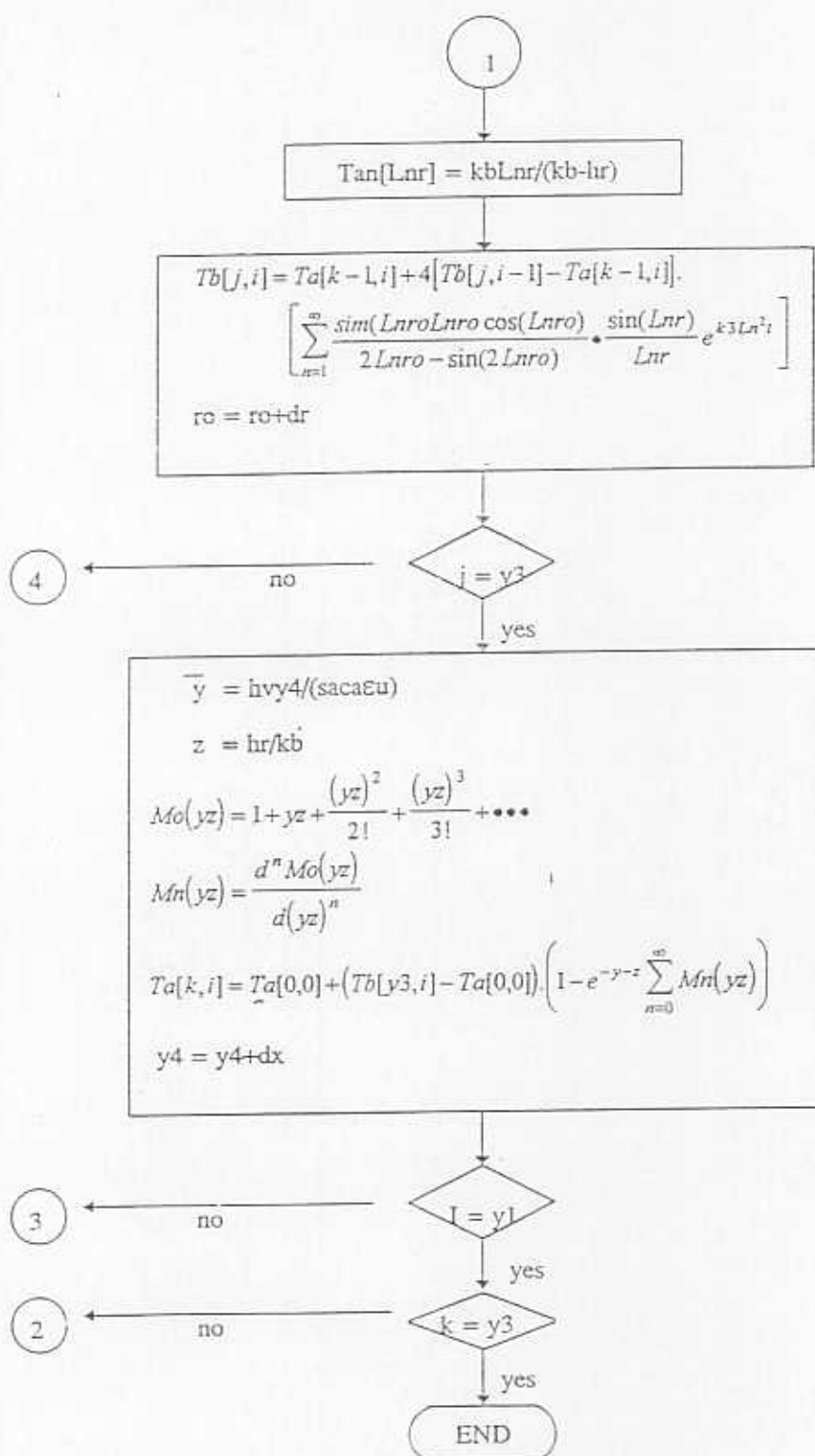
$$\theta = T + \left[\frac{4(T_0 - \theta_0) \sin(\lambda_n R) - \lambda_n R \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n R (2\lambda_n R - \sin(2\lambda_n R))} \right] \left[\frac{\sin(\lambda_n r)}{(\lambda_n r)} \right] e^{-k_3 \lambda_n^2 r} \quad (5.29)$$

5.2 ขั้นตอนการคำนวณ

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้สมการสำหรับการหาอุณหภูมิคือ สมการ (5.16) เป็นสมการที่ใช้ในการหาอุณหภูมิของของไหล สมการ (5.17) เป็นสมการที่ใช้หาอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุ ส่วนสมการ (5.29) เป็นสมการที่ใช้หาการกระจายอุณหภูมิภายในวัสดุ ข้อมูลที่จะต้องใช้ในการคำนวณคือ ความยาวของชั้นวัสดุหนา จำนวนในการแบ่งของชั้นวัสดุหนา เส้นผ่านศูนย์กลางของวัสดุ เวลาที่ใช้ในการทดลอง จำนวนในการแบ่งเวลา อัตราส่วนช่องว่าง ความจุความร้อนของของไหล ความหนาแน่นของของไหล อุณหภูมิเริ่มต้นของของไหล ความจุความร้อนของวัสดุ ความหนาแน่นของวัสดุ ค่าการนำความร้อนของวัสดุ และอุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ จากข้อมูลที่ได้ขั้นต่อไปในการคำนวณ จะต้องแก้สมการเพื่อหาค่า λ_n โดยใช้วิธีการกระทำซ้ำ จากนั้นจึงทำการหาค่าการกระจายอุณหภูมิภายในวัสดุ และคำนวณหาอุณหภูมิของของไหลและอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุตามลำดับ โดยขั้นตอนการคำนวณเป็นไปตามรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 ขั้นตอนการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนากรณีการกระจายอุณหภูมิ
ในวัสดุไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์



รูปที่ 5.1 ขั้นตอนการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในชั้นบรรยากาศที่มีการกระจายอุณหภูมิในวัสดุไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ (ต่อ)